3. Dérivées

3.1. Un peu d'histoire

Isaac **Newton** (Woolsthorpe, 25/12/1642 - Londres, 31/3/1727)

Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (Leipzig, 1/7/1645 - Hannover, 14/11/1716)

Christiaan **Huygens** (La Haye, 14/4/1629 - La Haye, 8/7/1695)

Isaac **Newton** est né le jour de Noël 1642, l'année de la mort de **Galilée**, à Woolsthorpe, petit bourg de la région de Lincoln, sur la côte est de l'Angleterre. Admis au Trinity College de Cambridge en 1661, il se familiarise avec les œuvres de **Descartes**, **Galilée**, **Wallis** et Isaac **Barrow**. Entre 1665 et 1666, il est contraint de quitter l'Université de Cambridge qui ferme ses portes à cause de la peste qui sévit dans la région. De retour à Woolsthorpe, c'est au cours de cette parenthèse qu'il pose les fondements du calcul infinitésimal, de la nature de la lumière blanche et de sa théorie de l'attraction universelle. De retour à Cambridge en 1669, il succède à Isaac **Barrow** à la chaire de mathématiques de l'Université, qu'il conservera jusqu'en 1695. En 1671, il conçoit lui-même un télescope à miroir, exceptionnel pour l'époque, qui grossit 40 fois. Le 11 janvier 1672, il est élu à la Royal Society de Londres. En 1687, **Newton** publie son œuvre maîtresse, *Principes mathématiques de philosophie naturelle*, exposant sa théorie de l'attraction universelle. En 1693, il plonge dans une profonde dépression qui marquera la fin de sa période créatrice. Les *Méthodes des fluxions*, qu'il avait écrites en 1671, ne seront publiées qu'en 1736, après sa mort. **Newton** y faisait alors naître le calcul infinitésimal, en même temps que **Leibniz** dont le *Calcul différentiel* fut, lui, édité en 1686. À l'époque, les deux hommes s'étaient vivement opposés, chacun revendiquant la paternité de la découverte. À la mort de **Newton**, le débat continua.

Leibniz est né à Leipzig le 1er juillet 1646. Il est donc parfaitement contemporain à **Newton**. À quinze ans, maîtrisant les langues anciennes, il entre à l'université de Leipzig pour étudier le droit mais il y découvre **Kepler**, **Galilée** et **Descartes**, ce qui l'incite à s'initier aux mathématiques. En 1663 il soutient une thèse sur *le principe d'individuation*, part étudier les mathématiques à Iena, puis le droit à Altorf où il obtient un doctorat en 1667. En 1672, **Leibniz** rejoint une mission diplomatique à la cour de Louis XIV – pour convaincre le roi de conquérir l'Égypte. Là, il se lie avec les grands esprits de l'époque, dont le mathématicien hollandais Christiaan **Huygens** (1629-1695), se plonge dans la lecture de **Pascal** et invente une machine à calculer. **Leibniz** est ébloui par les méthodes que lui dévoile **Huygens** ; au cours d'un voyage à Londres en 1673, il rencontre des mathématiciens anglais à qui il montre ses premiers travaux et assiste à des séances de la Royal Society dont il est élu membre étranger. De retour à Paris, il retrouve **Huygens** qui l'encourage vivement à poursuivre ses recherches. À l'issue de son séjour parisien, il élabore le calcul différentiel. En 1684, il publie son *Calcul différentiel*. Il fonde en 1700 l'académie de Berlin dont il est le premier président. **Leibniz** est aussi célèbre en tant que théologien et philosophe.

D'autres grands noms sont liés à l'intégration. Citons entre autres Jacques **Bernoulli** (1654-1705), Jean **Bernoulli** (1667-1748) le frère de Jacques, Daniel **Bernoulli** (1700-1782) le fils de Jean, le marquis de **l'Hôpital** (1661-1704), Leonhard **Euler** (1707-1783), Joseph Louis **Lagrange** (1736-1813), Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827) et Augustin **Cauchy** (1789-1857).

3.2. Définition de la dérivée

Définition 1

Si la limite $f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existe, elle est appelée fonction **dérivée** de la fonction *f*. *f* est alors dite **dérivable**.

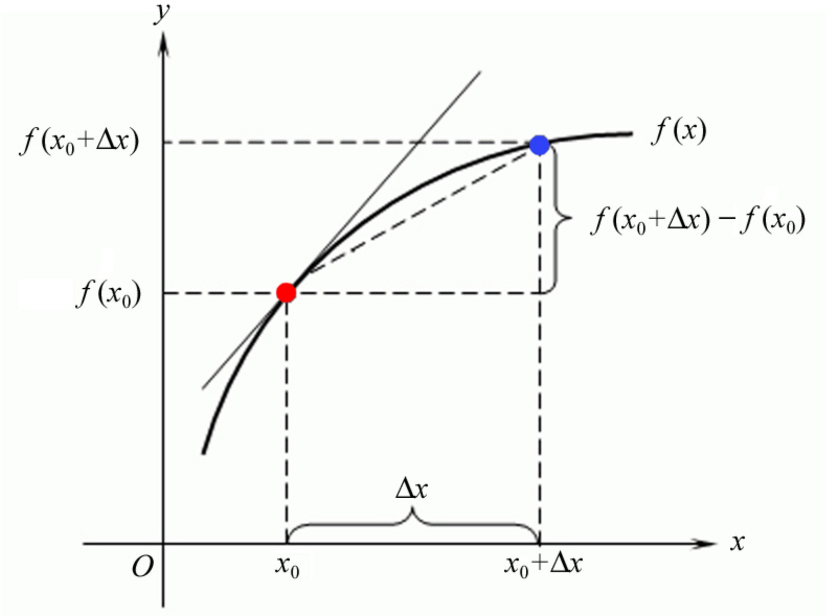
Remarque : Δx peut être positif ou négatif. Si $\Delta x > 0$ on parle de *dérivée à droite* ; si $\Delta x < 0$, on parle de *dérivée à gauche*. La fonction est dérivable si la dérivée à droite et la dérivée à gauche existent et si elles sont égales.

