TRAVAUX DIRIGES
DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

2ème Année

Certains résultats sont donnés à titre indicatif sous réserve d'erreurs de dactylographie

MAP L2, TD No1
Transformée de Laplace

Exercice 1

Calculer par intégration la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

a/ $e^{at}.\gamma(t)$ $\qquad \dfrac{1}{p-a}$

b/ $Cos(\omega t).\gamma(t)$ $\qquad \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

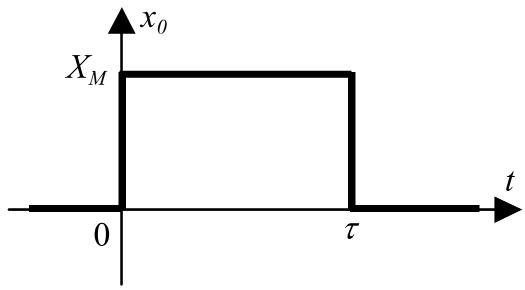
c/ $Sin(\omega t).\gamma(t)$ $\qquad \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

d/ $Sin^2(t).\gamma(t)$ $\qquad \dfrac{2}{p(p^2+4)}$

e/ $Cos^2(t).\gamma(t)$ $\qquad \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$

Exercice 2

a) Calculer la transformée de Laplace du signal suivant par calcul direct.

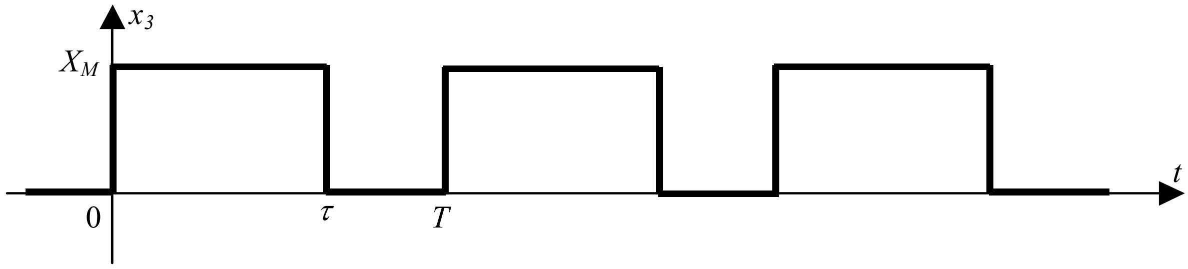


b) Calculer de nouveau la transformée de Laplace de ce signal par construction graphique.

$$X_O(p)=X_M.\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

Exercice 3

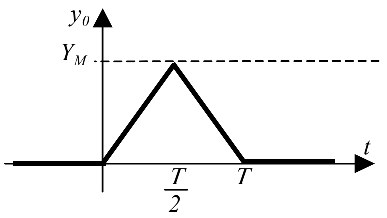
Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :

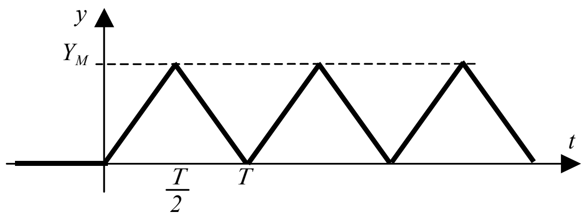


$$X_3(p)=\frac{X_M}{p}.\frac{1-e^{-p\tau}}{1-e^{-pT}}$$

Exercice 4

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $y_0(t)$ et du signal périodique $y(t)$.

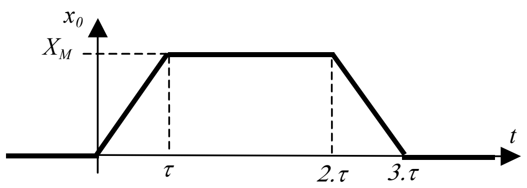


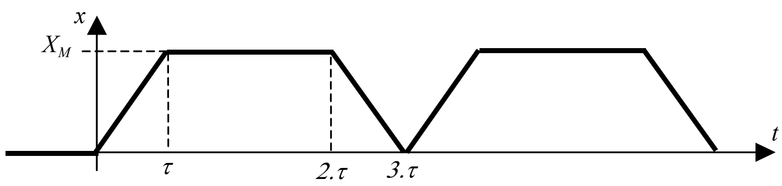


$$Y(p)=2.\frac{Y_M}{T}.\frac{1}{p^2}.th\left(p.\frac{T}{4}\right)$$

Exercice 5

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $x_0(t)$ et du signal périodique $x(t)$.

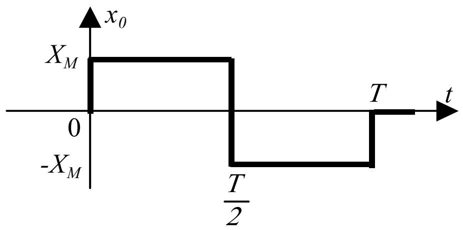


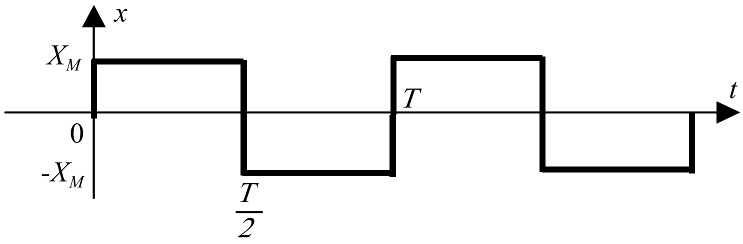


$$X_0(p)=\frac{X_M}{\tau}.\frac{1}{p^2}\left[e^{-\tau p}-1\right]\left[e^{-2\tau p}-1\right] \qquad X(p)=\frac{X_M}{\tau}.\frac{1}{p^2}.\frac{-e^{-2\tau p}+1}{e^{-2\tau p}+e^{-\tau p}+1}$$

Exercice 6

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $x_0(t)$ et du signal périodique $x(t)$.





$$X_0(p)=\frac{X_M}{P}.\left[1-e^{-p\frac{T}{\tau}}\right]^2 \qquad X(p)=\frac{X_M}{P}.tanh\left(p\frac{T}{4}\right)$$

Exercice 7

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace correspondant à une arche de sinusoïde $x_0(t)$ puis la transformée de Laplace d'une sinusoïde redressée $x(t)$.

$$X(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \frac{1+e^{-p\frac{T}{2}}}{1-e^{-p\frac{T}{2}}}$$

MAP L2, TD No2
Transformée inverse de Laplace
Application à la résolution des équations différentielles

Calculer les transformées de Laplace inverse des fonctions suivantes et dessiner leurs évolutions temporelles.

