Résumé du cours sur la transformation de LAPLACE

Définitions

Echelon unité : $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Fonction causale : nulle sur $\mathbb{R}_-^*$

Transformée de f causale : $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

F est la transformée de f et f est l'original de F

la convolée de f et de g notée $f * g$ est la fonction définie par $t \mapsto \int_0^t f(x)g(t-x)dx$

Formulaire

Fonction	**Transformée**
δ	1
U	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t^n U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(\omega t)U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)U(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Propriétés

Fonction	**Transformée**
$f + \lambda g$	$F + \lambda G$
$f(t)e^{-\alpha t}U(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)U(t-\tau)$	$F(p)e^{-\tau p}$
$f * g$ convolution	$F(p) \times G(p)$
$U(t)f'(t)$	$p \times F(p) - f(0_+)$
$U(t)\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
$f * g$ convolution	$F(p) \times G(p)$

Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0_+)$ et $\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to \infty} f(t)$

Transformée d'une fonction périodique

Si f est périodique de période T alors en notant f_0 la restriction de f à l'intervalle $[0;T]$ et F_0 sa transformée de Laplace, on a : $F(p) = F_0(p) \times \frac{1}{1-e^{-pT}}$

Intégration et dérivation d'une transformée

On a : $F'(p) = \mathcal{L}[-tf(t)U(t)]$ et $\int_p^{+\infty} F(u)du = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ où $\mathcal{L}$ représente la transformation de Laplace.