Δx est un accroissement (une variation) de la variable x.

$f(x_0+\Delta x) - f(x)$ est l'accroissement de f.

$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ est le taux d'accroissement moyen.

Quand $\Delta x \to 0$, on parle de taux de variation instantané.



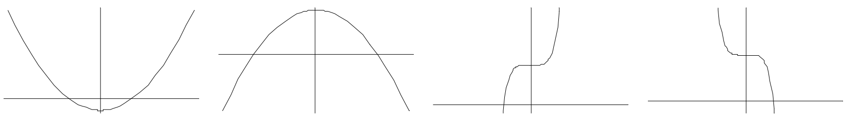
Attention ! Δx ne signifie pas $\Delta \cdot x$. Cela signifie « un petit accroissement de x ». On ne peut pas séparer le Δ du x.

Interprétation géométrique

La valeur $f'(x_0)$ est la **pente de la tangente** à la courbe $f(x)$ en $x = x_0$.

De cette interprétation géométrique, on peut déduire que :

Si $f' > 0$ sur un intervalle, alors f est **croissante** sur cet intervalle.
Si $f' < 0$ sur un intervalle, alors f est **décroissante** sur cet intervalle.
Si $f' = 0$ en un point, alors ce point est un **extremum** de la fonction ou un **point d'inflexion à tangente horizontale**.



minimum maximum
(extrema)

points d'inflexion à tangente horizontale (« chaises »)

Définition 2 Si une fonction $f(x)$ est dérivable en tout point de l'intervalle $I =]a ; b[$, elle est dite **dérivable** sur l'intervalle I.

Notations Il existe plusieurs notations pour désigner la dérivée d'une fonction $y = f(x)$:

$$f'(x),\ f',\ y',\ \frac{dy}{dx}$$

La dernière notation a été introduite par **Leibniz**.
Elle remplace parfois avantageusement les autres notations. En effet, dans de nombreux calculs, on est en droit de travailler comme s'il s'agissait d'un rapport banal, ce qui donne un aspect immédiat à certains résultats.

Dérivabilité et continuité

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

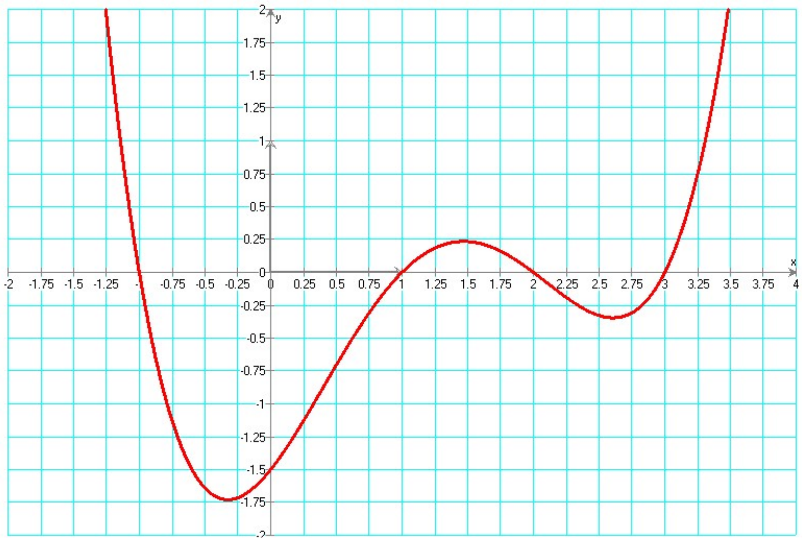
Attention ! La réciproque est fausse : une fonction continue n'est pas forcément dérivable. Par exemple la fonction $y = |x|$ est continue mais pas dérivable en $x = 0$ (les dérivées à gauche et à droite ne sont pas égales). Il en est ainsi pour toutes les fonctions possédant des « pointes ».

Exercice 3.1

Sur le graphe de la fonction $f(x)$ ci-dessous, indiquez les valeurs approximatives de x pour lesquelles :

a. $f(x) = 0$ **b.** $f'(x) = 0$ **c.** $f'(x) = 1$ **d.** $f'(x) = -4$ **e.** $f'(x) = -\frac{1}{2}$

Indication
Utilisez l'interprétation géométrique de la dérivée.

