TD 1
Transformation de Laplace

Exercice 1. On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+$. Pour chacune de ces fonctions, on vous demande de déterminer la transformée de Laplace et de préciser le domaine d'existence.

$$t \mapsto 2e^{-6t},\ t \mapsto 5e^{2t},\ t \mapsto 2t^4,\ t \mapsto (t^2+1)^2,\ t \mapsto \alpha\cos 3t + \beta \sin 3t,\ t \mapsto \alpha \mathrm{ch} 3t + \beta \mathrm{sh} 3t$$

$$t \mapsto e^{-2t}\cos 3t,\ t \mapsto 2e^{-5t}(\cos 2t + \sin 2t),\ t \mapsto e^{-4t}\mathrm{sh} 8t, t \mapsto e^{-t}\sin^2 \frac{t}{2},\ t \mapsto e^{-2t}(t^2-1)^2$$

On a $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha}$ pour $p > \alpha$ donc, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\boxed{\mathcal{L}(2e^{-6t}) = 2\mathcal{L}(e^{-6t}) = \frac{2}{p+6} \quad \text{pour} \quad p > -6\ ,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(5e^{2t}) = 5\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{5}{p-2} \quad \text{pour} \quad p > 2.}$$

On a $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ pour $p > 0$ donc, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\boxed{\mathcal{L}(2t^4) = 2\mathcal{L}(t^4) = 2\frac{4!}{p^5} \quad \text{pour} \quad p > 0\ ,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}((t^2+1)^2) = \mathcal{L}(t^4+2t^2+1) = \mathcal{L}(t^4) + 2\mathcal{L}(t^2) + \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{4!}{p^5} + 2\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} \quad \text{pour} \quad p > 0.}$$

On a $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ pour $p > 0$ donc, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)) = \alpha\mathcal{L}(\cos(3t)) + \beta\mathcal{L}(\sin(3t)) = \frac{\alpha p + \beta\omega}{p^2+9} \quad \text{pour} \quad p > 0.}$$

On a

$$\alpha \mathrm{ch}(3t) + \beta \mathrm{sh}(3t) = \alpha\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2} + \beta\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}e^{3t} + \frac{\alpha-\beta}{2}e^{-3t}$$

donc, pour $p > 3$ (car $3 = \max\{-3, 3\}$), on a par linéarité

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha \mathrm{ch}(3t) + \beta \mathrm{sh}(3t)) = \frac{\alpha+\beta}{2}\mathcal{L}(e^{3t}) + \frac{\alpha-\beta}{2}\mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{1}{p-3} + \frac{\alpha-\beta}{2}\frac{1}{p+3}.}$$

Si $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ alors on a $\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t)) = F(p-\alpha)$ or $\mathcal{L}(\cos(3t)) = \frac{p}{p^2+9}$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-2t}\cos(3t)) = \frac{p}{(p+2)^2+9} = \frac{p}{p^2+4p+13}.}$$

De même, on a $\mathcal{L}(\cos(2t) + \sin(2t)) = \frac{p+2}{p^2+4}$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}(2e^{-5t}(\cos(2t)+\sin(2t))) = 2\frac{(p+5)+2}{(p+5)^2+4} = 2\frac{p+7}{p^2+10p+29}.}$$

On a
$$\mathcal{L}(\mathrm{sh}(8t)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{8t} - e^{-8t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-8} - \frac{1}{p+8}\right) = \frac{8}{p^2-64}$$
d'où
$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-4t}\mathrm{sh}(8t)) = \frac{8}{(p+4)^2-64} = \frac{8}{p^2+8p-58}.}$$
On a $\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)$ donc
$$\mathcal{L}(\sin^2\frac{t}{2}) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}$$
d'où
$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-t}\sin^2\frac{t}{2}) = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+1)^2+1}.}$$
Enfin, on a
$$\mathcal{L}((t^2-1)^2) = \mathcal{L}(t^4) - 2\mathcal{L}(t^2) + \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{4!}{p^5} - 2\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} \quad \text{pour} \quad p > 0$$
d'où
$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-2t}(t^2-1)^2) = \frac{4!}{(p+2)^5} - \frac{4}{(p+2)^3} + \frac{1}{p+2}.}$$

EXERCICE 2. On considère les fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}_+$, f_1, f_2 définies de la façon suivante :
$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<1 \\ -1 & 1<t<2 \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0<t<1 \\ -t+2 & 1<t<2 \end{cases}$$
Déterminer leur transformée de Laplace.

