Bastien Mallein
Bureau V2

TD 4 – Loi des grands nombres et Théorème de la limite centrale

9 mars 2015

Exercice 1 (Moyenne géométrique)**.** Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme et $X_n = \left(\prod_{j=1}^n U_j\right)^{1/n}$.

1. Montrer que X_n converge presque sûrement et donner sa limite.
2. Montrer que $[e.X_n]^{\sqrt{n}}$ converge, et déterminer la loi limite.

Solution. 1. On observe que $\log X_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log U_j$. Comme $-\log U_j$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, en appliquant la loi des grands nombres on a

$$\lim_{n\to+\infty} \log X_n = -1 \quad \text{p.s.}$$

Comme la fonction exponentielle est continue, sur l'évènement de probabilité 1 sur lequel $\log X_n$ converge vers -1, la suite (X_n) converge vers e^{-1}.

2. De la même façon, en appliquant le théorème de la limite centrale, on a

$$\log\,[e.X_n]^{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

La fonction exponentielle étant toujours continue, on en déduit par un argument différent que $[e.X_n]^{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale.

□

Exercice 2 (Somme de paires)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k X_{k+1}.$$

Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Solution. On observe que $S_n^p = \sum_{k=1}^n X_{2k}X_{2k+1}$ et $S_n^i = \sum_{k=1}^n X_{2k-1}X_{2k}$ sont deux sommes de variables aléatoires i.i.d. d'expérance $\mathbb{E}(X_1)^2$. On applique donc la loi des grands nombres, et en observant que

$$S_n = S_{n/2}^p + S_{n/2}^i,$$

on en conclut que $\lim_{n\to+\infty} S_n/n = \mathbb{E}(X_1)^2$. □

Exercice 3 (Une loi des grands nombres ?)**.** On rappelle qu'une loi de Cauchy a pour densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculer la loi de $\tan U$.

2. Que vaut $\mathbb{E}(\tan U)$?
3. Soit (X, X') une paire de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy. Déterminer la densité de la loi de $X + X'$.
4. Soit Y une variable aléatoire réelle dont la loi est $\frac{1}{2}e^{-|y|}dy$. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Y définie par
$$\Psi_Y \xi \mapsto \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y}\right].$$
5. Soit X, X' deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Cauchy et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calculer la densité de la loi de $\lambda X + \mu X'$, et celle de XX'.
6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de Cauchy. Calculer la limite (en loi), quand $n \to +\infty$, de
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Solution. 1. Par changement de variables, $\tan U$ est une loi de Cauchy.
2. Question piège : une loi de Cauchy n'a pas d'espérance, elle n'est pas dans L^1.
3. De pénibles calculs montrent que $X + X' \overset{(d)}{=} 2X$.
4. De simples calculs montrent que
$$\Psi_Y(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2},$$
par inversion L^1, on a donc
$$\Psi_X(\xi) = e^{-|\xi|}.$$
5. On observe que
$$\mathbb{E}(e^{i\xi(\lambda X + \mu X')}) = e^{-|\xi|(|\lambda|+|\mu|)},$$
donc $\lambda X + \mu X'$ est une loi de Cauchy multipliée par $|\lambda| + |\mu|$, dont la densité est $\frac{|\lambda|+|\mu|}{\pi(x^2+(|\lambda|+|mu|)^2}dx$. La densité de XX' s'obtient par des calculs directs : $\frac{2\log|x|}{\pi^2(x^2-1)}$.
6. On observe que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ est une loi de Cauchy, par conséquent, la suite converge en loi vers une loi de Cauchy.

□

Exercice 98 (Le chevalier de Méré)**.** Ange et Morgane jouent à pile ou face de la façon suivante : le premier à obtenir 5 victoires remporte 144 pistoles. Hélas, le caïman les interrompt alors que le score est de 3 à 2. Comment doivent-ils se partager l'argent ?

Même question si les 5 victoires doivent être consécutives, et que Morgane vient de gagner 2 fois d'affilée, après une victoire d'Ange.

Exercice 4 (Somme de variables aléatoires pas indépendantes)**.** Soit $(\lambda_n, n \geq 1)$ une suite strictement croissante d'entiers, U une variable aléatoire de loi uniforme, et $X_n = \cos(2\pi\lambda_n U)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Montrer que $\mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon) \leq C_\epsilon n^{-1}$ puis que $S_{n^2}/n^2 \to 0$ p.s.
2. Montrer que $\max_{n^2 \leq m < (n+1)^2} \left|\frac{S_m}{m} - \frac{S_{n^2}}{n^2}\right| \leq \frac{2(2n+1)}{n^2}$. En déduire que $S_n/n \to 0$ p.s.