1) Série 1

a) $F(p) = \dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$ $\quad f(t) = \gamma(t) - 2\gamma(t-1) + \gamma(t-2)$

b) $F(p) = \dfrac{1+e^{-p\Pi}}{p^2+1}$ $\quad f(t) = \sin(t) .\gamma(t) + \sin(t-\pi) .\gamma(t-\pi)$

c) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$ $\quad f(t) = e^{t-2}\ \gamma(t-2)$

d) $F(p) = \dfrac{e^{-p\Pi}}{p^2+2p+2}$ $\quad f(t) = \sin(t-\Pi).e^{(\Pi-t)}\ \gamma(t-\pi)$

e) $F(p) = \dfrac{1}{p(1+e^{-p})}$ $\quad f(t)=\sum\gamma(t-2.n)-\gamma(t-2.n-1)$

f) $F(p) = \dfrac{1-e^{-p2\Pi}}{p(p^2+1)}$

g) $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})^2}{p(1-e^{-3p})}$

2) Série 2 : Utilisation de la décomposition en éléments simples

a) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ $\quad f(t) = (1-e^{-t}) .\gamma(t)$

b) $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2+3p+2}$ $\quad f(t) = (-2.e^{-t}+3.e^{-2.t}) .\gamma(t)$

c) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+3p+2}$ $\quad f(t) = e^{-2t} .\gamma(t)$

d) $F(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p^2-9)}$ $\quad f(t) = \frac{1}{30}(e^{3t}+5e^{-3t}-6e^{-2t})\ .\gamma(t)$

e) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$ $\quad f(t) = (e^{t} - e^{2t} + te^{2t}) .\gamma(t)$

f) $F(p) = \dfrac{1}{(p+2)^2(p-1)}$ $\quad f(t) = \frac{1}{9}[e^t - e^{-2t}(1+3^t)].\gamma(t)$

g) $F(p) = \dfrac{3(p+1)-2}{(p+1)^2+4}$ $\quad f(t) = e^{-t}.(3\cos(2t)-\sin(2t)).\gamma(t)$

Cas des racines complexes :

h) $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$ $f(t) = \sin(t)\, .e^{-t} .\gamma(t)$

i) $F(p) = \frac{2}{p^2+2p+5}$ $f(t) = \sin(2.t)\, .e^{-t} .\gamma(t)$

3) Calculer la transformée de Laplace inverse en utilisant le théorème de convolution :

$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p+1)}$ $f(t) = \frac{1}{2}\left(-cos(t)+sin(t)+e^{-t}\right).\gamma(t)$

$H(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ $h(t) = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{sin(\omega t)}{\omega} - t\,cos(\omega t)\right).\gamma(t)$

4) Calculer la transformée de Laplace inverse de :

$F(p) = \text{Arctan}\,(\frac{1}{p})$ $f(t) = \frac{sin(t)}{t}.\gamma(t)$

$H(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ $h(t) = \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{sin(\omega t)}{\omega} - t\,cos(\omega t)\right).\gamma(t)$

5) Résoudre par le calcul symbolique les équations différentielles suivantes

a) $y''(t)\text{-}\,y'(t)\text{-}\,6y(t)=2\,\gamma(t)$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ $y(t) =(-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}) .\gamma(t)$

b) $y''(t)\text{-}\,3y'(t)+2y(t)=e^{-t}$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ $y(t) =(\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t}-\frac{2}{3}e^{2t}) .\gamma(t)$

c) $y''(t)+y'(t)-2y(t)=e^{-2t}$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$ $y(t) =(\frac{1}{9}e^{t}-\frac{1}{3}te^{-2t}-\frac{1}{9}e^{-2t}) .\gamma(t)$

6) Résoudre par le calcul symbolique le système suivant

$x'(t)=-7x(t)+6y(t)+t$

$y'(t)=-12x(t)+10y(t)$

avec $x(0)=y(0)=0.$

$x(t) = (-5t-7+9e^{t}\ -2e^{2t}) .\gamma(t)$ et $y(t) = (-6t-9+12e^{t}\ -3e^{2t}) .\gamma(t)$

7)

a) En utilisant la transformée de Laplace, résoudre le système suivant :

$x'(t) = -x(t)+2.y(t)+\gamma(t)$

$y'(t) = -2y(t)+x(t)$

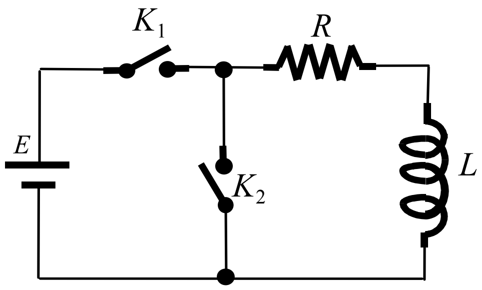
avec $x(0)=y(0)=0$

b) Tracez l'évolution temporelle de la fonction : $z(t) = x(t) + y(t)$

MAP L2, TD No3
Application à l'étude des circuits électriques

Exercice 1 :

On considère le montage suivant :



avec R = 1Ω ; L = 100 mH ; E = 1V. Les interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts.

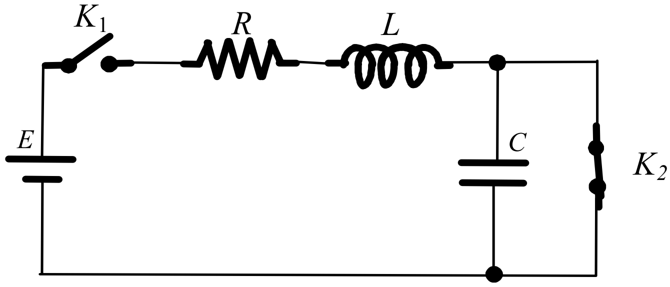
a) A t=0, le courant dans la self est nul, on ferme l'interrupteur K_1. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans l'interrupteur.
$i(t) = (1-e^{-10.t}).\gamma(t)$

b) On suppose, maintenant que le courant dans la self a une valeur de 0.5A à l'instant initial (t=0). Calculer à nouveau l'évolution temporelle du courant dans la résistance.
$i(t) = (1-0{,}5.e^{-10.t}).\gamma(t)$

c) A t=60s, on ouvre l'interrupteur K_1 et on ferme K_2. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans la résistance.

