Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 4 : Dérivabilité

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 22 novembre 2008

Fig. 1 – Jean Dausset

Fig. 2 – halliday

Fig. 3 – Johann Radon

Il y a des gens connus et des gens importants-*Idée de Dominique Barbolosi*

Table des matières

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document , est téléchargeable ici :
`http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo`

I Chapitre 4 : Fonctions dérivables

I.A Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition 1:

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I. f est dérivable en a si et seulement si l'une ou l'autre des deux propositions équivalentes est réalisée :

- la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie l en 0, ou encore que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite l quand x tend vers a.
- pour tout réel h tel que $a+h \in I$, $f(a+h) = f(a) + hl + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Le nombre l est appelé nombre dérivé de la fonction f en a et est noté $f'(a)$.

Remarques :

- Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.
- Soit $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$, le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I inclus dans l'ensemble de définition de f, on dit que f est dérivable sur I.

Définition 2:

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction dérivée de f sur I est la fonction f' qui à tout a dans I associe $f'(a)$.

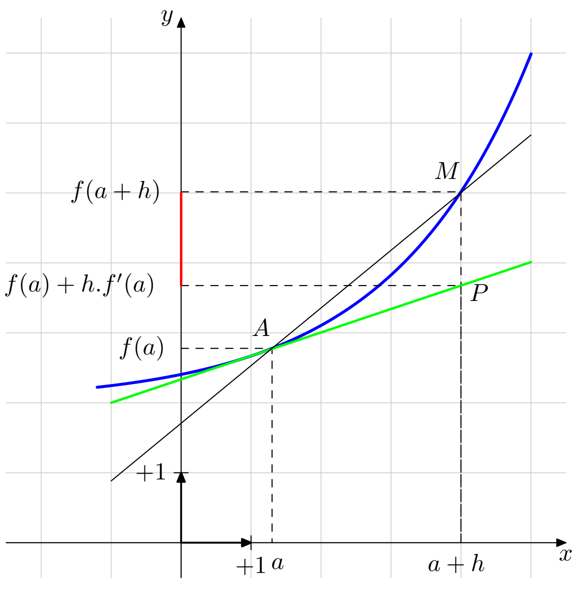
I.B Tangente et approximation affine localement au voisinage de a

• : si $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère. Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

• : Pour tout réel h tel que $a+h \in I$,
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

On remarque graphiquement ci-contre que, lorsque h tend vers 0, M se "rapproche" de P et donc $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h proche de 0.



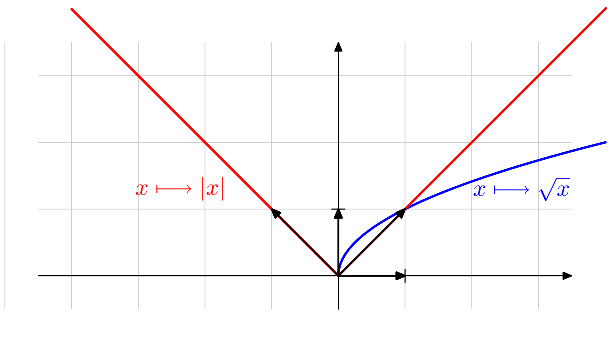
I.C Dérivabilité et continuité

PROPOSITION 1:

f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration
On suppose que f est dérivable en a, c'est à dire, pour $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$,
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Or $\lim\limits_{h\to 0} f'(a)h = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} h\varepsilon(h) = 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, ce qui justifie que f est continue en a.

Remarque : La réciproque de la propriété est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.
De même, la fonction valeur absolue est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
Je vous invite à regarder, dans les deux cas, la raison pour laquelle la fonction n'est pas dérivable en 0 en étudiant et interprètant graphiquement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$



I.D Dérivées successives

Définition 3:

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa fonction dérivée f' s'appelle la fonction dérivée première (ou d'ordre 1) de f .
Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f'' ; f'' est appellée dérivée seconde (ou dérivée d'ordre 2) de f.
De manière récurrente, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérivée n-ième (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$, $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)} = f^{(n-1)'}$.

Exemple 1: $f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ et ainsi de suite...

I.E Règles de dérivation

I.E.1 Dérivées des fonctions usuelles

Voici un tableau que l'on complètera plus tard dans l'année.

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur l'intervalle
λ	0	$]-\infty;+\infty[$
x	1	$]-\infty;+\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$]-\infty;+\infty[$
$1/x$	$-1/x^2$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty;+\infty[$

I.E.2 Dérivées et opérations sur les fonctions

PROPOSITION 2:

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel. Alors ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I et :

$$(ku)' = ku' \quad ; \quad (u+v)' = u' + v' \quad ; \quad (uv)' = u'v + uv'$$

Si, de plus v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Corollaire : Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de leur domaine de définition.

EXERCICE 1: Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2+x+2}{x^2+x}$

Solution :

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

   On a alors $u'(x) = 1$; $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f' = u'v + uv'$

   $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, et $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x^2+x+2$ et $v(x) = x^2+x$

   On a alors $u'(x) = 8x+1$; $v'(x) = 2x+1$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   $f'(x) = \dfrac{(8x+1)(x^2+x) - (4x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$.

I.E.3 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1

g est une fonction dérivable sur un intervalle J. u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I,

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)).$$

Démonsration : Pour tout $a \in I$, pour tout réel h non nul tel que $a + h \in I$,
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{h} = \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$
Or u est dérivable en a, d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.
De plus, u est dérivable en a, u est donc continue en a, ce qui donne : $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$.
On a également $u(a) \in J$ et g est dérivable sur J, d'où : $\lim\limits_{X \to u(a)} \dfrac{g(X) - g(u(a))}{X - u(a)} = g'(u(a))$.
On obtient alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{u(a+h) - u(a)} = g'(u(a))$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = u'(a) \times g'(u(a))$ et $g \circ u$ est dérivable en a et $(g \circ u)'(a) = u'(a) \times g'(u(a))$.