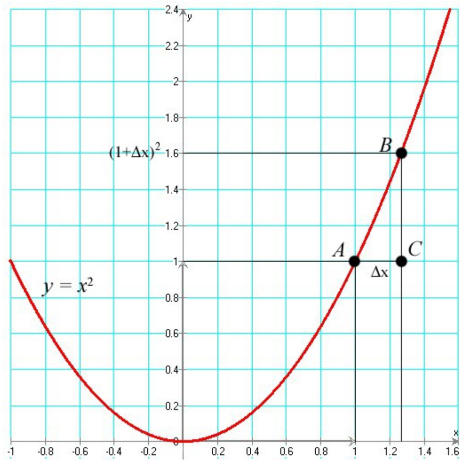


Exercice 3.2

Esquissez le graphe de sin(x) et utilisez ce graphe pour décider si la dérivée de sin(x) en $x = 3\pi$ est positive ou négative.

Exercice 3.3

Trouvez la pente des tangentes à la parabole $y = x^2$ aux points $A(1;\ 1)$ et $D(-2;\ 4)$.



Exercice 3.4

Utilisez la **définition 1** pour estimer numériquement la dérivée de

a. $f(x) = x^x$ en $x = 2$

b. $f(x) = \ln(\cos(x))$ en $x = \frac{\pi}{4}$

c. $f(x) = \sin(e^x)$ en $x = 3$

Exercice 3.5

La position d'un mobile est donnée par l'équation du mouvement $s = f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, où t est mesuré en secondes et s en mètres. Calculez la vitesse du mobile après 2 secondes.

Exercice 3.6

Pour trouver $f(x+\Delta x)$, il suffit de remplacer le symbole « x » par « $x+\Delta x$ ».

En utilisant la **définition 1** de la dérivée, trouvez algébriquement la dérivée f' de

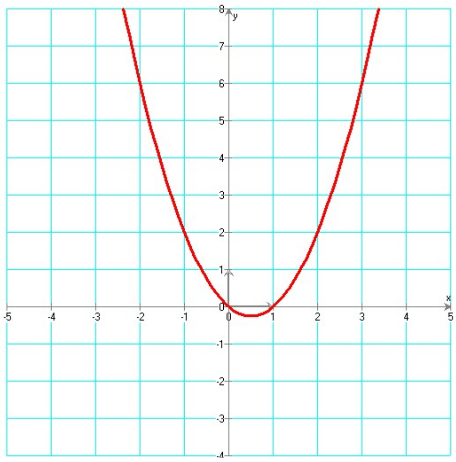
a. $f(x) = x^3 + 5$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c. $f(x) = \sqrt{x}$ **d.** $f(t) = 3t^2 + 5t$

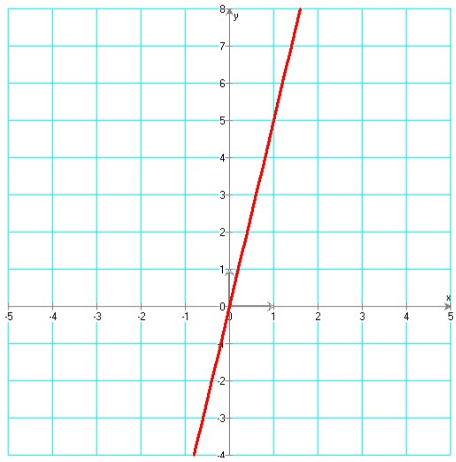
Exercice 3.7

Esquissez le graphe de la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

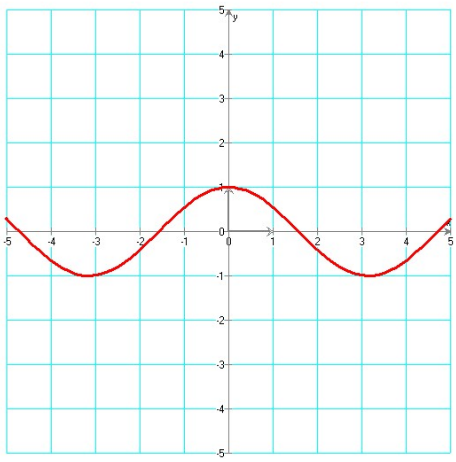
a.



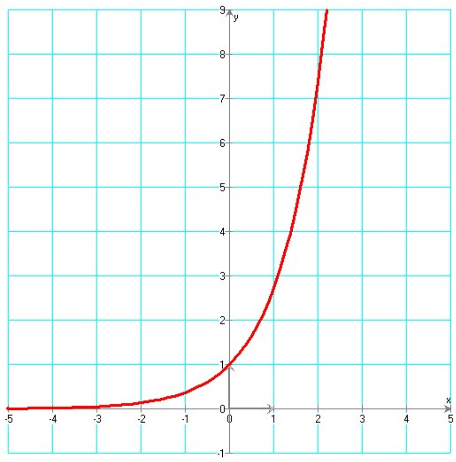
b.



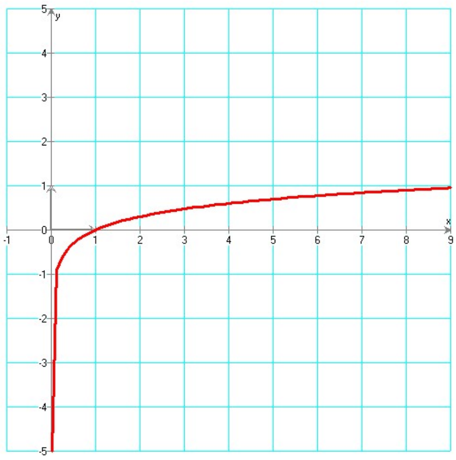
c.



