Chapitre 1

La Transformée de Laplace

Ce chapitre présente une méthode très puissante et très utile pour analyser des circuits. La méthode est basée sur la transformée de Laplace, qu'on verra dans ce chapitre. Pourquoi a-t'on besoin d'une autre méthode pour analyser des circuits ?

1. On veut considérer le comportement transitoire de circuits ayant plusieurs noeuds, ce qui est très difficile à faire avec les équations différentielles.
2. On veut analyser la réponse transitoire de circuits dont la source est quelque chose de plus complexe qu'un échelon.
3. On peut utiliser la transformée de Laplace pour introduire le concept de fonction de transfert pour l'analyse de circuits ayant des sources sinusoïdales.
4. La transformée de Laplace permet de relier le comportement d'un circuit en fonction du temps à celui en fonction de la fréquence.

Dans ce chapitre, on présente la transformée de Laplace et certaines caractéristiques intéressantes.

1.1 Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction est donnée par l'expression suivante :

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.1}$$

où le symbole $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ veut dire *la transformée de Laplace de $f(t)$*.

On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace :

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} \tag{1.2}$$

Cette notation permet de mettre de l'emphase sur le fait que le résultat de la transformée de Laplace n'est pas fonction du temps t, mais plutôt fonction de s. L'opérateur s sera l'inverse du temps, donc une fréquence (puisque l'exponentiel dans l'équation 1.1 doit être sans dimension).

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la *transformée inverse de Laplace*. Le diagramme de la figure 1.1 illustre ce concept.

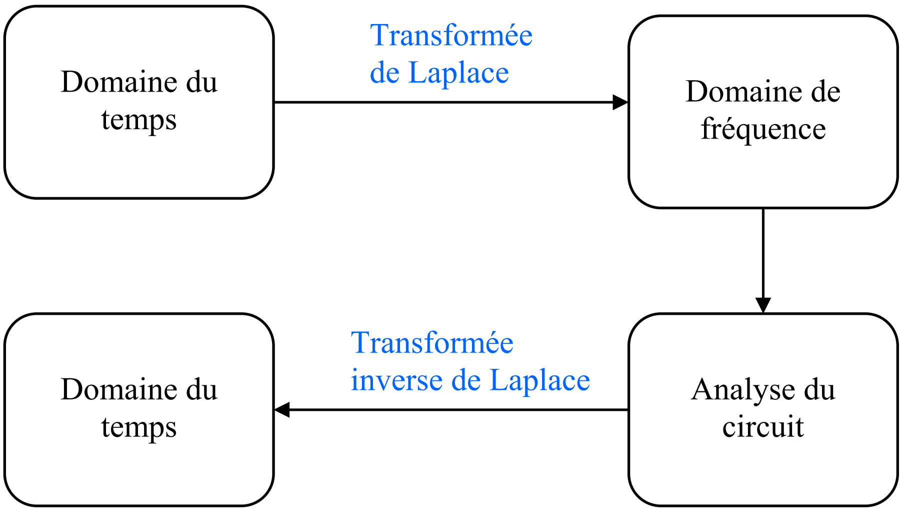


FIG. 1.1 – Étapes d'analyse d'un circuit avec la transformée de Laplace

L'avantage principal d'analyser des circuits de cette façon est que les calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

Avant d'illustrer certaines propriétés importantes de la transformée de Laplace, il faut faire quelques commentaires. Premièrement, noter que l'intégrale de l'équation 1.1 est impropre puisque la borne supérieure est infinie. Il faut donc se demander si l'intégrale converge. Dans le cas de l'analyse de circuits, on utilise toujours des fonctions où l'intégrale converge.

Deuxièmement, la borne inférieure de l'intégrale est 0. Ceci veut dire que $F(s)$ ne tient compte que du comportement de $f(t)$ pour des valeurs positives de t. On appelle ceci la transformée de Laplace unilatérale. Qu'arrive-t'il si la fonction $f(t)$ a une discontinuité à l'origine ? Est-ce qu'on utilise 0^-, 0^+ ou autre chose pour la borne ? En fait, on verra plus loin qu'on utilise la borne 0^- dans ces cas.