Solution. La clé de cet exercice est d'observer que
$$\mathbb{E}(X_p X_q) = \delta_{p,q}$$

par conséquent, en utilisant l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{n^2\epsilon} \leq \frac{1}{n\epsilon}.$$

Borel-Cantelli garantit donc la convergence p.s. de la suite S_{n^2}/n^2.

On observe maintenant que

$$\frac{S_m}{m} - \frac{S_{n^2}}{n^2} = \frac{n^2 S_m - m S_{n^2}}{mn^2} = \frac{S_m - S_{n^2}}{n^2} + \frac{(n^2-m)S_m}{mn^2}.$$

En utilisant que les X_j sont des variables aléatoires à valeurs dans $[-1,1]$, on peut conclure.

En mettant en commun les question 1 et 2, on obtient bien la convergence presque sûre de la suite. $\square$

Exercice 5 (La formule de Stirling)**.** Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées de variance $\sigma^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

1. Soit f une fonction réelle continue telle que $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right].$$

2. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{P}(1)$, et on note $Z_n = \frac{n-S_n}{\sqrt{n}}$. En calculant $\mathbb{E}(Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n\geq 0\}})$, retrouver la formule de Stirling.

Solution. 1. Pour $K > 0$, on pose

$$\chi_K : x \mapsto \min(1, \max(0, K+1-|x|)).$$

On note que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \chi_K f(x)| \leq \epsilon,$$

par conséquent

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\chi_k\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| \leq \epsilon.$$

En appliquant le théorème central limite, on obtient aisément

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\chi_k\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\chi_K(X),\right].$$

On en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]\right| \leq 2\epsilon.$$

On fait alors tendre $\epsilon \to 0$ pour conclure.

2. On applique la question précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n\geq 0\}}) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X>0\}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

De plus, S_n suit une loi de Poisson de paramètre n, par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n \geq 0\}}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\ &= e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1/2}}{k!} - \frac{n^{k-1/2}}{(k-1)!} \\ &= e^{-n} \frac{n^{n+1/2}}{n!}.\end{aligned}$$

□

Exercice 6 (Une série de variables aléatoires)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, on note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

1. Soit $t \in [0, \pi]$. Montrer que $t - \sin t \geq t^3/\pi^2$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin(kt) \leq |\sin(kt)| \leq k \sin t$. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \sin x \geq \frac{x^3}{(x+\pi)^2}$.
2. Soit ϕ la fonction caractéristique d'une v.a. Y. Montrer que
$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \mathbb{P}\left(|Y| \geq \epsilon\right) \leq \frac{(1 + \pi/(\delta\epsilon))^2}{\delta} \int_0^\delta \left(1 - \mathrm{Re}(\phi(t))\right) dt.$$
3. On suppose que (S_n) converge en loi. En déduire que (S_n) est une suite de Cauchy en probabilité, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{m\geq 0} \mathbb{P}\left(|S_{n+m} - S_n| \geq \epsilon\right) = 0$.
4. En conclure
$$(S_n) \text{ converge en loi} \iff (S_n) \text{ converge en probabilité.}$$

Exercice 7 (Billet perdu)**.** Cent passagers s'installent dans un avion, les uns après les autres. Le premier arrivant a perdu son billet, et s'assoit à un siège aléatoire. Ensuite, chaque passager suivant s'assoit à son siège si celui-ci est disponible. S'il est occupé, il choisit un siège au hasard à la place. Quel est la probabilité que le dernier passager à embarquer soit assis à la bonne place ?

Solution. On observe que le dernier passager s'assied soit à son propre siège, soit au siège du premier passager. Les deux évènements ont exactement la même probabilité, puisque les deux sièges sont échangeables pour tout le reste de la dynamique. En conclusion, cette probabilité est $1/2$. □

Exercice 8 (Un nombre impair de piles)**.** Combien de fois faut-il, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face ?

Solution. Supposons que x soit la réponse. On considère les premiers lancers de pièces. Si on a F ou PP, le jeu recommence avec la même probabilité, alors que si on a PF, le jeu s'arrête. On a alors

$$x = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{2}{4},$$

résolution en $x = 6$. □