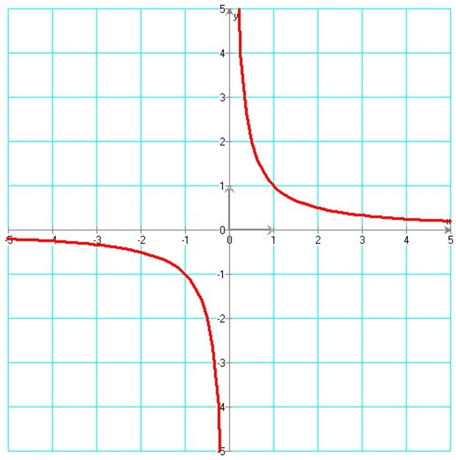
d.



e.



f.



Donnez les équations des courbes des fonctions ci-dessus.

Exercice 3.8

En mettant en correspondance les courbes de $f(x)$ et $f'(x)$ de l'exercice 3.7, remplissez les cases vides du tableau ci-dessous avec les réponses suivantes (il y a un intrus) :

$= 0$, $= 0$, $= 0$, < 0, > 0, ∞, min ou max

$f(a)$	décroît	croît	minimum	maximum	point d'inflexion	pt. d'infl. à tg. horiz.
$f'(a)$						

Exercice 3.9

Dans une expérience de laboratoire, le nombre de bactéries après t heures est donné par $n = f(t)$.

a. Quelle est la signification de $f'(5)$? En quelles unités s'exprime $f'(5)$?

b. Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée, lequel des deux nombres $f'(5)$ et $f'(10)$ sera le plus grand ?

Exercice 3.10

a. Dessinez une courbe dont la pente partout positive croît continûment.

b. Dessinez une courbe dont la pente partout positive décroît continûment.

c. Dessinez une courbe dont la pente partout négative croît continûment.

d. Dessinez une courbe dont la pente partout négative décroît continûment.

Exercice 3.11

Dessinez un graphe possible de $y = f(x)$ connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x) > 0$ pour $1 < x < 3$
- $f'(x) < 0$ pour $x < 1$ ou $x > 3$
- $f'(x) = 0$ en $x = 1$ et $x = 3$

Exercice 3.12

a. Sur un même système d'axes, dessinez les graphes de $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sin(2x)$, pour x compris entre 0 et 2π.

b. Sur un deuxième système d'axes identique au premier, esquissez les graphes de $f'(x)$ et $g'(x)$ et comparez-les.

Exercice 3.13

Par des expériences, on peut constater que le chemin parcouru (ℓ) par un corps en chute libre est proportionnel au carré du temps écoulé :

$$\ell(t) = \frac{g}{2}t^2 \quad \text{où } g \text{ est la gravité terrestre } (9.81 \text{ m/s}^2).$$

a. Quelle est la vitesse moyenne entre le moment t et le moment $t + \Delta t$?

Quand $\Delta t \to 0$, la vitesse moyenne tend, par définition, vers la *vitesse instantanée* au moment t.

b. Quelle est la vitesse instantanée au moment t ?

3.3. La dérivée seconde

Comme la dérivée est elle-même une fonction (cf. ex. 3.7), on peut calculer sa dérivée. Pour une fonction f, la dérivée de sa dérivée est appelée *dérivée seconde* et notée f''.

Remarque
On peut aussi calculer la dérivée troisième, quatrième, etc. Cependant, elles ont moins d'intérêt que les dérivées première et seconde.

Que nous dit la dérivée seconde ?

Puisque f'' est la dérivée de f' :

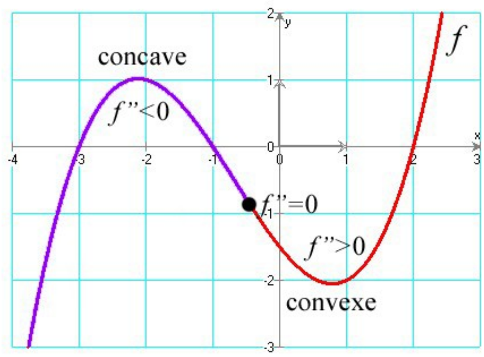
Si $f'' > 0$ sur un intervalle, alors f' est **croissante** sur cet intervalle.
Si $f'' < 0$ sur un intervalle, alors f' est **décroissante** sur cet intervalle.

Lorsque f' est croissante, la courbe f se redresse : elle est **convexe**.
Lorsque f' est décroissante, la courbe f s'infléchit vers le bas : elle est **concave**.

Deux trucs mnémotechniques

Pour se rappeler la différence entre convexe et concave, penser qu'une courbe con<u>cave</u> a la forme d'une <u>cave</u>rne.