La transformée de Laplace unilatérale ignore les valeurs de $f(t)$ pour $t < 0$. Ce qui se passe avant ça est tenu compte à l'aide des *conditions initiales*.

On divise la transformée de Laplace en deux types :

1. **Transformée fonctionnelle** : c'est la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $\sin \omega t$, t, e^{-at}, etc.
2. **Transformée opérationnelle** : c'est une propriété mathématique de la transformée de Laplace, comme le calcul de la dérivée de $f(t)$.

Avant de commencer les transformées, il faut présenter deux fonctions importantes, la fonction échelon et la fonction impulsionnelle.

1.2 La fonction échelon

La fonction échelon est une fonction très utilisée. C'est la fonction où il y a une discontinuité à l'origine. Par exemple, lorsqu'on allume une source de tension DC, il y a un changement abrupte de la tension ; c'est une fonction échelon.

La figure 1.2 illustre la fonction échelon. Elle est 0 pour $t < 0$. On représente la fonction échelon par le symbole $u(t)$.

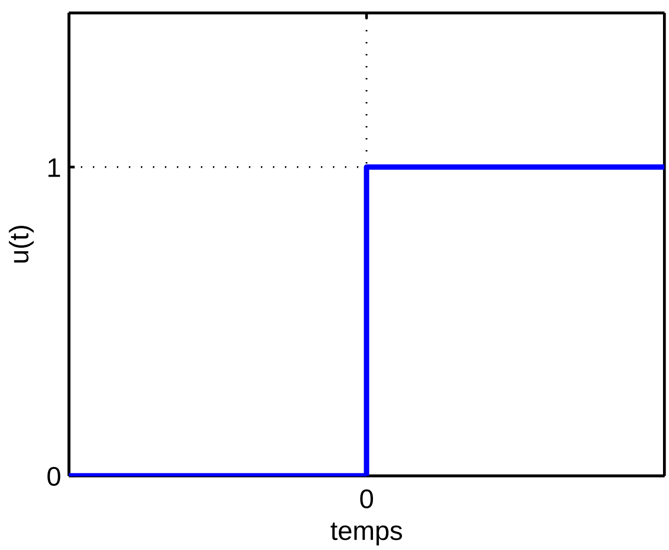


FIG. 1.2 – Fonction échelon

On peut multiplier la fonction échelon par une constante K quelconque pour obtenir un échelon d'amplitude voulue. La définition mathématique de la fonction échelon est :

$$Ku(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ K & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $K = 1$, on appelle ceci la **fonction échelon unitaire**.

La fonction échelon n'est pas définie à $t = 0$. Dans des situations où il est nécessaire de définir la transition entre 0^- et 0^+, on suppose qu'elle est linéaire, et que la valeur à $t = 0$ est $Ku(0) = 0.5K$.

Une discontinuité peut avoir lieu à un endroit autre que $t = 0$. Dans ce cas, pour un échelon qui se produit au temps $t = a$, on utilise la notation $Ku(t-a)$. Donc,

$$Ku(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ K & \text{si } t > a \end{cases} \tag{1.4}$$

Une application de la fonction échelon est qu'elle permet d'écrire mathématiquement l'expression d'une fonction qui est différente de 0 pour une période fixe. Une application très commune en génie électrique est un pulse de durée fixe, comme à la figure 1.3.