Remarque : On retrouve ainsi une propriété vue en première : si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = af'(ax + b)$.

Exercice 2: Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x^2)$.

<u>Solution :</u>

1. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = g \circ u(x)$ où $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$.
   $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $g'(x) = \cos x$.
   On a alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f(x) = g \circ u(x)$ où $u(x) = x^2$ et $g(x) = \cos x$.
   $u'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\sin x$ et $f'(x) = -2x \sin(x^2)$.

I.E.4 Deux exemples de fonctions composées

Proposition 3:

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout x de I : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Dém : $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
g est dérivable sur $]0;+\infty[$; pour tout x de I, $u(x) > 0$, donc la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et d'après la propriété sur la dérivée d'une fonction composée, on obtient : $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Proposition 4:

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel non nul.
Alors la fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout x de I : $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$

Dém : $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = x^n$. Pour tout réel x, $g'(x) = nx^{n-1}$.
Alors pour tout réel x, $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = u'(x) \times n[u(x)]^{n-1} = n[(u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

Remarque : Cas où $n < 0$ et u ne s'annule en aucun point de I :
On a $f(x) = [u(x)]^n = \dfrac{1}{[u(x)]^{-n}}$. Puisque $-n > 0$, on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction et on obtient : $f'(x) = -\dfrac{\left([u(x)]^{-n}\right)'}{\left([u(x)]^{-n}\right)^2}$
et $\left([u(x)]^{-n}\right)' = -nu'(x) \times [u(x)]^{-n-1}$ donc $f'(x) = n\dfrac{u'(x)[u(x)]^{-n-1}}{[u(x)]^{-2n}} = n\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^{-n+1}}$.
On obtient également $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

Exercice 3: Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

<u>Solution :</u>

1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a $f(x) = [u(x)]^n$ où $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $u'(x) = 2x + 3$.
   On a alors $f'(x) = 3 \times (2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^2$.
2. Comme $x^2 + 2x + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a $g(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $u'(x) = 2x + 2$
   On a alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.

I.F Applications de la dérivation (étude de fonction)

I.F.1 sens de variation

Théorème 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

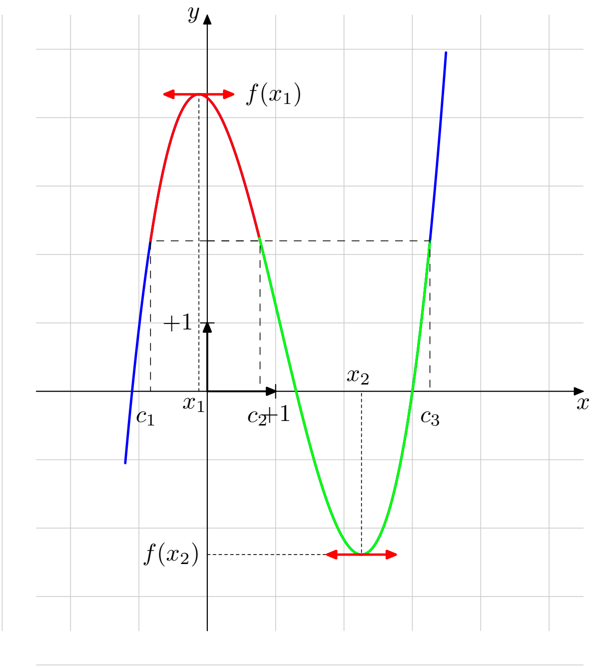
Ex : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x^2$ pour tout réel x.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

I.F.2 Extremum local

Proposition 5:

f est une fonction dérivable sur un intervalle I, c est un point de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) signifie que l'on peut trouver un intervalle J inclus dans I et contenant c, tel que,
pour tout x de J, $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).
On appelle extremum local, un maximum ou un minimum local.

Sur l'exemple ci-contre, f présente un maximum local en x_1 sur l'intervalle $[c_1; c_2]$ et un minimum local en x_2 sur $[c_2; c_3]$



Théorème 3

f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert, c est un point de I.

1. Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.
2. Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.

Remarque : Lorsque $f(c)$ est un extremum local, la tangente à la courbe représentant f en $A(c; f(c))$ est horizontale.

I.G Exemple : étude de la fonction tangente

La fonction tangente, notée tan, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Par la suite, on note D l'ensemble de définition de la fonction tan.

Proposition 6:

Pour tout x de D, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Dém : Si $x \in D$, alors $x + \pi \in D$, et $\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

La fonction tan est périodique de période π.

Proposition 7:

Pour tout x de D, $\tan(-x) = -\tan x$

Dém : Si $x \in D$, $-x \in D$ et $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

La fonction tangente est alors impaire, sa courbe représentative admet donc l'origine pour centre de symétrie.

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Proposition 8:

La fonction tangente est dérivable en tout réel x de D et $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Dém : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D, donc la fonction tangente est dérivable sur D.

$(\tan)'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.[1]

Tableau de variation et représentation graphique

[1]Voir le TP Info 5 bis

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $(\tan)'(x) > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; +\frac{\pi}{2}\right[$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$(tan(x))'$	$+$	‖
$tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖

Dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on trace la courbe qui représente la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, puis par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe Γ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Enfin, on applique à Γ les translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
D'où la représentation graphique suivante :