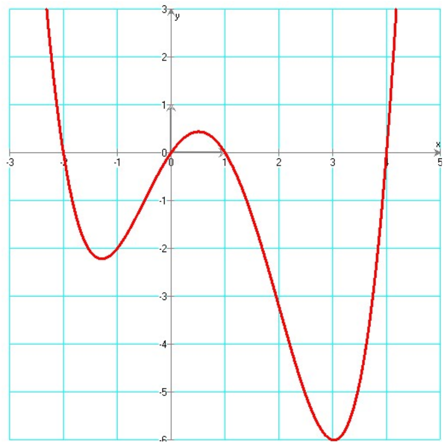
Si la dérivée seconde est positive, on peut imaginer que « la courbe sourit ». Inversement, quand elle est négative, « elle tire la tronche ».



Pour trouver les points d'inflexion (point noir sur la figure ci-dessus) de $f(x)$, il faut poser $f''(x) = 0$ et résoudre. **Mais attention !** Il faudra vérifier que c'est bien un point d'inflexion : $f''(x-\varepsilon)$ et $f''(x+\varepsilon)$ devront être de signes opposés.

Exercice π

Pour la fonction f donnée ci-dessous, décidez où la dérivée seconde est positive et où elle est négative.



Exercice 3.15

Donnez trois moyens de faire la différence entre un minimum local d'une fonction f, un maximum local et un point d'inflexion à tangente horizontale.

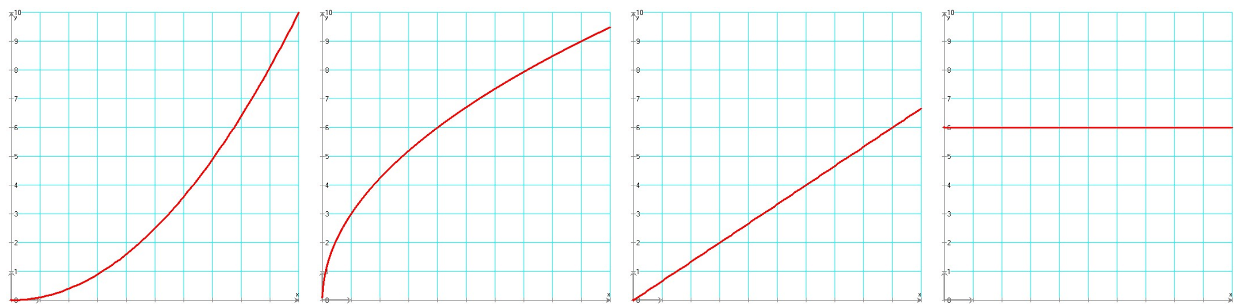
Exercice 3.16

Rappels de physique

La fonction vitesse est la dérivée de la fonction horaire (position). La fonction accélération est la dérivée de la fonction vitesse.

Chacun des graphes ci-dessous montre la position de quatre wagonnets se déplaçant sur une ligne droite en fonction du temps au cours d'une expérience de physique. Les échelles de tous les graphes sont les mêmes. Quel(s) wagonnet(s) a (ont) :

a. une vitesse constante ?
b. la plus grande vitesse juste après le début de l'expérience ?
c. une vitesse nulle ?
d. une accélération nulle ?
e. une accélération toujours positive ?
f. une accélération toujours négative ?



(I) (II) (III) (IV)

Exercice 3.17

Colorez sur le graphe de la fonction f ci-dessous les « tronçons de la fonction f » où $f \geq 0$ (en vert), $f' \geq 0$ (en rouge) et $f'' \geq 0$ (en bleu).

Précisions :

Maximum en (–1.6, 2)
Minimum en (1.55, 0)
Points d'inflexion en $x = -1.2$, $x = 0$ et $x = 1.1$
La pente de f en (0, 1) est nulle.

On se donne les abscisses suivantes : –2.25, –1.6, –1.2, –0.5, 0, 0.7, 1.55, 2.
Dites pour lesquelles de ces abscisses…

a. f et f'' sont non nulles et de même signe.

b. au moins deux des valeurs de f, f' et f'' sont nulles.

Exercice 3.18

a. Dessinez une courbe dont la première et la seconde dérivée sont partout positives.

b. Dessinez une courbe dont la seconde dérivée est partout négative, mais dont la première dérivée est partout positive.

c. Dessinez une courbe dont la seconde dérivée est partout positive, mais dont la première dérivée est partout négative.

d. Dessinez une courbe dont la première et la seconde dérivée sont partout négatives.

Exercice 3.19
(suite de l'ex. 3.6)

Trouvez algébriquement la dérivée seconde de...

a. $f(x) = x^3 + 5$ en $x = 1$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$

c. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$ **d.** $f(t) = 3t^2 + 5t$ en $t = -1$

3.4. Dérivées de fonctions usuelles

Les tables ci-dessous regroupent les fonctions usuelles. a et n sont des constantes.

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x\ln(a)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$\lvert x \rvert$	$\text{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

3.5. Règles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables et λ un nombre réel. Les propriétés suivantes servent au calcul des dérivées :

1. $(f+g)' = f' + g'$	**2.** $(f-g)' = f' - g'$
3. $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$	**4.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
5. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	**6.** $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

La règle la plus difficile est la sixième. Elle concerne la dérivation de fonctions composées. Nous la traiterons en détails un peu plus loin.

3 exemples de calculs de dérivées

1. Dérivons $h(x) = e^x + x^3$

On a $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$ et $h(x) = f(x) + g(x)$.