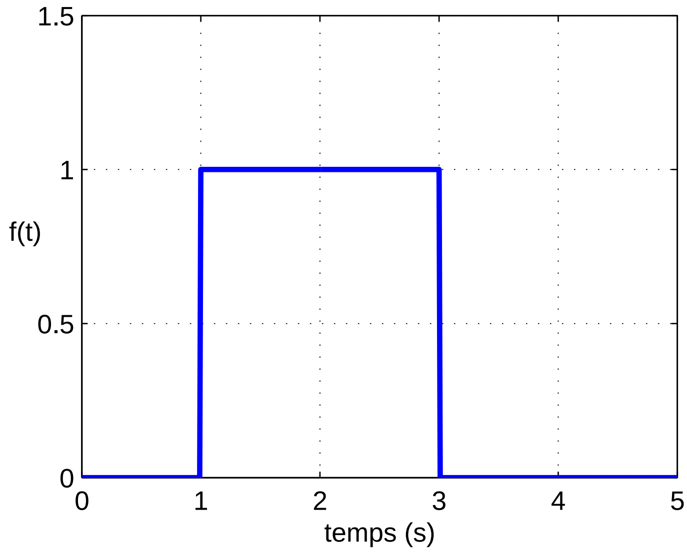


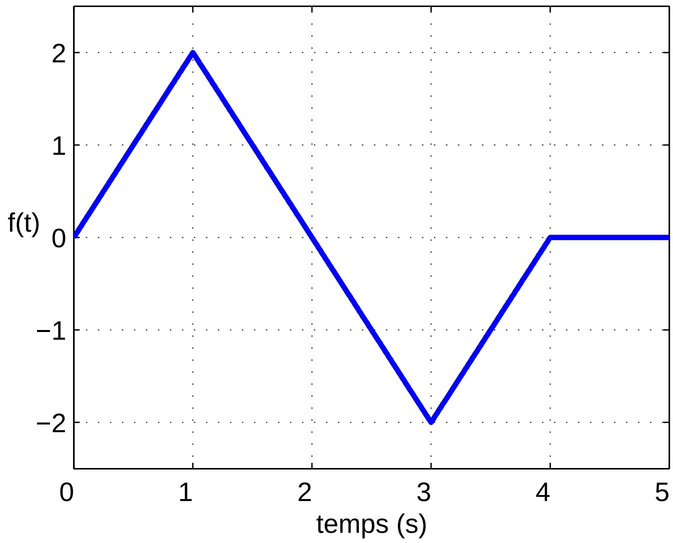
FIG. 1.3 – Pulse de durée fixe

Dans ce cas, on peut écrire la fonction comme $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$. On peut considérer ceci comme un échelon qu'on "allume" à $t = 1$ puis un deuxième échelon négatif à $t = 3$ qui permet "d'éteindre" le premier échelon.

EXEMPLE 1

Utiliser des fonctions échelon pour écrire une expression pour la fonction de la figure suivante.

On peut voir dans la figure que la fonction est constituée de 3 segments différents de 0,



ayant des points d'intersections à 0, 1, 3 et 4s. Pour construire l'expression voulue, il faut ajouter et soustraire des échelons aux endroits appropriés.

1. Pour $0 < t < 1$, on a la fonction $2t$.
2. À $t = 1$, on doit allumer la fonction $-2t + 4$ et l'éteindre à $t = 3$.
3. À $t = 3$, on doit allumer la fonction $2t - 8$ et l'éteindre à $t = 4$.

On obtient alors comme fonction :

$$\begin{aligned} f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] \\ &+ (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] \\ &+ (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)] \end{aligned}$$

1.3 La fonction impulsion

On rencontre assez souvent, lors de l'étude de circuits, des pulses qui ont des durées très courtes. Ces pulses peuvent se produire lors d'une opération de commutation, ou lorsque des circuits sont excités par des sources impulsionnelles. De plus, l'impulsion est un outil mathématique très utile, comme on verra plus tard. Il nous faut donc une façon pour représenter ce genre de signal.

Il existe plusieurs façons pour représenter une impulsion ; on utilisera ici l'approche d'un signal triangulaire, comme à la figure 1.4. Remarquer que le triangle est symétrique par rapport à l'origine, et que la valeur maximale est $1/\epsilon$. Pour obtenir une vraie impulsion, il faudra que $\epsilon \to 0$.

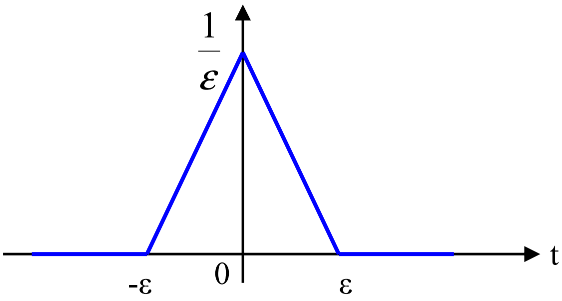


FIG. 1.4 – Impulsion représentée par un triangle

Qu'arrive-t'il alors à cette fonction triangulaire lorsque $\epsilon \to 0$? On retrouve trois caractéristique importantes :

1. L'amplitude approche l'infini.
2. La durée du pulse se rapproche de 0.
3. La surface du triangle est constante et égale à 1.