Exercice 2 :

Soit le montage suivant



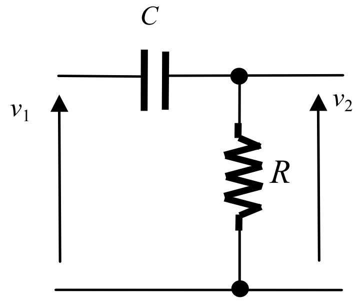
R = 10 kΩ ; L = 10 mH ; C = 10 nf ; E = 10 V

a) A t=0, le courant dans la self est nul, on ferme l'interrupteur K_1, l'interrupteur K_2 reste fermé. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans le circuit.

b) L'interrupteur K_1 étant fermé depuis un temps très long, on ouvre K_2 brusquement. Déterminer l'expression du courant débité par le générateur.

Exercice 3 :

Soit le montage suivant

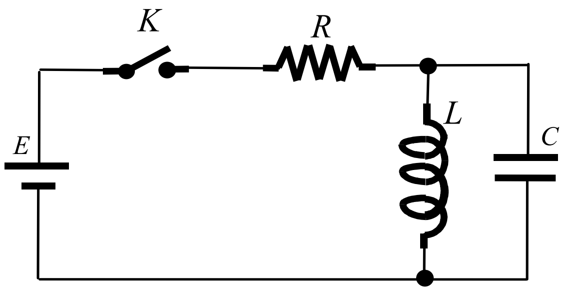


A t=0, la tension aux bornes du condensateur est nulle. On applique à l'entrée de ce montage un échelon d'amplitude E.

a) Calculez et représentez l'évolution temporelle de v_2(t)
b) On applique maintenant à l'entrée de ce montage un créneau d'amplitude E et de largeur τ. Calculez et représentez l'évolution temporelle de v_2(t)

Exercice 4 :

On considère le montage suivant :



La tension aux bornes du condensateur et le courant dans la self sont initialement nuls. L = 0.1 H ; C = 2.5 µF. On ferme brusquement l'interrupteur K à $t=0^-$. Déterminer l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur ($v(t)$) lorsque :

a) $R = 100\ \Omega$; $v(t) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{2RC}.t}.t.\gamma(t)$

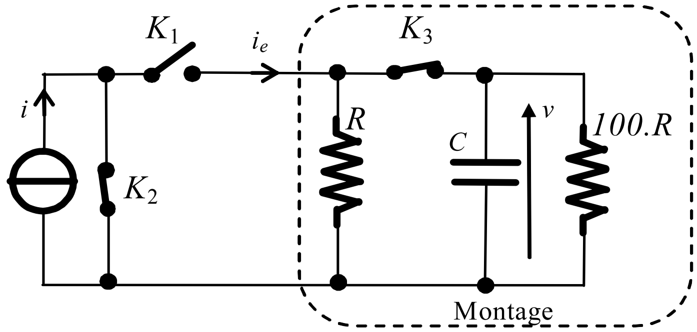
b) $R = 200\ \Omega$; $v(t) = \frac{2LE}{\sqrt{|\Delta|}}.Sin(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2RLC}.t).e^{-\frac{1}{2RC}.t}.\gamma(t)$

c) $R = 50\ \Omega$; $v(t) = \frac{LE}{\sqrt{\Delta}}.Sh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2RLC}.t).e^{-\frac{1}{2RC}.t}.\gamma(t)$

Exercice 5 :

Pour la résolution des questions de cet exercice, on pourra considérer la simplification suivante : $\frac{100}{101} = 1$, ainsi que les valeurs suivantes : $R.C = \frac{1}{\omega} = \frac{2}{R}$.

A t=0, la tension aux bornes du condensateur du montage suivant est nulle.



1) A t=0, on applique à l'entrée de ce montage un courant constant $i(t) = I$ en ouvrant $K2$ et en fermant $K1$ simultanément. $K3$ reste fermé.
   1.1) Déterminez l'expression temporelle de la tension aux bornes du condensateur, en utilisant la transformée de Laplace. Représentez graphiquement l'évolution temporelle de cette tension.
   1.2) Donnez la valeur de cette tension en régime permanent.

   1.3) Une fois le régime permanent atteint, on ouvre $K3$. Déterminer l'expression

   temporelle de la tension aux bornes du condensateur.

Exercice 6 :
On considère le montage électrique de la figure 1 :

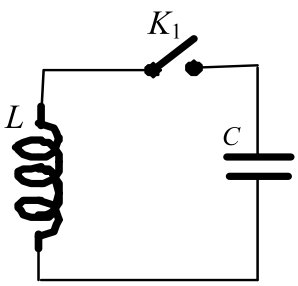


Figure 1

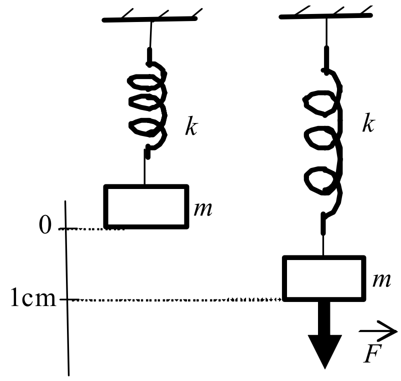


Figure 2

Le courant dans la self est initialement nul. L = 100 mH ; C = 10 µF et i=1A.
1) Déterminer la transformée de Laplace de la tension aux bornes du condensateur.
2) Déterminer l'évolution temporelle du courant dans la bobine.
3) On considère une masse m fixée sur un ressort de raideur k et que l'on tire pour la déplacer de 1cm (figure 3). La force de rappel exercée par le ressort est exprimée par : $f(t) = -kx(t)$. On rappelle que l'équation fondamentale de la dynamique conduit à l'expression suivante :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t)$$

A t=0s, on lâche le ressort. On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la position.
Déterminez la transformée de Laplace des deux équations et en déduire la solution dans le domaine de Laplace.
4) Calculez l'évolution temporelle de la position ($x(t)$).
5) Quelle est la fréquence des oscillations ?
6) Comparez le système électrique de la figure 1 et mécanique de la figure 2.

2) On considère maintenant une autre application. A t=0, la tension aux bornes du condensateur est toujours considérée nulle et $K3$ est fermé. On applique à l'entrée de ce montage un courant égal à $i(t) = I.Sin(2.\Pi.50.t)$ en ouvrant $K2$ et en fermant $K1$ simultanément,

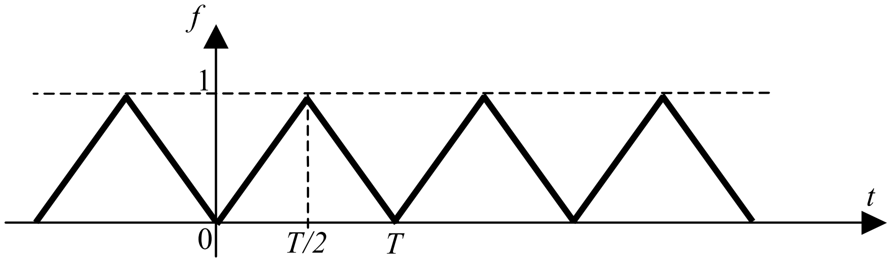
2.1) Donnez l'expression mathématique du courant $i_e(t)$.