On a $f_1(t) = 0$ pour $t < 0$, $f_1(t) = 1$ pour $0 \leq t < 1$ et $f_1(t) = -1$ pour $1 \leq t < 2$ avec f_1 2-périodique sur $\mathbb{R}^+$, donc
$$\mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\int_0^2 f_1(t)e^{-pt}dt.$$
En distinguant le cas où $t \in [0,1[$ de celui où $t \in [1,2[$, il vient
$$\mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 e^{-pt}dt - \int_1^2 e^{-pt}dt\right] = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_1^2\right]$$
d'où
$$\mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p}\right] - \left[\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p}\right]\right] = \frac{1}{p(1-e^{-p})(1+e^{-p})}\left(1-e^{-p}\right)^2$$
i.e.
$$\boxed{\mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1-e^{-p}}{p(1+e^{-p})}.}$$

On a $f_2(t) = 0$ pour $t < 0$, $f_2(t) = t$ pour $0 \leq t < 1$ et $f_2(t) = -t+2$ pour $1 \leq t < 2$ avec f_2 2-périodique sur $\mathbb{R}^+$, donc
$$\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\int_0^2 f_2(t)e^{-pt}dt.$$

En distinguant le cas où $t \in [0,1[$ de celui où $t \in [1,2[$, il vient

$$\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}} \left[\int_0^1 te^{-pt}dt - \int_1^2 (-t+2)e^{-pt}dt \right].$$

Or

$$\int_0^1 te^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}te^{-pt} \right]_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}te^{-pt} \right]_0^1 + \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt} \right]_0^1 = -\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}(1-e^{-p})$$

et

$$\int_1^2 (-t+2)e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}(-t+2)e^{-pt} \right]_1^2 - \frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}dt = \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt} \right]_1^2 = \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}(e^{-p}-e^{-2p})$$

d'où

$$\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{1-e^{-2p}}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}.}$$

Une autre façon de montrer ce résultat consiste à remarquer que f_2 est la primitive de f_1 qui s'annule en 0 donc $\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f_1(t))$.

EXERCICE 3. On rappelle que $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définie par

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x-\tfrac{\pi}{4})\,\mathcal{U}(x-\tfrac{\pi}{4}) \\ f_2(x) &= \sin(x-\tfrac{\pi}{4})\,\mathcal{U}(x) \\ f_3(x) &= \sin(x)\,\mathcal{U}(x-\tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Déterminer leur transformée de Laplace.

On pose $f_1(t) = \sin(t-\frac{\pi}{4})\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{4})$ d'où en appliquant le théorème du retard

$$\boxed{\mathcal{L}(f_1(t)) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\mathcal{L}(\sin(t)) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\frac{1}{p^2+1}.}$$

On pose $f_2(t) = \sin(t-\frac{\pi}{4})\mathcal{U}(t)$ *i.e.* f_2 est la fonction nulle sur $]-\infty,0[$, 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$ et définie pour $t \in [0,2\pi[$ par $f_2(t) = \sin(t-\frac{\pi}{4})$. On a donc

$$\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}\sin(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt.$$

On intègre par parties cette intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\sin(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt &= \left[-\frac{1}{p}\sin(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{p}\int_0^{2\pi}\cos(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt \\ &= \frac{1}{p}\left(\sin(-\frac{\pi}{4}) - \sin(2\pi-\frac{\pi}{4})e^{-2\pi p}\right) + \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}\cos(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{p^2}\int_0^{2\pi}\sin(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{1+p^2}{p^2}\int_0^{2\pi}\sin(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\left(\sin(-\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{7\pi}{4})e^{-2\pi p}\right) + \frac{1}{p^2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{7\pi}{4})e^{-2\pi p}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2\pi p}\right)+\frac{1}{p^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2\pi p}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2p}\left(1-e^{-2\pi p}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2p^2}\left(1-e^{-2\pi p}\right)$$

d'où

$$\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\frac{p^2}{1+p^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2p}\left(1-e^{-2\pi p}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2p^2}\left(1-e^{-2\pi p}\right)\right)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-p}{1+p^2}.}$$

