DÉRIVÉES

I Rappels

Définition

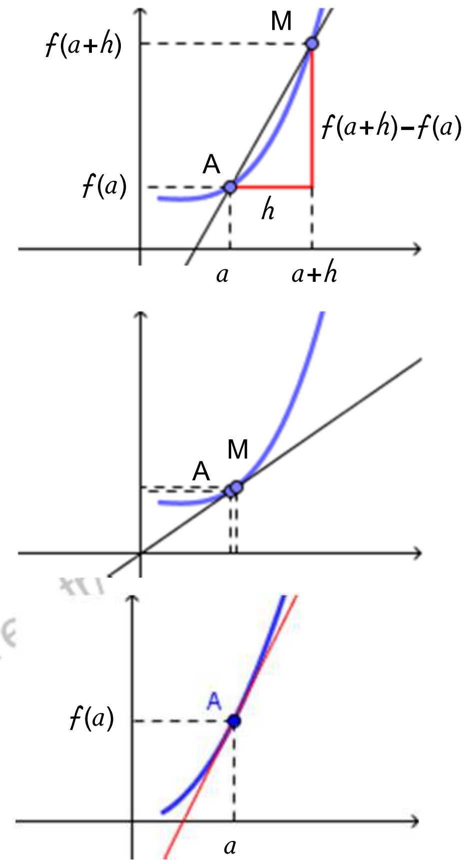
(voir animation)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in$ I et soit h non nul tel que $a + h \in$ I.

- On appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ le nombre $\mathrm{T}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Si A est le point de la courbe de f d'abscisse a et M le point de la courbe de f d'abscisse $a + h$, T(h) est le coefficient directeur de la droite (AM).
- Si le taux d'accroissement T(h) de f entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.
  On dira alors que f est dérivable en a.

  On pourra écrire $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \mathrm{T}(h)$

  c'est-à-dire $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Définition - Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in$ I .
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
La droite T passant par A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à $(\mathscr{C})$ en A.
Cette tangente T a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

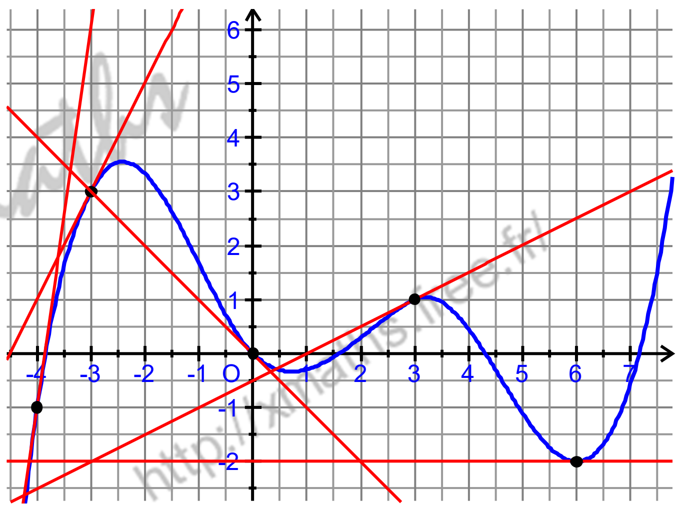
Cas particulier

Si $f'(a) = 0$, T est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 01 (voir **réponses et correction**)

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f et quelques-unes de ses tangentes.
Donner en utilisant ce graphique les valeurs de :

$f(-4)$	$f'(-4)$
$f(-3)$	$f'(-3)$
$f(0)$	$f'(0)$
$f(3)$	$f'(3)$
$f(6)$	$f'(6)$



Définition

Si une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
L'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f.
La fonction dérivée de f est notée f'.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I $\Leftrightarrow$ f' est nulle sur I.
- f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ f' est positive ou nulle sur I.
- f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ f' est négative ou nulle sur I.

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel (une constante), les fonctions $u + v$; $u \times v$; ku sont dérivables sur I et on a :

$(u + v)' = u' + v'$; $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$; $(ku)' = k u'$

Si de plus v ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

Dérivées des fonctions usuelles

On donne ci-dessous les dérivées de fonctions rencontrées couramment.

Fonction	Dérivée	Ensemble
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Remarques

- Si f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' sera notée f'', on l'appelle dérivée seconde de f.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Sa courbe a, au point d'abscisse 0, une tangente qui est parallèle à l'axe Oy, c'est-à-dire une droite n'ayant pas de coefficient directeur.

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, donner l'expression de sa dérivée :

1°) $f(x) = -7x^2 + 5\sqrt{x}$ 2°) $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$ 3°) $f(x) = \frac{2}{x^2 + x}$

4°) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 3}$ 5°) $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + 3}$ 6°) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^2$. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de f.
Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

II Compléments

Exercice 04 (voir **réponses et correction**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
1°) Justifier que f est définie sur IR.
2°) a) Démontrer que pour tout $h \neq 0$ on a : $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 + h}{\sqrt{2 + 2h + h^2} + \sqrt{2}}$

b) Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$. Que peut-on en déduire pour f ?
3°) Soit $a \in$ IR. Montrer que f est dérivable en a et déterminer $f'(a)$.
4°) Justifier que f est dérivable sur IR et déterminer sa fonction dérivée f'.