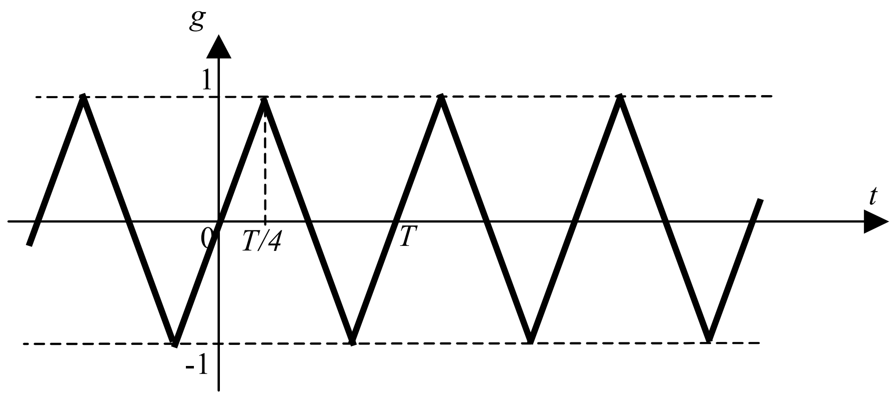
2.2) Déterminez la tension aux bornes du condensateur en utilisant la transformée de Laplace.

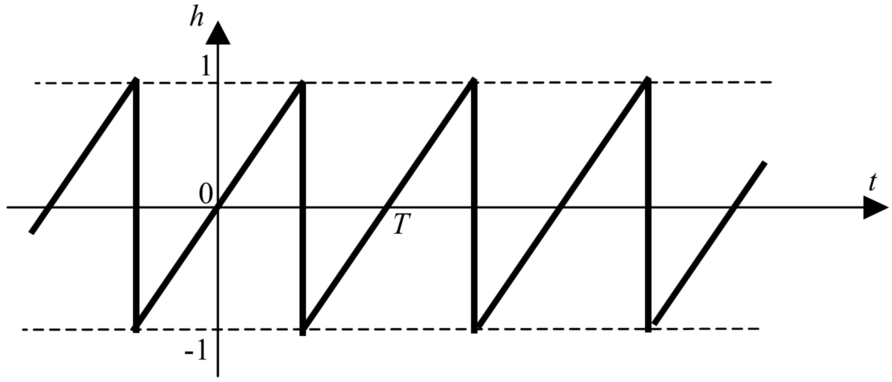
MAP L2, TD No4
Développements en série de Fourier

Exercice 1 :

Calculez les développements en série de Fourier des signaux suivants :





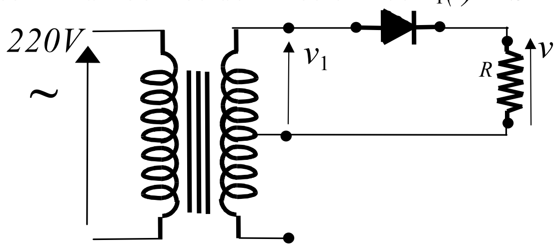


Réponses : $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\Pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ Cos\ \frac{2\Pi nt}{T}$ pour n impair,

$g(t) = \frac{8}{\Pi^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\ Sin\ \frac{2\Pi(2k+1)t}{T}$, $h(t) = -\frac{2}{\Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ Sin\ \frac{2\Pi nt}{T}$

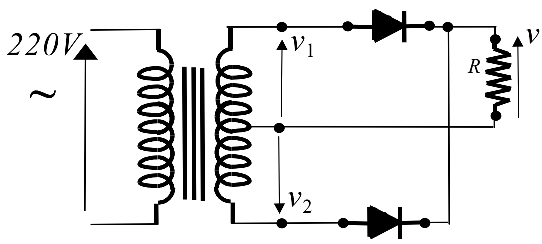
Exercice 2 : Dans cet exercice, on supposera les diodes comme idéales.

a) Redressement simple alternance. Déterminez le développement en série de Fourier de la tension apparaissant aux bornes de la résistance $v_1(t) = \text{Sin}\ (t)$



Réponse : $v(t) = \frac{1}{\Pi} + \frac{1}{2}.\ \text{Sin}\ (t) - \frac{4}{3\Pi}\ .\text{Cos}\ (2t) - \frac{8}{\Pi.15}\ (\text{Cos}\ 4t) + \ldots$..

b) Redressement double alternance. Déterminez le développement en série de Fourier de la tension apparaissant aux bornes de la résistance, $v_1(t) = \text{Sin}\ (t)$ et $v_2\ (t) = -\text{Sin}\ (t)$.

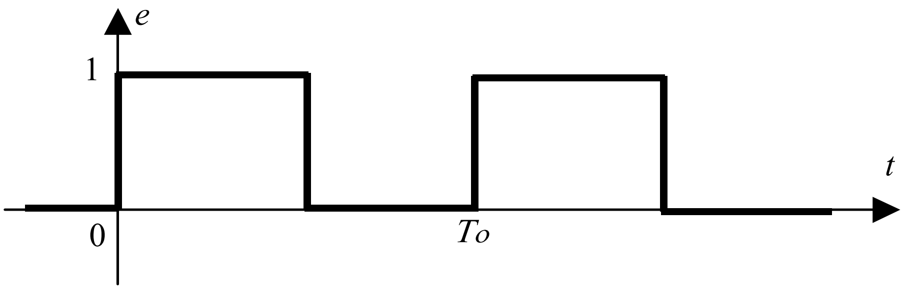


Réponse : $v(t) = \frac{2}{\Pi} - \frac{4}{3\Pi}\ .\text{Cos}\ (2t) - \frac{4}{\Pi.15}\ (\text{Cos}\ 4t) + \ldots$..

MAP L2, TD No5
Applications des développements en séries de Fourier

Exercice 1 :

On applique à l'entrée d'un amplificateur de tension un signal rectangulaire positif de fréquence 100 kHz et de rapport cyclique de 0.5.