On pose $f_3(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{4})$ et on effectue un calcul direct

$$\mathcal{L}(f_3(t)) = \int_0^{+\infty}\sin(t)\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{4})e^{-pt}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt &= \left[-\cos(t)e^{-pt}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} - p\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt \\ &= \cos(\frac{\pi}{4})e^{-p\frac{\pi}{4}} - p\left[-\sin(t)e^{-pt}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} + p^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

i.e.

$$(1+p^2)\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-p\frac{\pi}{4}} - p\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-p\frac{\pi}{4}}$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-p}{1+p^2}e^{-p\frac{\pi}{4}}$$

et on a finalement

$$\boxed{\mathcal{L}(f_3(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-p}{1+p^2}e^{-p\frac{\pi}{4}}.}$$

EXERCICE 4. Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

$$p \mapsto \frac{5}{p^2+9},\ p \mapsto \frac{5p}{p^2+9},\ p \mapsto \frac{1}{p^2+16},\ p \mapsto \frac{5p-8}{p^2+64},\ p \mapsto \frac{1}{p^6},\ p \mapsto \frac{2}{p+3}$$

On a $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ pour $p > 0$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{5}{p^2+9}) = \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{p^2+9}) = \frac{5}{3}\sin(3t)\mathcal{U}(t)\ ,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{5p}{p^2+9}) = 5\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+9}) = 5\cos(3t)\mathcal{U}(t)\ ,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+16}) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{p^2+16}) = \frac{1}{4}\sin(4t)\mathcal{U}(t)\ ,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{5p-8}{p^2+64}) = 5\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+64}) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{8}{p^2+64}) = (5\cos(8t)-\sin(8t))\mathcal{U}(t).}$$

On a $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^n}$ pour $p > 0$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^6}) = \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}(\frac{5!}{p^6}) = \frac{1}{5!}t^5\mathcal{U}(t).}$$

On a $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha}$ pour $p > \alpha$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{p+3}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+3}) = \frac{1}{2}e^{-3t}\mathcal{U}(t).}$$

EXERCICE 5. Trouver l'original de la fonction F définie par $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$.
En déduire l'original de la fonction $p \mapsto \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$.

Cherchons l'original de $F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$. On a

$$F(p) = \frac{1}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)\mathcal{L}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right).$$

L'original f de F est donné par

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega u)}{\omega}\frac{\sin(\omega(t-u))}{\omega}du.$$

Comme on a $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$, il vient

$$f(t) = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^t \left(\cos(\omega(2u-t)) - \cos(\omega t)\right)du = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^t \cos(2\omega u - \omega t) - \frac{\cos(\omega t)}{2\omega^2}\int_0^t du$$

i.e.

$$f(t) = \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega u - \omega t)\right]_0^t - \frac{t\cos(\omega t)}{2\omega^2}$$

d'où

$$f(t) = \frac{1}{4\omega^3}\left(\sin(\omega t) - \sin(-\omega t)\right) - \frac{t\cos(\omega t)}{2\omega^2} = \frac{\sin(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t\cos(\omega t)}{2\omega^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \omega\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{\sin(\omega t)}{2\omega^2} - \frac{t\cos(\omega t)}{2\omega}.}$$

EXERCICE 6. On veut calculer l'original de la fonction F définie par $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$ de deux façons différentes.
1. On décomposera en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle F.
2. On utilisera le produit de convolution.