D'après la règle **1** : $h'(x) = \underbrace{e^x}_{f'} + \underbrace{3x^2}_{g'}$

2. Dérivons $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x}$

On a $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ et $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

D'après la règle **4** : $h'(x) = \dfrac{\overbrace{\cos(x)}^{f'} \cdot \overbrace{e^x}^{g} - \overbrace{\sin(x)}^{f} \cdot \overbrace{e^x}^{g'}}{\underbrace{(e^x)^2}_{g^2}} = \dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x}$

3. Dérivons $h(x) = x^2 \cdot 3^x$

On a $f(x) = x^2$, $g(x) = 3^x$ et $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

D'après la règle **5** : $h'(x) = \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{3^x}_{g} + \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{3^x \ln(3)}_{g'} = x \cdot 3^x (2 + x\ln(3))$

Exercice 3.20

a, b, c, d sont des nombres réels. On donne $f(x)$. Calculez $f'(x)$ pour les cas suivants :

La règle 6 n'intervient dans aucun de ces calculs, car il n'y a pas de fonctions composées.

Pour les exercices 17 à 20, il faut d'abord transformer les racines en puissances.

1. $x + 1$	**2.** $2x$	**3.** $-3x + 5$	**4.** $ax + b$
5. x^2	**6.** $4x^2 - 5x - 4$	**7.** $2x^3 + 2x + 6$	**8.** $ax^2 + bx + c$
9. $(3x^2 + 5)(x^2 - 1)$	**10.** $ax^3 + bx^2 + cx$	**11.** $(x + 5)(x - 3)$	**12.** 0
13. $(ax + b)(cx + d)$	**14.** $\dfrac{a}{x}$	**15.** $\dfrac{x+5}{x-1}$	**16.** $\dfrac{x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1}$
17. $\sqrt{x}$	**18.** $\sqrt[3]{x}$	**19.** $\sqrt[3]{x^2}$	**20.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Rappel sur la composition de fonctions

Remarquez bien que l'ordre des opérations est **l'inverse** de l'ordre d'écriture!

Envisageons les fonctions $f(x) = 6x - 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On peut les appliquer à la queue leu leu, par exemple : la fonction « f suivie de g ».

$$x \xrightarrow{f} 6x - 4 \xrightarrow{g} \sqrt{6x-4}$$

On écrira $g(f(x)) = \sqrt{6x-4}$ ou $g \circ f(x) = \sqrt{6x-4}$.

3 exemples d'utilisation de la règle 6

En anglais, la règle 6 s'appelle *the chain rule*.

On peut aussi voir une composition de fonctions comme l'emboîtement de poupées russes. On « dérive toutes les poupées » de l'extérieur vers l'intérieur.

1. Dérivons $h(x)=\sin(\sqrt{x})$. Le schéma est $x \to \sqrt{x} \to \sin(\sqrt{x})$.

D'après la règle **6** : $h'(x)=\underbrace{\cos(\sqrt{x})}_{g'\circ f}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{f'}$

2. Dérivons $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}$. Le schéma est $x \to x^2 \to e^{x^2}$.

D'après la règle **6** : $h'(x)=\underbrace{e^{x^2}}_{g'\circ f}\cdot\underbrace{2x}_{f'}$

3. Dérivons $h(x)=\ln\left|\cos(3x^2)\right|$.

Le schéma est $x \to 3x^2 \to \cos(3x^2) \to \ln\left|\cos(3x^2)\right|$.

D'après la règle **6** : $h'(x)=\underbrace{\frac{1}{\cos(3x^2)}}_{k'\circ g\circ f}\cdot\underbrace{(-\sin(3x^2))}_{g'\circ f}\cdot\underbrace{6x}_{f'}=-6x\tan(3x^2)$

Remarquez que l'on dérive les fonctions successivement de droite à gauche tout en gardant intact « l'intérieur » des fonctions. On parle souvent de « dérivée de l'intérieur ».
Pour se rappeler l'ordre de dérivation, il est utile quand on débute de faire le petit schéma fléché.

Exercice 3.21

a et b sont des nombres réels. On donne $f(x)$. Calculez $f'(x)$ pour les cas suivants :

Rappelez-vous que l'erreur la plus courante dans le calcul des dérivées est l'oubli de la dérivée intérieure !

1. $\sqrt{x^2+5x-1}$	**2.** $\sqrt[3]{(x-1)^2}$	**3.** $x^2\sqrt{2x+1}$
4. $\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$	**5.** $(x^2-16)\sqrt{4-x}$	**6.** $(x^2+5x-1)^5$
7. $(3x^2-x-1)(2x-3)^3$	**8.** $(2x^2-x-1)^3$	**9.** $(x+2)^3x^2$
10. $\sin(x)+\cos(x)$	**11.** $\tan(x)-x$	**12.** $\sin(2x-1)$
13. $\sin^5(4x)$	**14.** $\sqrt{\sin(x)}$	**15.** $\cos^3(\sqrt{x})$
16. $\frac{1}{\tan(2x)}$	**17.** e^{2x}	**18.** e^{ax+b}
19. $e^{\sin(x)}$	**20.** $\mathrm{e}^x\sin(x)$	**21.** $\cos(2x)\,\mathrm{e}^{4x}$
22. $\ln(3x)$	**23.** $\ln(\sin(4x))$	**24.** $\ln(\ln(x))$
25. $\log(2x)$	**26.** $\sqrt[3]{3x^2-2x-1}$	**27.** $\sqrt{x+\tan(x)}$
28. $\sqrt{\cos(3x)}$	**29.** $\frac{3+2x}{\sqrt{1+x}}$	**30.** $\sqrt{\frac{x^2+9}{x+3}}$
31. $\arctan(2-x)$	**32.** $\sin^2(x)+\cos^2(x)$	**33.** $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$
34. $\sqrt{x^2+\sqrt{1+x}}$	**35.** $\sqrt[3]{\cos^2(x)+3+\sin^2(x)}$	**36.** $\arcsin(2x)$
37. x^{2e}	**38.** 10^x	**39.** x^x