1) Calculer son développement en Série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} C_n . e^{j.n.\omega o.t}$$

2) Représenter $\left|C_n(n)\right|$ et $\left|C_n(f)\right|$

3) Déduire du développement précédent les termes du développement suivant :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . Cos(n.\omega o.t) + b_n . Sin(n.\omega o.t)$$

4) En utilisant le théorème de Parceval, montrez que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

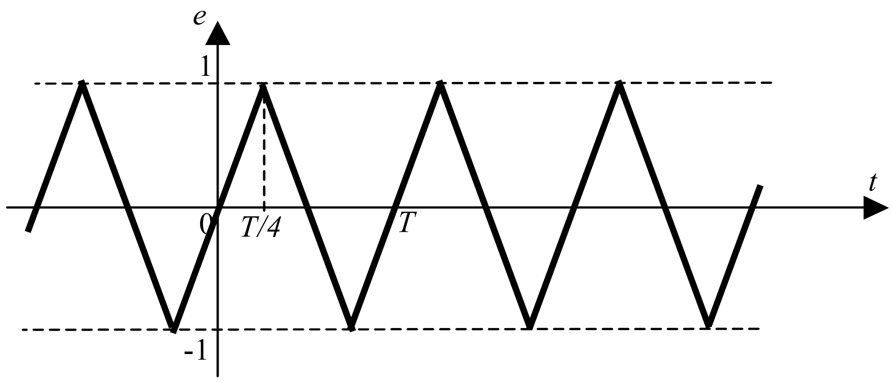
5) Quelle est la puissance (ou l'énergie) que peut fournir un tel signal dans une résistance R = 1 Ohm ?

6) On applique ce signal à un amplificateur de gain unitaire. Sa caractéristique fréquentielle est telle que les harmoniques supérieurs à n=9 sont éliminés. Déterminer la puissance que peut fournir cet amplificateur.

7) Une transmission fidèle requiert la transmission de 96 % de la puissance initiale du signal d'entrée. Combien d'harmoniques doivent être contenus dans le signal de sortie ?
En déduire la bande passante de l'amplificateur si l'on considère qu'

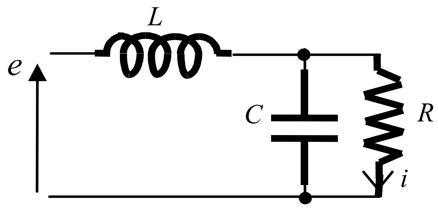
Exercice 2 : Application aux circuits

1) Donner le développement en Série de Fourier de la dérivée de la tension *e(t)*



2) En déduire le développement en Série de Fourier de la tension *e(t)*

3) Le tension *e(t)* est appliquée au circuit représenté ci-dessous



3.1) Donner l'équation différentielle reliant *e(t)* à *i(t)*

Réponse $e(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + R.L.C.\frac{d^2i(t)}{dt^2}$

3.2) On applique le signal périodique *e(t)* à ce circuit électrique, dès lors le courant *i(t)* est périodique et peut être écrit sous la forme d'un développement en série de Fourier. En posant $i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.Cos(n.\omega.t) + b_n.Sin(n.\omega.t)$, en déduire a_n et b_n.

Exercice 3 : Résolution d'une équation différentielle

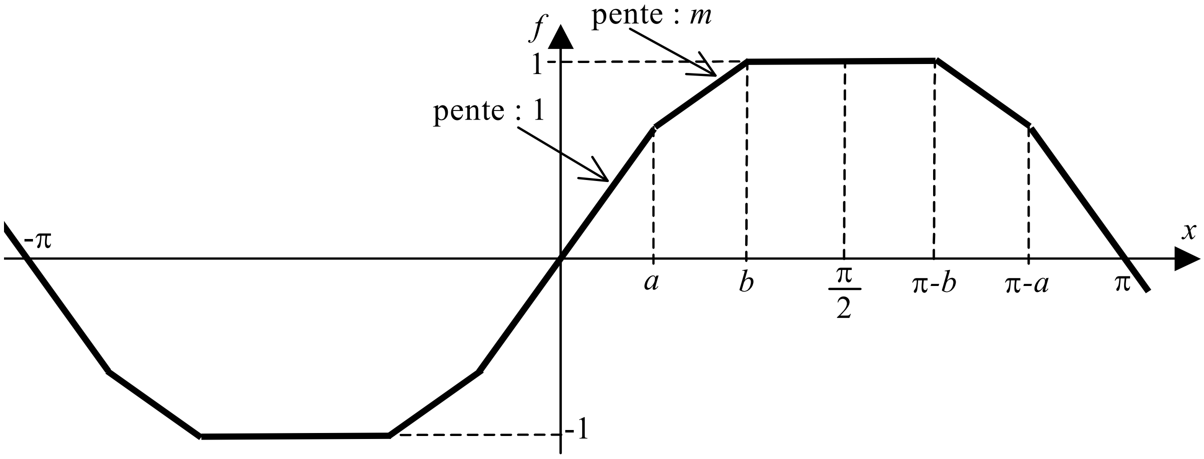
Soit la fonction impaire *f(x)* de période 2π tel que : $f(x) = 1 - cos\ (2x)$ pour $x \in [0, \pi]$

1) Calculer son développement en série de Fourier

2) En déduire la solution périodique de l'équation différentielle : $\frac{d^4y(x)}{dx^4} + y(x) = 1 - cos\ (2x)$, en posant la solution sous la forme : $y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.Cos(nx) + b_n.Sin(nx)$ où a_0, a_n et b_n sont à déterminer.

Exercice 4 :

On désire synthétiser une fonction sinusoïdale (*f(x)*) de période 2*pi à l'aide de droites paramétrées.



1) Quelles sont les deux propriétés de *f(x)*. En déduire son développement en série de Fourier.

Réponse : $f(x) = \frac{4}{\Pi}\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\left[(1-m)sin(na)+mSin(nb)\right].sin(n.x)$

2) Calculer les valeurs à donner à *a* et *b* pour que l'harmonique 5 soit nul quelque soit *m*.
Calculer les harmoniques 15 et 25.

Réponse : $a = \frac{\Pi}{5}$ $\quad$ $b = \frac{2\Pi}{5}$

3) Calculer la valeur à donner à *m* pour que l'harmonique 3 soit nul.
Calculer la valeur prise par les harmoniques 13, 23, …….7, 17, 27,…..