On pose $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)}$ alors, en décomposant F en éléments simples, il vient

$$F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{p-1}{p^2+1}$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+1}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+1}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+1})$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)\right)\mathcal{U}(t).}$$

En utilisant le produit de convolution, on commence par remarquer que

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+1}) = e^{-t}\mathcal{U}(t) = g(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+1}) = \sin(t)\mathcal{U}(t) = h(t)$$

alors l'original $f(t)$ de $F(p)$ est donné pour $t \geq 0$ par

$$f(t) = \int_0^t g(t-u)h(u)du = \int_0^t e^{-(t-u)}\sin(u)du = e^{-t}\int_0^t e^u \sin(u)du.$$

On a

$$\int_0^t e^u \sin(u)du = [\sin(u)e^u]_0^t - \int_0^t \cos(u)e^u du = \sin(t)e^t - \int_0^t \cos(u)e^u du$$

donc

$$\int_0^t e^u \sin(u)du = \sin(t)e^t - [\cos(u)e^u]_0^t - \int_0^t \sin(u)e^u du$$

i.e.

$$\int_0^t e^u \sin(u)du = \sin(t)e^t - \cos(t)e^t + 1 - \int_0^t \sin(u)e^u du$$

puis

$$2\int_0^t e^u \sin(u)du = \sin(t)e^t - \cos(t)e^t + 1$$

et on a finalement

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sin(t)e^t - \cos(t)e^t + 1\right)$$

i.e. pour $t \geq 0$, on a

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t) + e^{-t}\right).$$

Exercice 7. On considère la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X}{(X+2)(X^2+4)}$$

a) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
b) Déduire de cette décomposition l'original (dans la transformation de Laplace) de

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+4)}$$

c) Montrer que l'original de $G(p) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\dfrac{p}{(p+2)(p^2+4)}$ est la fonction g définie par

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4}e^{-2t} + \dfrac{1}{4}\sin 2t - \dfrac{1}{4}\cos 2t & \text{si } t \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{si } t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

c) Retrouver l'original de $F(p)$ en utilisant le produit de convolution.

La décomposition en éléments simples de F est

$$F(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+4)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+4}$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{p+2}{p^2+4})$$

i.e.

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+2^2}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{x^2+2^2}).$$

Mais $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p+2}) = e^{-2t}\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+2^2}) = \cos(2t)\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{p^2+2^2}) = \sin(2t)\mathcal{U}(t)$ donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{4}\left(-e^{-2t} + \cos(2t) + \sin(2t)\right)\mathcal{U}(t).}$$

On a $g(t) = h(t-\frac{\pi}{4})\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{4})$ où

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4}e^{-2t-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin(2t+\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}\cos(2t+\frac{\pi}{2}) & \text{si } \ t \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{si } \ t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

i.e. puisque $\sin(u+\frac{\pi}{2}) = \cos(u)$ et $\cos(u+\frac{\pi}{2}) = -\sin(u)$

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) & \text{si } \ t \geq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{si } \ t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{L}(h(t)) = F(p)$ d'après ce qui précède. En appliquant le théorème du retard à g, il vient

$$\mathcal{L}(g(t)) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\mathcal{L}(h(t)) = e^{-p\frac{\pi}{4}}F(p)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}(g(t)) = G(p) = e^{-p\frac{\pi}{4}}\frac{p}{(p+2)(p^2+4)}.}$$

Retrouvons maintenant l'original de F en utilisant le produit de convolution. On a

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+4)} = \frac{1}{p+2}\frac{p}{p^2+2^2} = \mathcal{L}(e^{-2t})\mathcal{L}(\cos(2t))$$

donc l'original f de F est donné pour $t \geq 0$ par

$$f(t) = \int_0^t \cos(2u)e^{-2(t-u)}du = e^{-2t}\int_0^t \cos(2u)e^{2u}du.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos(2u)e^{2u}du &= \left[\frac{1}{2}\sin(2u)e^{2u}\right]_0^t - \int_0^t \sin(2u)e^{u}du \\ &= \frac{1}{2}\sin(2t)e^{2t} - \left[-\frac{1}{2}\cos(2u)e^{2u}\right]_0^t - \int_0^t \cos(2u)e^{u}du \\ &= \frac{1}{2}\sin(2t)e^{2t} + \frac{1}{2}\left[\cos(2t)e^{2t} - 1\right] - \int_0^t \cos(2u)e^{u}du \end{aligned}$$

d'où

$$2\int_0^t \cos(2u)e^{2u}du = \frac{1}{2}\sin(2t)e^{2t} + \frac{1}{2}\cos(2t)e^{2t} - \frac{1}{2}$$

i.e.

