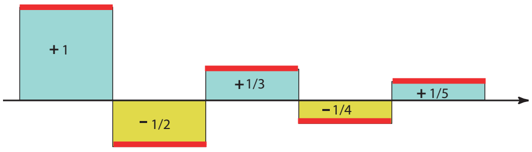
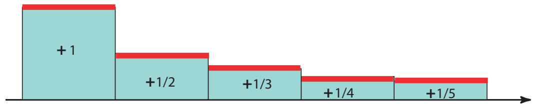
Chapitre 5 – Transformée de Laplace

1 Intégrales généralisées

i) Soient f, définie sur un intervalle du type $]m, +\infty[$. Si $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt$ existe, on dit que *l'intégrale converge*, et on écrit : $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt}$

Il se peut que l'intégrale converge grâce au *signe* de f :

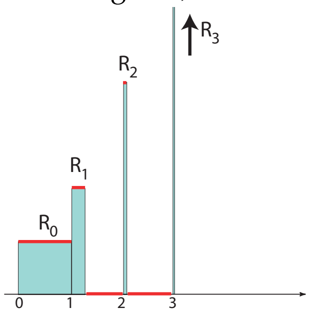




ii) On dit que l'intégrale est *absolument convergente* si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Théorème : Si l'intégrale est absolument convergente, elle est convergente.

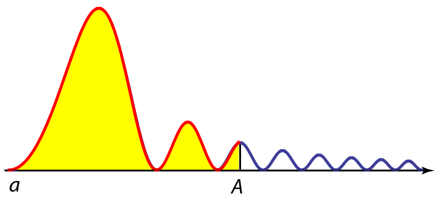
Remarque : Le fait que l'intégrale soit convergente, ou absolument convergente, n'implique pas que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.



Dimensions de R_n : $\left(\dfrac{1}{4^n}, 2^n\right)$

Aire de R_n : $\dfrac{1}{4^n} \times 2^n = \dfrac{1}{2^n}$

iii) Dans le cas où $f(t) \geqslant 0$ quand $t \geqslant a$, l'intégrale $\int_a^A f(t)dt$ est une fonction croissante de A.



Théorème : L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si il existe un nombre M tel que $\int_a^A f(t)dt \leqslant M$ quel que soit A, et alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant M$.

Théorème de comparaison : Soient f et g sont deux fonctions telles que $f(t) \leqslant g(t)$ quand $t \geqslant a$.

- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$.
- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et : $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)dt$.

2 Transformation de Laplace

i) Si f est une fonction à valeurs réelles, ou complexes, d'une variable réelle, sa *transformée de Laplace* est la fonction ϕ donnée par l'*intégrale de Laplace* (p est une variable complexe) :

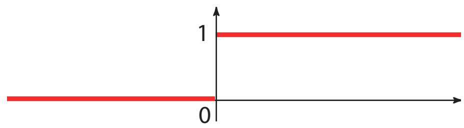
$$\boxed{\phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t} dt}$$

On écrit $\phi = \mathcal{L}(f)$, ou $f \sqsupset \phi$, ou $\phi \sqsubset f$. On dit que f est l'*original* de ϕ et que ϕ est l'*image* de f.
La *transformation de Laplace* consiste à passer de f à ϕ.

ii) On remarque que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t} dt$ ne prend en compte que les valeurs de $f(t)$ pour $t > 0$. La transformée de Laplace est donc concernée par les *phénomènes transitoires* : avant une certaine date, il n'y a rien, et après, il y a quelque chose ... En prenant cet instant comme origine du temps, on peut supposer que f est une fonction définie de $-\infty$ à $+\infty$ telle que $f(t) = 0$ quand $t < 0$. On dit alors que f est une *fonction causale*.

Exemple : La fonction de *Heaviside* (fonction *échelon-unité*).

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{quand } t < 0 \\ 1 & \text{quand } t > 0 \end{cases}$$



Si F est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $f = FH$ est causale et $f(t) = F(t)$ quand $t > 0$.

iii) On se pose immédiatement les questions suivantes :

Q1 : Quelles fonctions ont une transformée de Laplace ?

Q2 : À quoi reconnaître une transformée de Laplace ?

Q3 : Comment retrouver f à partir de ϕ ? Unicité ?

Q4 : Comment se correspondent les propriétés de f et de ϕ ?

