Dérivation : Résumé de cours et méthodes

1 Nombre dérivé - Fonction dérivée :

DÉFINITION

- Etant donné f est une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a, f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est égale à un réel que l'on appelle alors nombre dérivé de f en a et que l'on note $f'(a)$.
- Si f est dérivable pour tous les éléments de I, on dit que f est dérivable sur I et on appelle dérivée de f la fonction, notée f', qui à tout a de I associe $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Pour tout a , $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$. f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est définie par $f'(x) = 2x$.

2 Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	**Fonction dérivée**	**pour tout x de**	**Exemples**
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax+b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x-4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^n \quad (n\,\text{entier} \geqslant 2)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n\,\text{entier} \geqslant 2)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$	

3 Etude forme par forme des opérations sur les fonctions dérivables :

Avertissement : Nous utiliserons par souci de simplification le traditionnel et affreux abus de langage qui consiste par exemple à dire que la dérivée de x^2 est égale à $2x$ (alors que nous devrions dire en fait que la dérivée de la fonction qui à x associe x^2 est la fonction qui à x associe $2x$).
Il ne faut jamais oublier que l'on ne doit pas confondre une **fonction** f avec $f(x)$ (l'image de x par f qui est un **réel**) et que la dérivée f' est elle-même une **fonction** qui à tout x associe $f'(x)$ (le nombre dérivé de f en x, qui est un **réel**).
Toujours par souci de simplification, nous ne nous préciserons pas dans les exemples les intervalles où les fonctions sont dérivables afin de nous concentrer sur l'utilisation des formules.

3-1 Forme $f+g$

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2+x$ est définie par :
$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^3+4x$ est définie par :
$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} + \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x}$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ est définie par :
$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} + \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}$$

3-2 Forme kf (k réel)

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si k est un réel alors la fonction kf est aussi dérivable sur I et $(kf)' = kf'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$ est définie par :
$f'(x) = 3 \times \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} = 6x$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -5x^3$ est définie par :
$f'(x) = -5 \times \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} = -15x^2$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x}$ est définie par :
$$f'(x) = 2 \times \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} = -\frac{2}{x^2}$$

3-3 Forme fg

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction fg est aussi dérivable sur I et $(fg)' = f'g+fg'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{x}$ est définie par :
$$f'(x)=\underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}\times\sqrt{x}+x\times\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2(3+\sqrt{x})$ est définie par :
$$f'(x)=\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2}\times(3+\sqrt{x})+x^2\times\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } 3+\sqrt{x}}$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2\times\sin x$ est définie par :
$$f'(x)=\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2}\times\sin x+x^2\times\underbrace{\cos x}_{\text{dérivée de } \sin x}$$

3-4 Forme f^2

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f^2 est aussi dérivable sur I et $\left(f^2\right)'=2f'f$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=(3x+1)^2$ est définie par :
$$f'(x)=2\times\underbrace{3}_{\text{dérivée de } 3x+1}\times(3x+1)=6(3x+1)$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\left(x^3+4x\right)^2$ est définie par :
$$f'(x)=2\times\underbrace{(3x^2+4)}_{\text{dérivée de } x^3+4x}\times(x^3+4x)$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=(\cos x)^2$ est définie par :
$$f'(x)=2\times\underbrace{(-\sin x)}_{\text{dérivée de } \cos x}\times(\cos x)=-2\times\sin x\times\cos x$$

3-5 Forme $\frac{1}{f}$

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I (où $f(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est aussi dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=-\dfrac{f'}{f^2}$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{5x-1}$ est définie par :
$$f'(x)=-\frac{\overbrace{5}^{\text{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$ est définie par :
$$f'(x)=-\frac{\overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2+3}}{(x^2+3)^2}$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ est définie par :
$$f'(x)=-\frac{\overbrace{\cos x}^{\text{dérivée de } \sin x}}{(\sin x)^2}$$

3-6 Forme $\frac{f}{g}$

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I (où $g(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{7x}{2x+3}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(7)}^{\text{dérivée de } 7x} \times (2x+3) - (7x) \times \overbrace{(2)}^{\text{dérivée de } 2x+3}}{(2x+3)^2} = \frac{14x + 21 - 14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} \times (3x+1) - (x^2) \times \overbrace{(3)}^{\text{dérivée de } 3x+1}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

3-7 Forme $f(ax+b)$ (a et b réels)