On utilise la notation $\delta(t)$ pour démontrer une impulsion. Mathématiquement, la fonction impulsion (qu'on appelle aussi fonction de **Dirac**) est défini par :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt & = 1 \\ \delta(t) & = 0 \qquad \text{si } t \neq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Si l'impulsion se produit à un temps $t = a$, on écrit $\delta(t - a)$.

Un propriété intéressante de la fonction impulsion est qu'elle permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \tag{1.6}$$

si $f(t)$ est continue au point $t = a$. En d'autres mots, l'impulsion élimine la fonction pour toutes les autres valeurs que celle où l'impulsion est présente.

On peut se servir de la propriété précédente pour trouver la transformée de Laplace de la fonction impulsion :

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{1.7}$$

Pour calculer la transformée de Laplace de la dérivée de $\delta(t)$, on utilise la définition en fonction triangulaire, qu'on dérive en premier (comme à la figure 1.5), puis on fait tendre $\epsilon \to 0$.

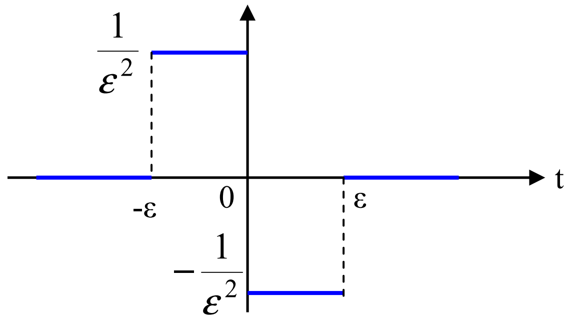


FIG. 1.5 – Dérivée de l'impulsion

On obtient alors, pour la transformée de Laplace de $\delta'(t)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{\delta'(t)\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0^-}\frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}dt + \int_{-\epsilon}^{0^-} -\frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{e^{s\epsilon}+e^{-s\epsilon}-2}{s\epsilon^2}\right] \\ &= s\end{aligned} \tag{1.8}$$

On peut faire le même travail pour trouver la transformée de Laplace de la dérivée $n$ième de $\delta(t)$, et on obtient :

$$\mathfrak{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n \tag{1.9}$$

Et finalement, la fonction impulsion peut être considérée comme la dérivée de la fonction échelon :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1.10}$$

1.4 Transformées fonctionnelles

Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans ce cours, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0^-$.

On prend en premier l'exemple de la fonction échelon :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned} \tag{1.11}$$

La transformée de Laplace d'un exponentiel décroissant est :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{e^{-at}\} &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a}\end{aligned} \tag{1.12}$$

Une autre fonction rencontrée souvent est un sinusoïde. Sa transformée de Laplace est :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{\sin\omega t\} &= \int_{0^-}^{\infty} (\sin\omega t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega t)}-e^{-(s+j\omega t)}}{2j}dt \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{1.13}$$

Le tableau 1.1 présente la liste des transformées de Laplace les plus courantes.

Fonction	$f(t)$	$F(s)$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynôme (général)	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tab. 1.1 – Transformées de Laplace communes.

1.5 Transformées opérationnelles

Les transformées opérationnelles indiquent comment des opérations effectuées sur $f(t)$ ou $F(s)$ sont faites dans l'autre domaine. Les opérations les plus importantes sont : multiplication par une constante, addition (soustraction), dérivé, intégrale, translation dans le domaine du temps, translation dans le domaine de fréquence, et changement d'échelle.

1.5.1 Multiplication par une constante

De la définition de la transformée de Laplace, si

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{1.14}$$

alors

$$\mathfrak{L}\{Kf(t)\} = KF(s) \tag{1.15}$$

La multiplication de $f(t)$ par une constante correspond à la multiplication de $F(s)$ par la même constante.