Réponse : $m = \frac{1}{1-2.Cos\left(\frac{3\Pi}{5}\right)}$

4) Si on réduit l'ordre du développement à 11, calculez le taux de distorsion :

$$\alpha = \frac{1}{b_1}.\sqrt{\sum_{n=1}^{11} bn^2}$$

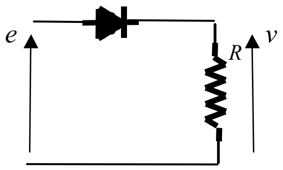
Exercice 5 : Modulation d'un signal en amplitude et démodulation

Soit $s(t) = E.Cos(\omega.t)$, un signal contenant une information contenue dans son amplitude et sa fréquence. La modulation d'amplitude consiste à créer un signal par multiplication du signal original avec un signal porteur de pulsation élevée ($\omega \leq \Omega$) : $e(t) = E.Cos(\omega.t).(1 + m.Sin(\Omega.t))$, où $m \leq 1$.

1) Représenter le spectre fréquentiel de *e(t)*

2) On utilise le montage représenté ci-dessous pour réaliser une détection linéaire. En considérant que la diode est idéale, déterminer le développement en série de Fourier de *v(t)*

   a) lorsque $m = 0$
   b) lorsque $m \neq 0$



Détection

3) On peut également utiliser une détection non linéaire du type $v(t) = k\,.e^2\,(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Déterminer le développement en série de Fourier

a. lorsque $m = 0$
b. lorsque $m \neq 0$

Montrer qu'il apparaît des harmoniques supplémentaires.
Quelles sont les conditions à réaliser pour éviter le recouvrement des spectres ?

<u>Exercice 6</u> :

1) Développez en série de Fourier la fonction de période 2Π définie par :

$f(x) = \Pi - x$ pour $0 \leq x \leq \Pi$
$f(x) = \Pi + x$ pour $-\Pi \leq x \leq 0$

Réponse : $f(x) = \dfrac{\Pi}{2} + \dfrac{2}{\Pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\,[1-(-1)^n]\,.Cos\,(n.x)$

2) En déduire la somme de la série : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

Réponse : $\dfrac{\Pi^2}{8}$

<u>Exercice 7</u> :

1) Développez en série de Fourier la fonction de période 2Π définie par : $f(x) = \Pi^2 - x^2$ pour $-\Pi \leq x \leq \Pi$ et de période 2Π

Réponse : $f(x) = \dfrac{2}{3}\Pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4.\cos(n.\Pi)}{n^2}\,.Cos\,(n.x)$

2) En déduire que : $\Pi^2 = 6.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{Cos(n.\Pi)}{n}\right)^2$

IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

MAP L2, TD No5
Transformée de Fourier

Exercice 1 :

Calculer la transformée de Fourier de $f_3(t) = e^{-at}.\gamma(t) - e^{at}.\gamma(-t)$

Exercice 2 :

a) Dessinez la fonction de $f_2(t) = e^{-a|t|}$.
Calculer sa transformée de Fourier.
Que pouvez-vous dire sur la parité de $F_2(f)$?

b) Dessinez la fonction de $fo(t) = e^{-at}.\gamma(t)$,
Calculer sa transformée de Fourier.
Que pouvez-vous dire sur la parité de $Fo(f)$?

c) Calculer la transformée de Fourier de $f_1(t) = t.e^{-a.t}.\gamma(t)$.

d) Montrer que $F_1(f) = \frac{1}{-j2\Pi}\frac{dFo(f)}{df}$.

En déduire la transformée de Fourier de $f_n(t) = \frac{t^n}{n!}.\ e^{-at}.\gamma(t)$ par récurrence.

e) Calculer la transformée de Laplace de $f_n(t)$, comment peut on en déduire $Fn(f)$?

Exercice 3 :

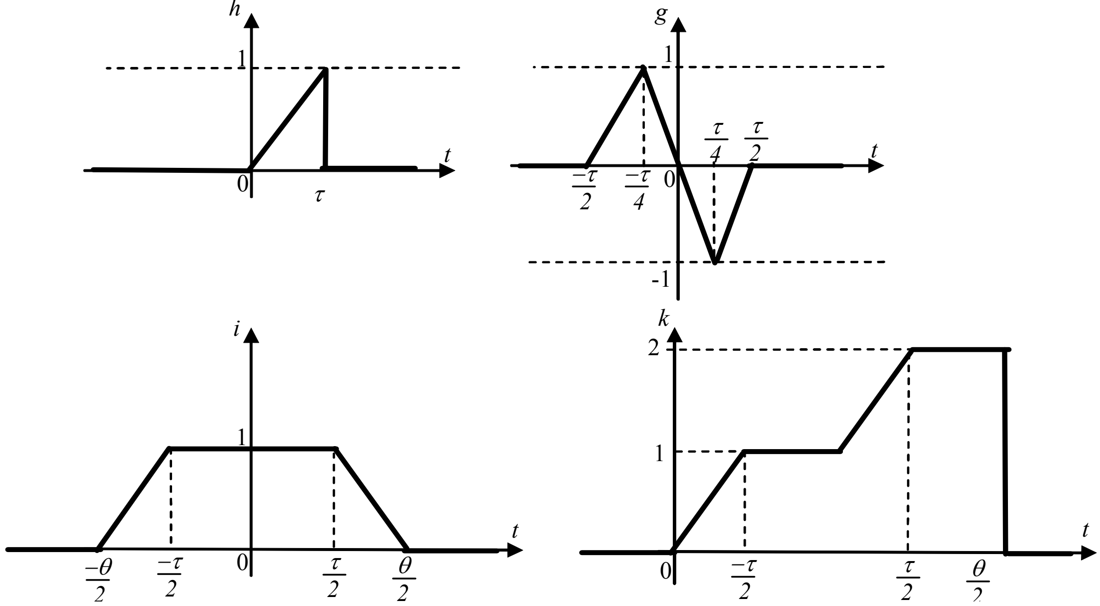
a) Soit la fonction $f(t) = Cos\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier .
b) Soit $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$ ailleurs ainsi que la fonction $g(t) = Cos\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$, calculez les transformées de Fourier de $g(t)$ et $w(t)$. En déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.
c) Tracer $F(f)$.

Exercice 4 :

Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = 1-\left(\frac{2t}{\sigma}\right)^2$ *pour* $-\frac{\sigma}{2} \leq t \leq \frac{\sigma}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs.

Exercice 5 :

Calculez les transformées de Fourier des signaux *g, h, i* et *k*.



Exercice 6 :

a) Soit la fonction $f(t) = Cos^2\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \le t \le \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier .

b) Soit $g(t) = Cos^2\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ et $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \le t \le \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$, calculez les transformées de Fourier de $g(t)$ et $w(t)$ en utilisant le produit de convolution. En déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.

Tracer $F(f)$.