On ne répondra pas de façon générale à Q1, Q2, Q3 ...

Pour Q1 et Q3, on décrira un ensemble de fonction f dont on connaît les transformées ϕ et pour lesquelles on sait faire le passage de ϕ à f, pour Q2, on donnera des propriétés satisfaites par les transformées de Laplace ; par contre, on sera plus long pour Q4.

Convention : Dans tout ce qui suit, f est une fonction de classe C^0 par morceaux sur $\mathbb{R}$ *(nombre fini de discontinuité sur tout intervalle de longueur finie et limite à gauche et à droite aux discontinuités)*.

iv) On dit que f est à *croissance exponentielle* quand il existe des nombres réels C, M, a tels que :

$$|f(t)| \leqslant Ce^{M\,t} \quad \text{quel que soit} \quad x \geqslant a$$

Le prochain théorème montre que les fonctions de classe C^0 par morceaux, à croissance exponentielle, ont une transformée de Laplace.

Théorème : Si f vérifie les conditions ci-dessus, l'intégrale de Laplace est absolument convergente quand $\mathrm{Re}(p) > M$. En particulier, si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ existe, l'intégrale $\phi(p)$ existe pour tout $p > 0$.

Démonstration : On doit montrer que $\displaystyle\int_0^{A} |f(t)\, e^{-p\,t}| dt$ a une limite quand A tend vers $+\infty$.

- $\displaystyle\int_0^A |f(t)\,e^{-p\,t}|dt = \int_0^a |f(t)|\,|e^{-p\,t}|dt + \int_a^A |f(t)|\,|e^{-p\,t}|dt$
- $p = u + i\,v \quad \Rightarrow \quad |e^{-p\,t}| = |e^{-u\,t}e^{-i\,v\,t}| = |e^{-u\,t}|\,|e^{-i\,v\,t}| = e^{-u\,t}$

Alors : $\displaystyle\int_a^A |f(t)\,e^{-p\,t}|dt = \int_a^A |f(t)|\,e^{-u\,t}dt \leqslant \int_a^A C\,e^{(M-u)\,t}dt = C\left[\frac{e^{(M-u)}}{M-u}\right]_a^A$

$$= C\left(\frac{e^{(M-u)A} - e^{(M-u)a}}{M-u}\right) = \left(\frac{C}{M-u}\right)e^{(M-u)A} - \left(\frac{C\,e^{(M-u)a}}{M-u}\right)$$

- $M - u < 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{(M-u)A} = 0$ et le théorème de comparaison montre alors que $\displaystyle\int_a^A |f(t)|\,e^{-u\,t}dt$ converge quand $u > M$.

v) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Théorème : Si l'intégrale de Laplace converge quand $p = p_1$, alors elle converge quel que soit p avec $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(p_1)$.

Conséquence : 3 possibilités :

- Il existe un nombre réel θ tel que l'intégrale de Laplace converge quand $\mathrm{Re}(p) > \theta$ et diverge quand $\mathrm{Re}(p) < \theta$. Le nombre θ s'appelle l'*abscisse de convergence* de f.
- L'intégrale de Laplace converge quel que soit p. L'abscisse de convergence $\theta = -\infty$.
- L'intégrale de Laplace diverge quel que soit p. L'abscisse de convergence $\theta = +\infty$.

L'ensemble des p tels que $\mathrm{Re}(p) > \theta$ s'appelle le *demi-plan de convergence*.

vi) Les transformées de Laplace possèdent deux propriétés remarquables.

Théorème de la valeur initiale $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,\phi(p)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \phi(p) = 0}$

Théorème de la valeur finale : Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe : $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} p\,\phi(p)}$

vii) Si l'on connaît $\phi(p)$ pour p parcourant une droite verticale Δ du demi-plan complexe, on peut « presque » retrouver f en calculant l'intégrale suivante qui donne la valeur de $f(t)$ là où f est continue :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\,i}\int_\Delta \phi(p)\,e^{p\,t}dp = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

Conséquence : Deux fonctions de classe C^0 par morceaux qui ont la même transformée de Laplace ne peuvent différer que sur leurs discontinuités ; si elles sont continues, elles sont égales.