1.5.2 Addition (Soustraction)

L'addition (soustraction) dans le domaine du temps correspond à une addition (soustraction) dans le domaine de Laplace. Donc, si

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{f_1(t)\} &= F_1(s)\\ \mathfrak{L}\{f_2(t)\} &= F_2(s)\\ \mathfrak{L}\{f_3(t)\} &= F_3(s)\end{aligned}$$

alors

$$\mathfrak{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) \tag{1.16}$$

1.5.3 Dérivé

La dérivation dans le domaine du temps correspond à multiplier $F(s)$ par s et puis soustraire la valeur initiale de $f(t)$ (donc $f(0^-)$). On obtient :

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) \tag{1.17}$$

On obtient cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st} dt \tag{1.18}$$

Une intégration par partie est utilisée. Soit $u = e^{-st}$ et $dv = [df(t)/dt]dt$, on obtient :

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st} f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt \tag{1.19}$$

Le premier terme donne $f(0^-)$, puisque e^{-st} donne 1 pour l'évaluation à 0^- et 0 à l'infini. Le côté droit de la dernière équation devient donc :

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-) \tag{1.20}$$

On peut utiliser le même processus pour démontrer la transformée de Laplace pour des dérivées d'ordre supérieur. On obtient alors :

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - \ldots \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}} \tag{1.21}$$

1.5.4 Intégration

L'intégration dans le domaine du temps correspond à diviser par s dans le domaine de Laplace.

$$\mathfrak{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{1.22}$$

On peut démontrer cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace et une intégration par parties.

La transformée de Laplace permet de transformer les opérations de dérivation et intégration à de simples opérations algébriques. L'analyse de circuits est donc beaucoup plus simple.

1.5.5 Translation dans le domaine du temps

Si on utilise une fonction $f(t)u(t)$, on peut représenter cette fonction décalée dans le temps par $f(t-a)u(t-a)$. La translation dans le domaine du temps représente une multiplication par un exponentiel dans le domaine de Laplace.

$$\mathfrak{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s), \qquad a > 0 \tag{1.23}$$

1.5.6 Translation dans le domaine de Laplace

La translation dans le domaine de fréquence correspond à une multiplication par un exponentiel dans le domaine du temps.

$$\mathfrak{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a) \tag{1.24}$$

1.5.7 Changement d'échelle

Le changement d'échelle permet d'établir la relation entre $f(t)$ et $F(s)$ lorsque la variable de temps est multipliée par une constante positive :

$$\mathfrak{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0 \tag{1.25}$$

1.6 Application de la transformée de Laplace

On va maintenant utiliser la transformée de Laplace pour analyser des circuits électriques. Soit le circuit RLC de la figure 1.6. On suppose que l'énergie initiale du système est nulle. On veut trouver $v(t)$ pout $t \geq 0$.

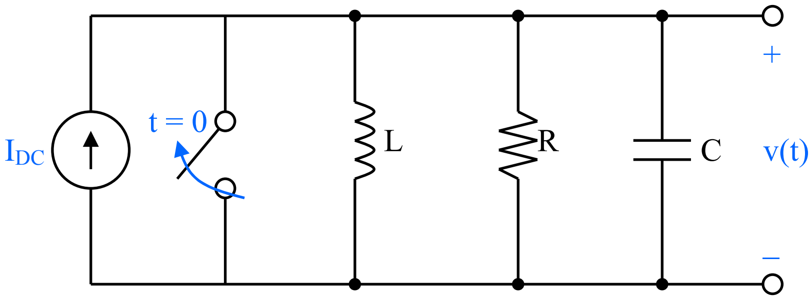


FIG. 1.6 – Circuit RLC

On peut écrire directement l'équation que la tension $v(t)$ doit satisfaire pour décrire le comportement du circuit si on fait la somme des courants au noeud supérieur :

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{DC}u(t) \tag{1.26}$$

Noter qu'on ajoute le terme $u(t)$ pour l'équation de I_{DC} pour indiquer l'effet de la commutation.