3.6. Quatre théorèmes relatifs aux fonctions dérivables

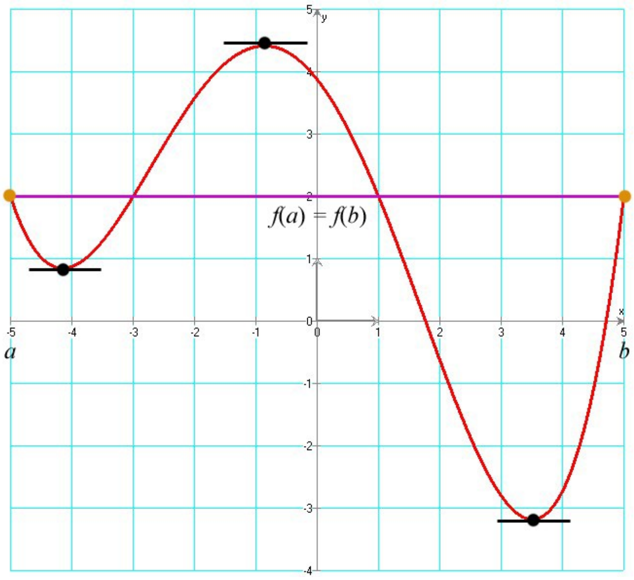
Théorème de Rolle

Michel **Rolle** (1652-1719) est un mathématicien français.

Soit f : $[a\,;\,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

1. f est continue sur $[a\,;\,b]$
2. f est dérivable sur $]a\,;\,b[$
3. $f(a)=f(b)$.

Alors il existe une valeur c dans l'intervalle $]a\,;\,b[$ telle que $f'(c)=0$.



Démonstration

Puisque la fonction f est continue sur $[a\ ;\ b]$, elle admet une valeur maximale M et une valeur minimale m sur $[a\ ;\ b]$. Deux cas sont alors possibles :

a. $M = m$. Dans ce cas, f est constante et on a $f'(x) = 0$ pour tout x dans $]a\ ;\ b[$.

b. $M > m$. Dans ce cas, il existe un x tel que $f(x) = M$ ou $f(x) = m$, avec x dans $]a\ ;\ b[$. Pour fixer les idées, supposons que ce soit M : il existe donc une valeur c dans l'intervalle $]a\ ;\ b[$ telle que $f(c) = M$. Comme M est un maximum, alors $f'(c) = 0$.

❏

Théorème des accroissements finis

(aussi appelé théorème de la moyenne)

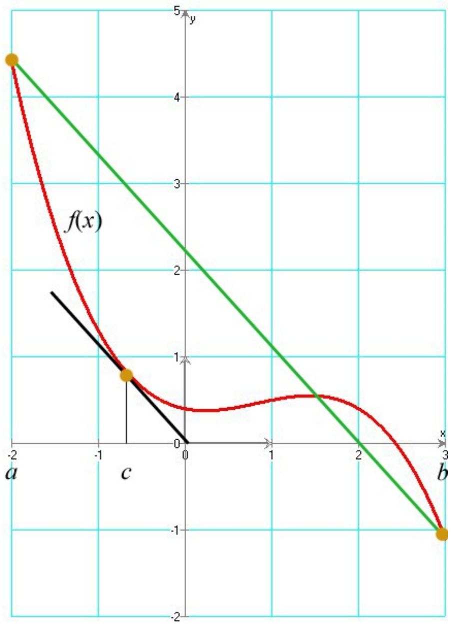
Soit $f : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ telle que :

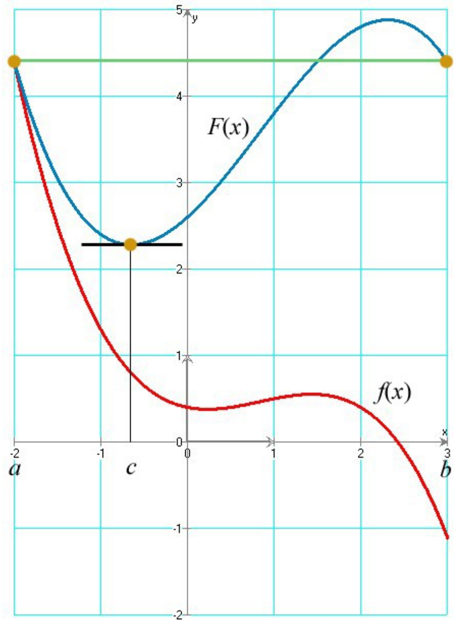
1. f est continue sur $[a\ ;\ b]$
2. f est dérivable sur $]a\ ;\ b[$.