3 Les exemples fondamentaux

Exemple 1 : Calcul de $\mathcal{L}(t^s)$ avec s réel positif quelconque.

$$\int_0^\infty t^s\,e^{-p\,t}dt \overset{t\to\frac{u}{p}}{=} \int_0^\infty \left(\frac{u}{p}\right)^s e^{-u}\frac{du}{p} = \frac{1}{p^{s+1}}\underbrace{\left(\int_0^\infty u^s\,e^{-u}du\right)}_{c_s} = \frac{c_s}{p^{s+1}}$$

$$c_0 = \int_0^{\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{\infty} = 1 \quad \text{et} \quad c_s = \int_0^{\infty} u^s e^{-u} du = [-u^s e^{-u}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s\, u^{s-1} e^{-u} du = s\, c_{s-1}$$

Donc $\boxed{c_0 = 1 \qquad c_s = s\, c_{s-1}}$. En particulier $\boxed{c_n = n\,!}$ quand $n \in \mathbb{N}$.

Euler a eu l'idée de poser $\boxed{s\,! = \int_0^{\infty} u^s\, e^{-u} du}$ pour s quelconque, réel ou complexe, avec $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$

et d'utiliser $(s-1)\,! = \dfrac{s\,!}{s}$ pour obtenir la factorielle des autres valeurs.

Finalement $\boxed{t^s \sqsupset \dfrac{s\,!}{p^{s+1}}}$ et $\boxed{H \sqsupset \dfrac{1}{p}}$.

Euler aussi a compris que la « *bonne* » fonction n'est pas $s\,!$ mais plutôt : $\boxed{\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1}\, e^{-u} du}$.

Exemple 2 : $\boxed{e^{a\,t} \sqsupset \dfrac{1}{p-a}}$ avec a complexe quelconque : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{a\,t}\, e^{-p\,t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)\,t}\, dt$

Exemple 3 : $\boxed{\cos\omega\, t \sqsupset \dfrac{p}{p^2+\omega^2}}$

$$\int_0^{\infty} \cos\omega\, t\, e^{-p\,t} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{+i\,\omega\,t} + e^{-i\,\omega\,t}}{2} e^{-p\,t} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{+i\,\omega\,t} e^{-p\,t} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-i\,\omega\,t} e^{-p\,t} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\,\omega} + \frac{1}{p+i\,\omega}\right)$$

Exemple 4 : $\boxed{\sin\omega\, t \sqsupset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}}$

$$\int_0^{\infty} \sin\omega\, t\, e^{-p\,t} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{+i\,\omega\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{2\,i} e^{-p\,t} dt = \frac{1}{2\,i}\int_0^{\infty} e^{+i\,\omega\,t} e^{-p\,t} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-i\,\omega\,t} e^{-p\,t} dt = \frac{1}{2\,i}\left(\frac{1}{p-i\,\omega} - \frac{1}{p+i\,\omega}\right)$$

4 Opérations sur les transformées de Laplace

i) Linéarité $\boxed{\mathcal{L}(a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p) = a_1\, \mathcal{L}(f_1) + \cdots + a_p \mathcal{L}(f_p)}$

$$\mathcal{L}(2 + 3t - 5t^2) = 2\mathcal{L}(H) + 3\mathcal{L}(t) - 5\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2} - \frac{10}{p^3}$$

ii) Et pour une infinité de fonctions ? $\displaystyle\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n\right) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(a_n f_n)$ ou $\displaystyle\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n\,!}{p^{n+1}}$

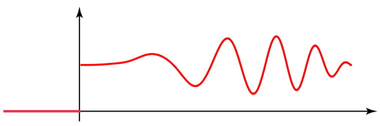
Non en général, mais oui dans certains cas !

Théorème : S'il existe une valeur de p pour laquelle la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n\,!}{p^{n+1}}$ converge, alors la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$ a un rayon de convergence infini et : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \sqsupset \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n\,!}{p^{n+1}}}$.

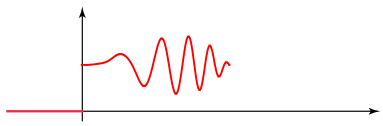
Exemple : $a_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad a_n\, n\,! = \dfrac{n\,!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n\,!}{p^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge quand $|x| < 1$, et sa somme est $-\ln(1-x)$. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n\,!}{p^{n+1}}$ converge quand $|p| > 1$ et sa somme est $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}$ converge $\forall t$, et, puisque sa somme est $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$, on a $\dfrac{e^t - 1}{t} \sqsupset -\ln\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$

iii) Si l'on change la vitesse de déroulement de l'événement représenté par f, comment change la transformée de Laplace ?