Exercice 7 :

a) Soit la fonction $f(t) = \frac{E}{2}.\left(1+Cos\left(\frac{2\pi.t}{\theta}\right)\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \le t \le \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier .

b) Soit $g(t) = \frac{E}{2}.\left(1+Cos\left(\frac{2\pi.t}{\theta}\right)\right)$ et $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \le t \le \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$, calculez les transformées de Fourier de $g(t)$ et $w(t)$. En déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.

Tracer $F(f)$.

Exercice 8 :

Calculer la transformée de Fourier de $g(t) = cos^2(\omega.t)$

Exercice 9 :

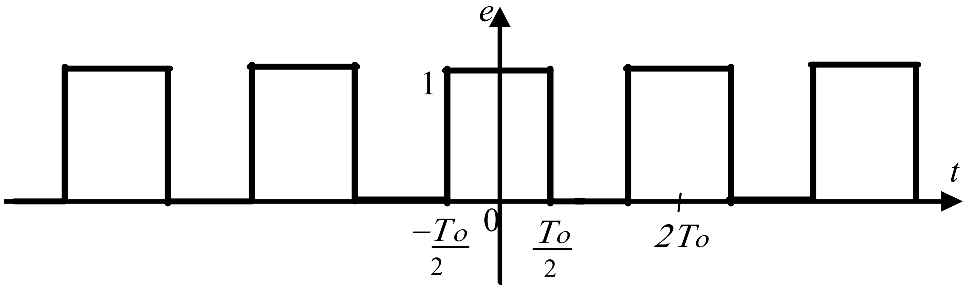
Peut on calculer la transformée de Fourier des signaux *f, g, h, k* en utilisant la transformée de Laplace ?

$f(t) = (1-a.t).e^{-a.t}$, $g(t) = e^{-a.t}.sin(\omega.t)$, $h(t) = sh(\omega.t)$, $k(t) = t.cos(\omega.t)$

MAP L2, TD No6 : Applications

Exercice 1 :

1) Soit le signal périodique suivant :



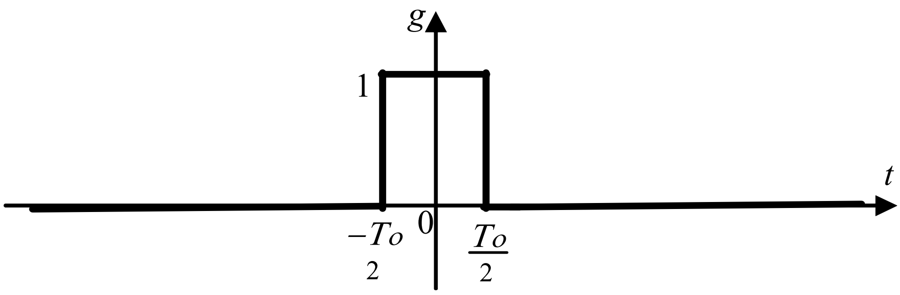
Calculer son développement en série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} C_n.e^{j.n.\omega o.t}$$

Représentez l'ensemble des coefficients C_n en fonction de n

2)

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*. Représentez son spectre fréquenciel.



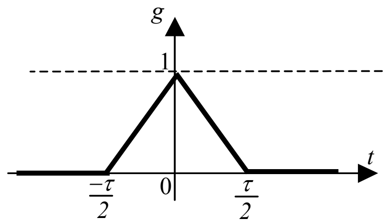
b) En déduire le développement en série de Fourier de *e(t)*.

Exercice 2 :

1) Donner la transformée de Fourier $C\tau\ (f)$ d'un signal en créneau centré d'amplitude 1 pour $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$, avec $\tau < 1ms$.
   Dessinez ce signal.
2) Donner la transformée de Fourier *G(f)* de la fonction $g(t) = Cos\left(2\pi\ f_0 t\right)$
3) Le signal *g(t)* de fréquence *f0*= 1MHz est modulé par multiplication avec le signal de la question 1) à la fréquence *f1* = 1 kHz. On obtient un signal périodique de période T_1 = 1ms. Représenter ce signal et calculer son développement en série de Fourier.
4) Calculez sa transformée de Fourier.

Exercice 3 :

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*.



b) Calculer l'énergie du signal *g*

c) Un filtre *H(f),* tel que *H(f)*=1 pour $-fc<f<fc$, est appliqué sur ce signal , calculer l'énergie perdue, en considérant que $\sin(x)/x=1/x$ pour *x* très grand.

d) Déterminez la fréquence de coupure pour que cette énergie perdue représente au plus 1/1000 de l'énergie de *g*.

Exercice 4 :

On considère un système de réponse impulsionnelle pour $t > 0$ **:** $\lambda e^{-\lambda t}\gamma(t)$

1)

Donner la réponse temporelle de cet amplificateur à une impulsion rectangulaire de largeur θ. On utilisera l'équation de convolution.

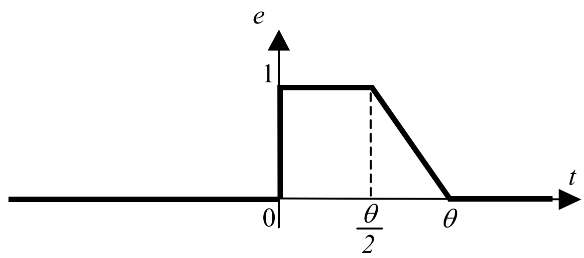
2)

a) Quelle est la fonction de transfert fréquentiel du système ?

b) Déterminer la fonction de transfert opérationnelle (transformée de Laplace).

c) Donner la réponse temporelle de cet amplificateur à une impulsion rectangulaire de largeur θ en utilisant la transformée de Laplace inverse pour la calculer.

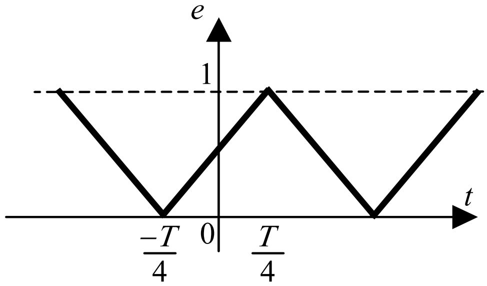
3) On applique à son entrée le signal *e(t).* Donner la réponse du système en utilisant le théorème convolution.



Exercice 5 : Puissance

Le signal *e(t)* de la figure 1 a pour développement :

1) Calculer le développement en série de Fourier du signal de la figure 1



2) Calculer la puissance moyenne dissipée dans une résistance *R* si *e(t)* représente une tension.