Maintenant il suffit d'appliquer les transformées opérationnelles à l'équation précédente pour les transformer dans le domaine de Laplace :

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C(sV(s) - v(0^-)) = I_{DC}\frac{1}{s} \tag{1.27}$$

ce qui est une équation algébrique en fonction de s. On peut enlever le terme $v(0^-)$ puisqu'on a dit que l'énergie initiale du système est 0. Si on isole $V(s)$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$V(s) = \frac{I_{DC}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \tag{1.28}$$

Pour déterminer $v(t)$, il faut faire la transformée inverse de l'expression de $V(s)$. On note cette opération de la façon suivante :

$$v(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{V(s)\right\} \tag{1.29}$$

La prochaine étape est de trouver la transformée inverse de l'expression de $V(s)$, ce qui est le but de la prochaine section. On verra aussi qu'il est important de vérifier l'expression obtenue en fonction du temps. Il est important pour un ingénieur de s'assurer que l'équation en fonction du temps obtenue fait du sens selon le circuit analysé.

1.7 Transformées inverses

L'expression de $V(s)$ obtenue dans la section précédente est une fonction **rationnelle** de s : c'est le rapport de deux polynômes de s. Pour des circuits linéaire comprenant des composantes discrètes R, L ou C constantes, l'expression de la tension ou du courant dans ces circuits sera toujours une fonction rationnelle de s. Si on peut inverser n'importe quelle fonction rationnelle de s, on peut résoudre les problèmes d'analyse de circuits.

De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{1.30}$$

Les coefficients a et b sont des constantes réelles, et les exposants m et n sont des entiers positifs. De façon générale, lorsqu'on analyse un circuit électrique, $m > n$. La technique utilisée pour résoudre ce genre d'équation est **l'expansion en fractions partielles**.

Il faut factoriser le dénominateur en une somme de termes et ensuite trouver la transformée inverse de chaque terme. Il y a trois différentes façon de faire, selon la valeur des racines : réelles et distinctes, réelles et répétées, ou complexes.

1.7.1 Racines réelles et distinctes.

Exemple :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

On peut écrire :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Pour isoler K_1, on multiplie chaque côté par $(s+1)$. On obtient :

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{(s+2)}$$

Si on prend $s = -1$,

$$K_1 = \left.\frac{2}{(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$

Pour trouver K_2, on fait le même processus, sauf qu'on multiplie par $(s+2)$ cette fois.

$$K_2 = \left.\frac{2}{(s+1)}\right|_{s=-2} = -2$$

Donc,

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

qui donne la transformée inverse suivante :

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

1.7.2 Racines au dénominateur réelles et répétées.

Soit

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

On peut trouver les termes selon

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

La constante K_1 peut être trouvée en utilisant la première méthode montrée plus haut (ce qui donne $K_1 = 2$). Pour trouver K_2, on multiplie par $(s+2)^2$:

$$\frac{2}{s+1} = \frac{K_1}{s+1}(s+2)^2 + K_2 + K_3(s+2) \tag{*}$$

On évalue à $s = -2$,

$$K_2 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=-2} = -2$$

Pour K_3, on dérive l'équation * par rapport à s,

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1 + K_3$$

De même, si $s = -2$,

$$K_3 = \left.\frac{-2}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = -2$$

1.7.3 Racines complexes au dénominateur.

Ici encore, on démontre à l'aide d'un exemple. Soit

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

On peut écrire

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Le coefficient K_1 est obtenu de la façon habituelle ; $K_1 = 0.6$. Pour K_2 et K_3, on multiplie les deux côtés par le dénominateur, $s(s^2+2s+5)$. On obtient :

$$\begin{aligned} 3 &= K_1(s^2+2s+5) + (K_2 s + K_3)s \\ &= (K_1+K_2)s^2 + (2K_1+K_3)s + 5K_1 \end{aligned}$$

On a donc trois équations,

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 0 \\ 2K_1 + K_3 &= 0 \\ 5K_1 &= 3 \end{aligned}$$

d'où on trouve que $K_2 = -0.6$ et $K_3 = -1.2$.