Alors il existe au moins une valeur c dans l'intervalle $]a\ ;\ b[$ où : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

A gauche :
Illustration du théorème des accroissements finis

A droite :
La fonction auxiliaire $F(x)$





Voici une conséquence pratique du théorème des accroissements finis :
si une voiture relie Zurich à Bâle à une vitesse moyenne de 112 km/h, alors il y a un moment où la vitesse instantanée de la voiture (la vitesse lue au compteur) est exactement de 112 km/h.

Démonstration

On va utiliser le théorème de Rolle.

Définissons une fonction auxiliaire $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

La dérivée de cette fonction F est $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

F vérifie les trois hypothèses du théorème de Rolle. Donc il existe une valeur c dans l'intervalle $]a\,;\,b[$ telle que $F'(c) = 0$. Donc $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

❑

Théorème de Cauchy

Augustin Louis **Cauchy** (Paris, 21/8/1789 - Sceaux, 23/5/1857)

Ce théorème est aussi appelé « Théorème des accroissements finis généralisé ».

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, dérivables sur $]a\,;\,b[$. Supposons que $g(a) \neq g(b)$ et que g' ne s'annule pas sur $]a\,;\,b[$.

Alors il existe une valeur c dans l'intervalle $]a\,;\,b[$ telle que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Démonstration

La démonstration est analogue à celle du théorème des accroissements finis, en posant comme fonction auxiliaire : $F(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x)$.

La dérivée de cette fonction F est $F'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x) - [f(b) - f(a)]\, g'(x)$.

F vérifie les trois hypothèses du théorème de Rolle. Donc, il existe une valeur c dans l'intervalle $]a\,;\,b[$ telle que $F'(c) = 0$. Donc $[g(b) - g(a)]\, f'(x) = [f(b) - f(a)]\, g'(x)$, ce qui implique bien que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

❑

Règle de l'Hôpital

Guillaume François Antoine Marquis **de l'Hôpital** (Paris, ?/?/1661 - Paris, 2/2/1704)

Soient f et g deux fonctions telles que :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
2. il existe un voisinage V de a tel que f et g sont dérivables dans $V \setminus \{a\}$.
3. g' ne s'annule pas dans $V \setminus \{a\}$
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration

Choisissons $x \neq a$ arbitraire dans V. En appliquant le théorème de Cauchy, nous avons :

$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, où ξ est un nombre compris entre a et x.

Mais par la condition 1, on sait que $f(a) = g(a) = 0$. Par conséquent : $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Si $x \to a$, alors ξ tend aussi vers a, puisque ξ est compris entre x et a.

En outre, si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, $\lim\limits_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ existe et est égale à A.

Par conséquent, il est évident que : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,

et en définitive : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

❑

Remarque importante

La règle de l'Hôpital est aussi valable si $a = \pm\infty$, ou si $\lim f = \pm\infty$ et $\lim g = \pm\infty$.

Utilisation de la règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital permet de remplacer une limite par une autre qui *peut* être plus simple. Cette règle s'utilise en trois étapes :

Quand on écrit « 0 », cela veut dire « presque » 0 !

On peut au besoin réitérer ce processus plusieurs fois.

1. Vérifier que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une **forme indéterminée** ($\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$).
Si ce n'est pas le cas, **on ne peut pas** utiliser la règle de l'Hôpital.

2. Dériver $f(x)$ et $g(x)$ **séparément**.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples

Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

Solutions

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \sin(2x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, on a bien une forme indéterminée.

La règle de l'Hôpital peut s'appliquer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(2x)}{1}=2$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^2}$

La solution est $+\infty$.

Ici, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^2}$ n'est pas une forme indéterminée. On ne peut pas utiliser la règle de l'Hôpital.

Exercice 3.22

La règle de l'Hôpital ne s'applique pas au calcul des limites ci-dessous, bien que celles-ci existent. Expliquez pourquoi et calculez ces limites par une autre méthode.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x^2+1}$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Exercice 3.23

Calculez les limites suivantes, si elles existent, en utilisant la règle de l'Hôpital. N'oubliez pas de d'abord **contrôler si vous avez le droit d'utiliser cette règle !**

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-2x^4+x^3+2x^2-4x+2}{x^3-3x+2}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+\sin(x)}$ **d.** $\lim\limits_{x\to 1} \left((1-x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$

e. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$ **f.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ $(m \neq n)$

g. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{\cot^2(x)}$ **h.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)-\sin(bx)}{\sin(ax)+\sin(bx)}$ $(a \neq -b)$

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ $(x > 0)$ **j.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-2x^2+x}$

3.7. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition de la dérivée en tant que limite	❏ ok
Comprendre l'interprétation géométrique de la dérivée	❏ ok
Connaître les dérivées des fonctions usuelles	❏ ok
Connaître les six règles de dérivation par cœur	❏ ok
Pouvoir dériver n'importe quelle fonction	❏ ok
Connaître le théorème de l'Hôpital et savoir l'appliquer	❏ ok