Propriété (voir démonstration 01)

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

On pourra retenir la formule $\left(\sqrt{u}\,\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Remarques

- En utilisant la propriété ci-dessus, on peut retrouver la dérivée de la fonction f de l'exercice 4.
  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; en prenant $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et donc $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- En remplaçant dans la formule $u(x)$ par x, on retrouve que la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 05 (voir **réponses et correction**)

Pour chacune des fonctions, déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer sa dérivée.
$f(x) = \sqrt{3x - 2}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$; $f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$

Exercice 06 (voir **réponses et correction**)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$
1°) Déterminer sa fonction dérivée f' et vérifier que $f'(x) = 2(2x + 1)(x^2 + x + 1)$ pour tout $x \in$ IR.
2°) a) Le logiciel GeoGebra est capable d'effectuer du calcul formel. En utilisant ce logiciel :
Définir la fonction f, en écrivant dans le champ de saisie : `f(x) = (x^2 + x + 1)^2`
Définir la fonction dérivée f' en écrivant dans le champ de saisie `f'(x)`
Factoriser cette dérivée f' en écrivant dans le champ de saisie : `Factoriser(f')`
Vérifier dans la fenêtre d'Algèbre les résultats obtenus.
b) Remplacer l'expression de $f(x)$ par : `f(x) = (x^2 + x + 1)^3`
Noter le résultat obtenu pour la forme factorisée de f'.
c) En utilisant GeoGebra compléter le tableau suivant :

$n = 2$	$f(x) = (x^2 + x + 1)^2$	$f'(x) =$
$n = 3$	$f(x) = (x^2 + x + 1)^3$	$f'(x) =$
$n = 4$	$f(x) = (x^2 + x + 1)^4$	$f'(x) =$
$n = 5$	$f(x) = (x^2 + x + 1)^5$	$f'(x) =$

d) Conjecturer l'expression de la dérivée lorsque $f(x) = (x^2 + x + 1)^n$ avec n entier naturel non nul.

Exercice 07 (voir **réponses et correction**)

On considère la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$ où n est un entier naturel non nul.
Démontrer par récurrence que $f'_n(x) = n(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{n-1}$.
Le résultat reste-t-il vrai pour un entier strictement négatif.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

En utilisant GeoGebra comme dans l'exercice 06, déterminer la dérivée de la fonction f et donner sa forme factorisée dans les cas suivants :

$f(x) = (7x - 5)^{10}$; $f(x) = \sin^5 x$; $f(x) = \cos^4 x$; $f(x) = (x^3 - 5x - 1)^8$

Propriété (voir démonstration 02)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = [u(x)]^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

Si $n > 0$, la fonction f_n est dérivable sur I et sa dérivée est $f'_n(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

Si $n < 0$ et si de plus u ne s'annule pas sur I, f_n est dérivable sur I et sa dérivée est $f'_n(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

On pourra retenir la formule $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

Remarques

- En remplaçant $u(x)$ par x, on retrouve la dérivée de x^n.
- La formule est utilisable avec un entier n strictement négatif, mais dans ce cas la fonction u ne doit pas s'annuler.

Exercice 09 (voir réponses et correction)

Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = (x^2 - x)^6$; $f(x) = \left(\dfrac{3x + 1}{2}\right)^3$; $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^5$; $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^3$; $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 + 1)^7}$

Propriété (voir démonstration 03)

Soient a et b deux réels.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si J est l'intervalle formé de tous les réels x tels que $ax + b$ appartienne à I, alors la fonction g définie sur J par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par $g'(x) = a \times f'(ax + b)$.

On pourra retenir la formule $[f(ax + b)]' = a \times f'(ax + b)$

Remarques

- Dans le cas de la fonction racine carrée et des fonctions puissances, cette propriété est un cas particulier des propriétés déjà vues en prenant $u(x) = ax + b$.
- La propriété a déjà été énoncée (sans être démontrée) pour les fonctions sinus et cosinus.

Exemple

Considérons une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soit g définie sur $]-2 ; +\infty[$ par $g(x) = f(2x + 4)$

g est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ et sa dérivée est donnée par $g'(x) = 2 \times f'(2x + 4) = 2 \times \dfrac{1}{2x + 4} = \dfrac{1}{x + 2}$

Exercice 10 (voir réponses et correction)

1°) Considérons une fonction f, définie et dérivable sur IR, telle que $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Calculer la dérivée de la fonction g définie sur IR par $g(x) = f(2x + 3)$.

2°) En utilisant GeoGebra :

a) Définir une fonction f en écrivant dans le champ de saisie : `f(x) = atan(x)`
Donner sa dérivée en écrivant dans le champ de saisie : `f'(x)`
Vérifer que cette dérivée correspond à celle donnée dans la question précédente.

b) Définir la fonction g par `g(x) = f(2x + 3)` et déterminer l'expression de `g'(x)`
Le résultat correspond-il au résultat donné dans la première question ?

Remarque

Les différentes formules vues laissent penser que si g est une fonction définie par $g(x) = f(u(x))$, alors sa dérivée est donnée par $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$.