PROPRIÉTÉ

Soit f définie sur un intervalle I, a et b deux réels et J un intervalle tel que, pour tout x de J, $ax+b \in I$. Si f est dérivable sur I alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (4x+5)^3$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x+5} \times \underbrace{3(4x+5)^2}_{\text{on dérive comme } x^3 \text{ mais avec } 4x+5} = 12(4x+5)^2$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{3}_{\text{dérivée de } 3x+1} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}}_{\text{on dérive comme } \sqrt{x} \text{ mais avec } 3x+1} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sin(-2x)$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{-2}_{\text{dérivée de } -2x} \times \underbrace{\cos(-2x)}_{\text{on dérive comme } \sin x \text{ mais avec } -2x} = -2\cos(-2x)$$

4 Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	**Fonction dérivée**
$f+g$	$f'+g'$
$kf \quad (k \in \mathbb{R})$	kf'
fg	$f'g+fg'$
f^2	$2f'f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
$x \longmapsto f(ax+b)$ (a et b réels)	$x \longmapsto a \times f'(ax+b)$

5 Exemples de dérivation nécessitant l'utilisation de plusieurs formes :

La première chose à faire avant de dériver une fonction est de déterminer sa structure (somme, produit, quotient ...) afin de déterminer quelles sont les formes à utiliser.

Exemples :

1) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3+5x^2+7x-5$:
La fonction se présente d'abord comme une somme de termes, on utilise donc la forme $f+g$ (de dérivée $f'+g'$) et pour dériver $2x^3$ et $5x^2$ on utilise la forme kf. Ce qui donne :
$f'(x) = 2 \times \underbrace{(3x^2)}_{\text{dérivée de } x^3} + 5 \times \underbrace{(2x)}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{(7)}_{\text{dérivée de } 7x-5} = 6x^2+10x+7$

2) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (8x^2+5)\sqrt{x}$:
La fonction se présente sous la forme d'un produit, on utilise donc la forme fg (de dérivée $f'g+fg'$). La dérivée de $8x^2$ (forme kf) est égale à $8 \times$ (dérivée de x^2) $= 8 \times (2x) = 16x$. La dérivée de 5 est elle égale à 0. Donc la dérivée de $8x^2+5$ est égale à $16x$.
D'où le résultat final :
$f'(x) = \underbrace{16x}_{\text{dérivée de } 8x^2+5} \times \sqrt{x} + (8x^2+5) \times \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} = 16x\sqrt{x} + \dfrac{8x^2+5}{2\sqrt{x}}$

3) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{4-7x^2}$:
La fonction se présente sous la forme d'un inverse, on va donc utiliser la forme $\dfrac{1}{f}$ (de dérivée $-\dfrac{f'}{f^2}$). On aura donc besoin de la dérivée de $4-7x^2$:
La dérivée de $-7x^2$ (forme kf) est égale à $-7 \times$ (dérivée de x^2) $= -7 \times (2x) = -14x$. La dérivée de 4 étant nulle, la dérivée de $4-7x^2$ sera donc égale à $-14x$.
D'où le résultat final :
$f'(x) = -\dfrac{\overbrace{(-14x)}^{\text{dérivée de } 4-7x^2}}{(4-7x^2)^2} = \dfrac{14x}{(4-7x^2)^2}$

6 Calcul d'une équation de la tangente à une courbe en un point :

DÉFINITION

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a, alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $A(a, f(a))$ et dont le coefficient directeur est égal à $f'(a)$.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a, alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Exemples :

1) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 .
Une équation de T est : $y = f(2) + f'(2)(x-2)$
- on calcule d'abord $f(2)$: $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$.
- on dérive f : $f'(x) = 2x - 3$.
- on en déduit la valeur de $f'(2)$: $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$.
Une équation de T est donc : $y = -1 + 1 \times (x-2) \Leftrightarrow y = x - 3$

2) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ au point d'abscisse -1 .
Une équation de T est : $y = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1))$
- on calcule d'abord $f(-1)$: $f(-1) = \dfrac{2(-1)-1}{-1+3} = -\dfrac{3}{2}$.
- on dérive f : $f'(x) = \dfrac{2 \times (x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$.
- on en déduit la valeur de $f'(-1)$: $f'(-1) = \dfrac{7}{(-1+3)^2} = \dfrac{7}{4}$.
Une équation de T est donc : $y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{6}{4} + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}x$