3) En déduire la valeur de la série : $\sum_{n\ impair} \frac{1}{n^4}$

TRANSFORMEES DE LAPLACE usuelles :

Domaine Temporel	Domaine de Laplace
$K.\gamma(t)$	$\frac{K}{p}$
$t.\gamma(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n.\gamma(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}.\gamma(t)$	$\frac{1}{p-a}$
$te^{at}.\gamma(t)$	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$t^n e^{at}.\gamma(t)$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\cos\omega t.\gamma(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin\omega t.\gamma(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t.\gamma(t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t.\gamma(t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$ch\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$sh\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$e^{at}ch\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\alpha^2}$
$e^{at}sh\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{\alpha}{(p-a)^2-\alpha^2}$

Remarque : $\gamma(t)$ est la fonction échelon unité

PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE :

Propriétés	Domaine Temporel $f(t).\gamma(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Linéarité	$[a.f(t)+b.g(t)].\gamma(t)$	$a.F(p)+b.G(p)$
Changement d'échelle de t	$f\left(\frac{t}{k}\right).\gamma(t)$	$k.F(kp)$
Changement d'échelle de p	$k.f(kt).\gamma(t)$	$F\left(\frac{p}{K}\right)$
Translation de t	$f(t-\lambda).y(t-\lambda)$	$e^{-p\lambda}F(p)$
Translation de p	$e^{-\alpha t}f(t).\gamma(t)$	$F(p+\alpha)$
Périodicité de période de T	Motif : $f_o\,(t).\gamma(t)$ $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_o\,(t-nT).\gamma(t-nT)$	$F_o\,(p)$ $F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$
Dérivation de f(t)	$\frac{d}{dt}[f(t).\gamma(t)]$	$p.F(p)-f(0^+)$
Dérivation de F(p)	$-t.f(t).\gamma(t)$	$\frac{d}{dp}[F(p)]$
Intégration de f(t)	$\int_0^t f(u)du.\gamma(t)$	$\frac{1}{p}.F(p)$
Intégration de F(p)	$\frac{f(t)}{t}.\gamma(t)$	$\int_p^{\infty} F(u)du$
Généralisations : **Dérivée n^{ième} de f(t)** **Intégrale n^{ième} de f(t)**	$\frac{d^n}{dt^n}[F(t).\gamma(t)]$ $\underbrace{\int_o^t \ldots\ldots \int_o^t}_{n \text{ fois}} f(u)du^n.\gamma(t)$	$p^n.F(p)-p^{n-1}f(0^+)$ $-p^{n-2}.f'(0^+)\ldots-f^{(n-1)}(0^+)$ $\frac{1}{p^n}.F(p)$
Théorème : **Valeur initiale** **Valeur finale**	$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{p\to+\infty} p.F(p)$ $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0^+} p.F(p)$	

PRIMITIVES (*)

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad F \text{ primitive quelconque de } f$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n \ (n \in N - \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{1+\cos x}$	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{1-\cos x}$	$\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$
$x^\alpha \ (\alpha \in R - \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$e^{m.x}$	$\dfrac{e^{m.x}}{m}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$Log\ x$	$x.Log\ x - x$
$\dfrac{1}{x}$	$Log\ \lvert x\rvert$	$ch\ x$	$sh\ x$
$\cos x$	$\sin x$	$sh\ x$	$ch\ x$
$\cos(\omega x + \varphi)$	$\dfrac{1}{\omega}.\sin(\omega.x+\varphi)$	$th\ x$	$Log\ (ch\ x)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\coth x$	$Log\ \lvert sh\ x\rvert$
$\sin(\omega.x+\varphi)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega.x+\varphi)$	$\dfrac{1}{ch^2 x}$	$th\ x$
$tg\ x$	$-Log\ \lvert\cos x\rvert$	$\dfrac{1}{sh^2 x}$	$-\coth x$
$\operatorname{cotg} x$	$-Log\ \lvert\sin x\rvert$	$\dfrac{1}{sh\ x}$	$Log\ \left\lvert th\ \dfrac{x}{2}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$tg\ x$	$\dfrac{1}{ch\ x}$	$2\ Arc\ tg\ (e^x) =$ $2\ Arc\ tg\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right) =$ $Arc\ tg\ (sh\ x)$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot g\ x$	$\dfrac{1}{1+ch\ x}$	$th\ \dfrac{x}{2}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$Log\ \left\lvert tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\dfrac{1}{1-ch\ x}$	$\coth\dfrac{x}{2}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$Log\ \left\lvert tg\ \dfrac{x}{2}\right\rvert$		

DÉRIVÉES (*)

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$(\lambda.u)' = \lambda.u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v}{v^2}$

$\left(f[u(x)]\right)' = f'[u(x)]\, u'(x)$

$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + C_n^1.u^{(n-1)}.v' + \ldots + C_n^k.u^{(n-k)}.v^{(k)} + \ldots + u.v^{(n)}$

y	**y'**	**y**	**y'**
$x^n\,(n \in)$	$n.\,x^{n-1}$	$e^{m.x}\;(m \in R)$	$m.e^{m.x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	a^x	$a^x\,Log\,a$
$a^x\,(\alpha \in^R)$	$a.x^{a-1}$	$Log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\,Log\,a}$
$\cos x$	$-\sin x$	$ch\,x$	$sh\,x$
$\sin x$	$\cos x$	$sh\,x$	$ch\,x$
$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$th\,x$	$\frac{1}{ch^2 x} = 1 + th^2 x$
$\cot g\,x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\coth x$	$\frac{-1}{sh^2 x}$
$Arc\cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arg\,ch\,x$	$\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$
$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arg\,sh\,x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$Arc\,tg\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arg\,th\,x$	$\frac{1}{1-x^2}$

(*) Sous réserve d'un intervalle correcte de variation pour x

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

RELATIONS AVEC L'ARC DOUBLE :

$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$

$\cos 2.a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}.(1 - \cos 2a)$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}.(1 + \cos 2a)$

$\sin^2 a = \frac{2.tga}{1 + tg^2 a}$ $\qquad$ $\cos 2.a = \frac{1 - tg^2 a}{1 + tg^2 a}$

$tg2.a = \frac{2.tga}{1 - tg^2 a}$

EQUATIONS

$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ $\qquad (k \in Z)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\qquad (k \in Z)$

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi$ $\qquad (k \in Z)$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\qquad (k \in Z)$

TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p-q}{2}.\sin\frac{p+q}{2}$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

VALEURS PARTICULIERES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∞

RELATIONS

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ $\qquad$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{tg^2 x}$

	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x + \frac{\pi}{2}$	$x + n\pi$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$(-1)^n \sin x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$(-1)^n \cos x$

FORMULES D'ADDITION

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$ $\qquad$ $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$