$$f(t) = e^{-2t}\int_0^t \cos(2u)e^{2u}du = \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Exercice 8. Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

a) $p \mapsto \dfrac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

b) $p \mapsto \dfrac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}$, $p \mapsto \dfrac{p+3}{(p^2+6p+18)^2}$, $p \mapsto \dfrac{3}{(p^2+6p+18)^2}$

c) $p \mapsto \dfrac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2}$

On a $\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2}\frac{p}{p^2+\omega^2}$ donc l'original $f(t)$ de $p \mapsto \frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ est donné pour $t \geq 0$ par

$$f(t) = \int_0^t \cos(\omega u)\cos(\omega(t-u))du = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos(\omega t) - \cos(\omega(t-2u))\right] du$$

i.e.

$$f(t) = \frac{t\cos(\omega t)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t \cos(\omega(t-2u))du = \frac{t\cos(\omega t)}{2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega(t-2u))\right]_0^t$$

donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{t\cos(\omega t)}{2} - \frac{\sin(\omega t)}{2\omega}.}$$

Pour les questions suivantes, on rappelle que l'on a vu en cours que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{t\sin(\omega t)}{2\omega}$$

et que l'on a vu à l'exercice 5 que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{\sin(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t\cos(\omega t)}{2\omega^2}.$$

On a

$$\frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2} = \frac{p^2+4}{(p^2+4)^2} + \frac{3p-3}{(p^2+4)^2} = \frac{1}{p^2+4} + 3\frac{p}{(p^2+4)^2} - 3\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Alors

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{p^2+4}) + 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{(p^2+4)^2}) - 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p^2+4)^2})$$

i.e.

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}) = \frac{1}{2}\sin(2t) + 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{(p^2+4)^2}) - 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p^2+4)^2})$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t) + 3\frac{t\sin(2t)}{4} - 3\left(\frac{\sin(2t)}{16} - \frac{t\cos(2t)}{8}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}\right) = \left(\frac{5}{16} + \frac{3t}{4}\right)\sin(2t) - \frac{t\cos(2t)}{8}.}$$

On a

$$\frac{p+3}{(p^2+6p+18)^2} = \frac{p+3}{((p+3)^2+9)^2}$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+3}{(p^2+6p+18)^2}\right) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+9)^2}\right)$$

puis

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+3}{(p^2+6p+18)^2}\right) = e^{-3t}\frac{t\sin(3t)}{6}.}$$

On a

$$\frac{3}{(p^2+6p+18)^2} = \frac{3}{((p+3)^2+9)^2}$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p^2+6p+18)^2}\right) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p^2+9)^2}\right)$$

puis

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p^2+6p+18)^2}\right) = 3e^{-3t}\left(\frac{\sin(3t)}{2\cdot 3^3} - \frac{t\cos(3t)}{2\cdot 3^2}\right).}$$

On a

$$\frac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2} = \frac{9p+7}{((p+1)^2+1)^2} = \frac{9(p+1)-2}{((p+1)^2+1)^2}$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2}\right) = 9e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) - 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+1)^2}\right)$$

puis

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2}\right) = 9e^{-t}\frac{t\sin(t)}{2} - 2e^{-t}\left(\frac{\sin(t)}{2} - \frac{t\cos(t)}{2}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2}\right) = \left(\frac{9t-2}{2}\sin(t) - t\cos(t)\right)e^{-t}.}$$

EXERCICE 9. Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 2y+8\sin 2x \\ y(0) & = & -2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 2y+2xe^{2x} \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 2y+e^{3x}\sin x \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''+2y'+5y & = & e^{-x}\sin 2x \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} y''-y & = & \sin 2x \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \end{array}\right.$$

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = 2y(t) + \sin(2t) \quad \text{et} \quad y(0) = -2.$$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p) + 2$$

et d'autre part on a

$$\mathcal{L}(y'(t)) = \mathcal{L}(2y(t)+\sin(2t)) = 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(\sin(2t)) = 2Y(p) + \frac{2}{p^2+4}.$$

D'où

$$pY(p) + 2 = 2Y(p) + \frac{2}{p^2+4}$$

i.e.