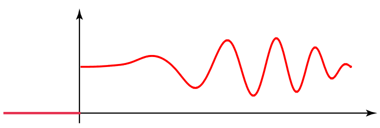
$f(t)$



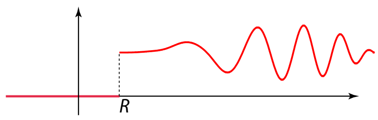
$g_v(t) = f(v\,t)$

$$\boxed{f(t) \sqsupset \phi(p) \quad \Rightarrow \quad f(v\,t) \sqsupset \frac{1}{v}\phi\left(\frac{p}{v}\right)} \qquad \phi_v(p) = \int_0^{\infty} f(v\,t)\, e^{-p\,t} dt \overset{t \to u/p}{=} \int_0^{\infty} f(u)\, e^{-\frac{p\,u}{v}} \frac{du}{v}$$

iv) Si l'on retarde l'arrivée de l'événement représenté par f, comment change $\mathcal{L}(f)$?



$f(t)$



$f_R(t) = f(t-R)$

$$\boxed{\mathcal{L}(f_R) = e^{-p\,R}\mathcal{L}(f)} \qquad \int_0^{\infty} f(t-R)\, e^{-p\,t} dt \overset{t \to (u+R)}{=} \int_{-R}^{\infty} f(u)\, e^{-p\,(u+R)} du = 0 + e^{-p\,R}\, \mathcal{L}(f)$$

La formule s'écrit aussi : $\boxed{f(t-R) \;\sqsupset\; e^{-R\,t}\phi(p)}$

iv) Multiplication par une exponentielle : $\boxed{e^{a\,t} f(t) \;\sqsupset\; \phi(p-a)}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{a\,t} f(t)\, e^{-p\,t} dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(p-a)t} dt$

v) **Théorème** : Si f est à croissance exponentielle, sa transformée de Laplace est dérivable et :

$$\boxed{t\, f(t) \;\sqsupset\; -\phi'(p)}$$

$$\phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t} dt \quad \Rightarrow \frac{\phi(p+h) - \phi(p)}{h} = \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-(p+h)\,t} - e^{-p\,t}}{h} dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\left(\frac{e^{-h\,t} - 1}{h}\right) dt$$

Après quoi on montre que la limite de l'intégrale : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\left(\frac{e^{-h\,t} - 1}{h}\right)$ est égale à l'intégrale de la limite $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\left(\lim_{h \to 0} \frac{e^{-h\,t} - 1}{h}\right) dt = \int_0^{\infty} f(t)\,(-t) e^{-p\,t}$.

Par récurrence, on obtient que ϕ est infiniment dérivable et que : $\boxed{t^n\, f(t) \;\sqsupset\; (-1)^n\, \phi^{(n)}(p)}$.

Application : : Calcul de $\phi(p) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, e^{-p\,t} dt$

- $t\, f(t) \;\sqsupset\; -\phi'(p) \quad \Rightarrow \quad \phi'(p) = -\displaystyle\int_0^\infty t\left(\frac{\sin t}{t}\right) e^{-p\,t} dt$

$$= -\int_0^\infty \sin t\, e^{-p\,t} dt = \frac{-1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \phi(p) = C - \arctan p$$

- $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \phi(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi(p) = \arctan\frac{1}{p}$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, e^{-p\,t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan\frac{1}{p}} \qquad \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

vi) **Théorème** : Soit f une fonction dérivable, avec f et f' à croissance exponentielle :

$$\boxed{\mathcal{L}(f') = p\,\mathcal{L}(f) - f(0^+)}$$

et par récurrence, on a la formule suivante (*valable quand f est dérivable autant de fois qu'il faut !*)

$$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)}) = p^n\,\mathcal{L}(f) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)}$$

$$\int_0^A f'(t)\, e^{-p\,t} dt = \left[f(t)\, e^{-p\,t}\right]_0^A + p\int_0^A f(t)\, e^{-p\,t} dt$$

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-p\,t} dt = \lim_{A\to+\infty}\left(f(A)\, e^{-p\,A} - f(0) + p\int_0^A f(t)\, e^{-p\,t} dt\right) = -f(0) + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t} dt$$