La fonction de transfert devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

La transformée inverse est

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57^\circ) \end{aligned}$$

Pour transformer la solution précédente avec un sinus et cosinus à une solution où il n'y a qu'un cosinus, on se sert de relations trigonométriques. Soit :

$$g(x) = a\cos x + b\sin x \tag{1.31}$$

On peut factoriser l'équation précédente de la façon suivante :

$$\sqrt{(a^2+b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sin x\right) \tag{1.32}$$

Les termes devant les cosinus et sinus forment les équations d'un triangle de coté a et b et d'hypoténuse $\sqrt{(a^2+b^2)}$. On définit :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad \text{et} \qquad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \tag{1.33}$$

On peut donc réduire l'équation 1.31 à :

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x) \tag{1.34}$$

Et à l'aide d'identités trigonométriques,

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos(x-\phi)) \tag{1.35}$$

où

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.36}$$

On peut aussi faire ce type de problème avec des nombres complexes :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2} \end{aligned}$$

On utilise la première technique pour résoudre, $K_1 = 0.6$. Les autre coefficients sont

$$K_2 = \left.\frac{3}{s(s+1-j2)}\right|_{s=-1-j2} = -0.15(2+j)$$

Et K_3 est le conjugué de K_2, $K_3 = -0.15(2-j)$. La fonction devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} + \frac{-0.15(2+j)}{s+1+j2} + \frac{-0.15(2-j)}{s+1-j2}$$

Dans le domaine du temps, la fonction est

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15\left[(2+j)e^{-(1+j2)t} + (2-j)e^{-(1-j2)t}\right] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}\left[(2+j)e^{-j2t} + (2-j)e^{j2t}\right] \end{aligned}$$

Avec la relation d'Euler,

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(-2t) + j\sin(-2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(2t) - j\sin(2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}(4\cos 2t + 2\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57°) \end{aligned}$$

C'est la même solution que celle obtenue plus haut.

1.7.4 Pôles, zéros et réponse

Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m s^n + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0} \tag{1.37}$$

ou

$$= \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)} \tag{1.38}$$

où $m \geq n$.

Les racines du polynôme au dénominateur sont appelés les *pôles* : ce sont les valeurs de s où la fonction devient infinie. Dans ce cas-ci, ce sont $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Les racine du polynôme au numérateur sont appelés les *zéros* : ce sont les valeurs de s où la fonction devient nulle. Dans ce cas-ci, ce sont $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

On peut représenter les pôles et zéros par un diagramme. Ce diagramme donne de l'information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d'analyser un système. L'axe des x représente la partie réelle du pôle ou du zéro, et l'axe y représente la partie imaginaire du pôle ou du zéro.

On démontre par un exemple. Soit la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{s+2}{s+5} \tag{1.39}$$

Le zéro est $z_1 = -2$ et le pôle est $p_1 = -5$. Le diagramme des pôles est donné dans la figure 1.7. Le zéro est représenté par un cercle ("o"), et le pôle par une croix ("×").

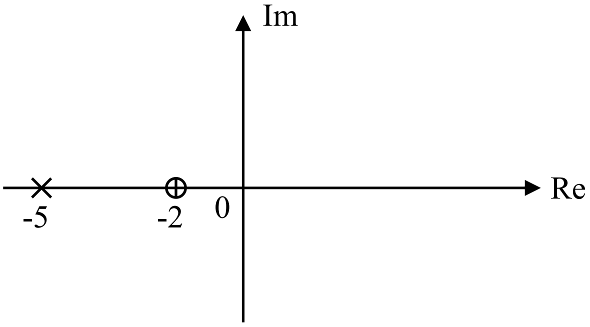


FIG. 1.7 – Diagramme de pôles et zéros.

1.8 Théorème de la valeur initiale et valeur finale

Les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont utiles parce qu'ils permettent de calculer $F(s)$ à partir de $f(t)$ à 0 ou ∞. On peut donc calculer les valeurs initiales et finales de $f(t)$ avant de faire la transformée inverse d'une fonction, pour s'assurer si le tout fait du sens.

Le théorème de valeur initiale est :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{1.40}$$

Il y a une seule restriction pour l'utilisation de ce théorème : $f(t)$ ne doit pas contenir d'impulsions.

Le théorème de la valeur finale est :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{1.41}$$

La restriction pour l'utilisation de ce théorème est que la partie réelle des pôles de $F(s)$ doit être négative.