$$(p-2)Y(p) = \frac{2}{p^2+4} - 2$$

donc

$$Y(p) = \frac{2}{(p-2)(p^2+4)} - \frac{2}{p-2}.$$

On décompose en éléments simples de sorte que

$$Y(p) = -\frac{1}{4}\frac{p+2}{p^2+4} - \frac{7}{4}\frac{1}{p-2}.$$

On prend alors l'original de $Y(p)$ *i.e.* pour $t \geq 0$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{7}{4}e^{2t}.}$$

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = 2y(t) + 2te^{2t} \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p) - 1$$

et d'autre part on a

$$\mathcal{L}(y'(t)) = \mathcal{L}(2y(t) + 2te^{2t}) = 2\mathcal{L}(y(t)) + 2\mathcal{L}(te^{2t}) = 2Y(p) + \frac{2}{(p-2)^2}.$$

D'où

$$pY(p) - 1 = 2Y(p) + \frac{2}{(p-2)^2}$$

i.e.

$$(p-2)Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2} + 1$$

donc

$$Y(p) = \frac{2}{(p-2)^3} + \frac{1}{p-2}.$$

On prend alors l'original de $Y(p)$ *i.e.* pour $t \geq 0$

$$\boxed{y(t) = (t^2+1)e^{2t}.}$$

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = 2y(t) + e^{3t}\sin(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p) - 1$$

et d'autre part on a

$$\mathcal{L}(y'(t)) = \mathcal{L}(2y(t) + +e^{3t}\sin(t)) = 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(e^{3t}\sin(t)) = 2Y(p) + \frac{1}{(p-3)^2+1}.$$

D'où

$$pY(p) - 1 = 2Y(p) + \frac{1}{(p-3)^2+1}$$

i.e.

$$(p-2)Y(p) = \frac{1}{(p-3)^2+1} + 1$$

donc

$$Y(p) = \frac{1}{((p-3)^2+1)(p-2)} + \frac{1}{p-2}.$$

On décompose en éléments simples de sorte que

$$Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{p-4}{(p-3)^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{p-2} = -\frac{1}{2}\frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-3)^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{p-2}$$

d'où pour $t \geq 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{3t}\left(-\cos(t) + \sin(t)\right) + \frac{3}{2}e^{2t}.}$$

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\sin(2t) \quad \text{et} \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1.$$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p)$$

et

$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2\mathcal{L}(y(t)) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

D'autre part on a

$$\mathcal{L}(y''(t) + 2y'(t) + 5y(t)) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t))$$

i.e.

$$\mathcal{L}(y''(t)) + 2\mathcal{L}(y'(t)) + 5\mathcal{L}(y(t)) = \frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

Il vient donc

$$p^2Y(p) - 1 + 2pY(p) + 5Y(p) = \frac{2}{(p+1)^2+4}$$

i.e.

$$((p+1)^2+4)Y(p) = (p^2+2p+5)Y(p) = \frac{2}{(p+1)^2+4} + 1$$

d'où

$$Y(p) = \frac{2}{((p+1)^2+4)^2} + \frac{1}{(p+1)^2+4}.$$

Or $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p^2+4)^2}) = \frac{\sin(t) - t\cos(2t)}{8}$ donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{((p+1)^2+4)^2}\right) = e^{-t}\frac{\sin(t) - t\cos(2t)}{8}$$

puis pour $t \geq 0$

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\left(\frac{\sin(t) - t\cos(2t)}{4} + \frac{1}{2}\sin(2t)\right).}$$

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = \sin(2t) \quad \text{et} \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1.$$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p) - 1$$

et

$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2\mathcal{L}(y(t)) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1.$$

D'autre part on a

$$\mathcal{L}(y''(t) - y(t)) = \mathcal{L}(\sin(2t))$$

i.e.

$$\mathcal{L}(y''(t)) - \mathcal{L}(y(t)) = \frac{2}{p^2+4}.$$

Il vient donc

$$p^2Y(p) - p + 1 - Y(p) = \frac{2}{p^2+4}$$

i.e.

$$(p^2-1)Y(p) = \frac{2}{p^2+4} + p - 1$$

d'où

$$Y(p) = \frac{2}{(p+1)(p-1)(p^2+4)} + \frac{1}{p+1}.$$

On décompose en éléments simples de sorte que

$$Y(p) = \frac{1}{5}\frac{1}{p-1} + \frac{4}{5}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{5}\frac{2}{p^2+4}$$

d'où pour $t \geq 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}\sin(2t).}$$

EXERCICE **10.** 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{X+3}{X^2+2X-8} \quad G(X) = \frac{2X-1}{X^2+2X-8}$$

2. Résoudre le système différentiel (avec conditions initiales) suivant en utilisant la transformée de Laplace.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& x+5y \\ y'(t) &=& x-3y \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} x(0) &=& 1 \\ y(0) &=& 2 \end{array}\right.$$

On a

$$F(x) = \frac{x+13}{x^2+2x-8} = \frac{x+13}{(x-2)(x+4)} = \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x+4}$$

et

$$G(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-8} = \frac{2x-1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+4}$$

On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{array}\right.$$

On pose $X(p) = \mathcal{L}(x(t))$ et $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ alors

$$\mathcal{L}(x(t) + 5y(t)) = \mathcal{L}(x'(t)) = p\mathcal{L}(x(t)) - x(0) \text{ et } \mathcal{L}(x(t) - 3y(t)) = \mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0)$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{l} X(p) + 5Y(p) = pX(p) - 1 \\ X(p) - 3Y(p) = pY(p) - 2 \end{array}\right.$$

puis

$$\begin{cases} (1-p)X(p)+5Y(p)=-1 \\ X(p)-(p+3)Y(p)=-2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (5+(1-p)(p+3))Y(p)=-1+2(1-p) \\ X(p)-(p+3)Y(p)=-2 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} Y(p)=-\frac{1}{5+(1-p)(p+3)}+\frac{2(1-p)}{5+(1-p)(p+3)}=\frac{2p-1}{p^2+2p-8} \\ X(p)=-2+(p+3)Y(p)=-2+(p+3)\frac{2p-1}{p^2+2p-8}=\frac{p+13}{p^2+2p-8} \end{cases}$$

En utilisant les décomposition en éléments simples obtenues plus haut, il vient

$$X(p)=\frac{5}{2}\frac{1}{p-2}-\frac{3}{2}\frac{1}{p+4} \quad \text{et} \quad Y(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p-2}+\frac{3}{2}\frac{1}{p+4}$$

donc pour $t \geq 0$, on a

$$\boxed{x(t)=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-4t}} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-4t}.}$$

EXERCICE **11.** On considère la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{1}{X^2(X^2+1)}$$

a) Décomposer F en éléments simples et en déduire la valeur de l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} F(t)\ dt$.

b) Déduire également de cette décomposition les originaux respectifs (dans la transformation de Laplace) de F et G avec

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)} \text{ et } G(p)=\frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}$$

c) Retrouver d'une autre façon l'original de $p \mapsto F(p)$ en utilisant le produit de convolution.

On a

$$F(x)=\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

donc

$$\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\left[-\frac{1}{t}-\operatorname{Arctan}(t)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

i.e.

$$\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})+1+\operatorname{Arctan}(1)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}.$$

La décomposition en éléments simples ci-dessus donne aussi

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right)=(t-\sin(t))\mathcal{U}(t).}$$

On a

$$\frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+2)} = \frac{1}{(p+1)^2((p+1)^2+1)}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}\right) = e^{-t}(t-\sin(t))\mathcal{U}(t).}$$

Pour trouver l'original de $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ en utilisant le produit de convolution, on commence par remarquer que

$$F(p) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}(t)\mathcal{L}(\sin(t))$$

donc l'original f de F est donné pour $t \geq 0$ par

$$f(t) = \int_0^t (t-u)\sin(u)du = t\int_0^t \sin(u)du - \int_0^t u\sin(u)du$$

i.e.

$$f(t) = t(1-\cos(t)) - [-u\cos(u)]_0^t - \int_0^t \cos(u)du$$

donc

$$f(t) = t(1-\cos(t)) + t\cos(t) - \sin(t)$$

i.e.

$$f(t) = t - \sin(t).$$