CORRIGÉ DE L'EXAMEN D'ANALYSE DE FOURIER

L3 - S5 - 2013-2014 - SESSION 1 - 19 DÉCEMBRE 2013

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux.

(1) Rappeler la définition des coefficients de Fourier c_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

(2) Supposons f paire. Rappeler la définition des coefficients de Fourier a_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

(3) Supposons f impaire. Rappeler la définition des coefficients de Fourier b_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

Solution Exercice 1. Points $4 = 1,5 + 1,25 + 1,25$.

(1) Réponses correctes pour l'expression des c_n (avec la notation $⨍$ introduite au cours des TD, I étant un intervalle de longueur 2π arbitraire) : pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_n &= ⨍ \mathrm{e}^{-inx} f(x)dx := \frac{1}{2\pi} \int_I \mathrm{e}^{-inx} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-inx} f(x)dx. \end{aligned}$$

Ensuite, si one note $f(x \pm 0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x \pm \varepsilon)$ les limites latérales de f au point x, alors le théorème de Dirichlet dit que la séries de Fourier de f convergent en chaque point et

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big).$$

Enfin, avec I comme plus haut, le théorème de Parseval s'écrit :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_I |f(x)|^2 dx.$$

(2) Si f est paire alors $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ et les deux théorèmes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx &= \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big) \\ \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_1^{\infty} |a_n|^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

(3) Si f est impaire alors $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ et les deux théorèmes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} b_n \sin nx &= \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big) \\ \sum_1^{\infty} |b_n|^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = |x|$ pour $-\pi \le x \le \pi$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f.

(2) Justifier la relation $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ si $-\pi \le x \le \pi$.

(3) Déterminer (i.e. calculer la somme) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(4) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(5) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(6) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution Exercice 2. Points $7,5 = 2,5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

(1) La fonction f est paire donc sa série de Fourier est $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big) \end{aligned}$$

si $n > 0$ et $a_0 = \pi$. Donc

$$f(x) \sim \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

(2) f est continue et de classe C^1 par morceaux, donc on peut utiliser le théorème de Dirichlet.

(3) On prend $x = 0$ et on obtient $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(4) Si on décompose $S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ en somme d'après les n pairs et les n impaires on obtient $S = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(5) Le théorème de Parseval dans le cas des fonctions paires donne $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

(6) La même idée que dans (4) donne $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3. Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = x$ pour $-\pi < x \leq \pi$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f.

(2) Justifier la relation $\displaystyle\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$ si $-\pi < x < \pi$.

(3) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(4) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution Exercice 3. Points $5 = 2 + 1 + 1 + 1$.

(1) f est impaire donc sa série de Fourier est $\sum_1^{\infty} b_n \sin nx$ avec

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = 2\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}$$

(2) f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $]-\pi,\pi[$.

(3) On prend $x = \pi/2$ et on obtient $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

(4) Le théorème de Parseval pour les fonctions impaires donne $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 4. On rappelle que si la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ est $\hat{f}(\xi)$ alors les transformées de Fourier de $xf(x)$ et $\frac{d}{dx}f(x)$ sont $-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$ et $2\pi\mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$.

(1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \pi\mathrm{e}^{-2\pi|x|}$ et en déduire celle de $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) Calculer la transformée de Fourier de $j(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
(On pourrait écrire cette fonction comme une dérivée et utiliser le résultat précédent concernant h.)

(3) Calculer la transformée de Fourier de $k(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.
(On écrit $k(x) = xj(x)$ et on utilise la question précédente.)

(4) Calculer la transformée de Fourier de $h^2(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.
(On pourrait exprimer h^2 en termes de h et k et utiliser les résultats des questions (1) et (4))

Solution Exercice 4. Points $8 = (2 + 1,5) + 1,5 + 1,5 + 1,5.$

(1) Soit χ_E la fonction indicatrice d'un sous-ensemble ouvert E de $\mathbb{R}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $1 = \chi_{\mathbb{R}^*_-}(x) + \chi_{\mathbb{R}^*_+}(x)$. Comme g est intégrable, on déduit :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \pi \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{e}^{-2\pi(-x)} \mathrm{d}x + \pi \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{e}^{-2\pi x} \mathrm{d}x.$$

Dans la première intégrale on change la variable de $-x$ en x. On obtient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}g)(\xi) \equiv \widehat{g}(\xi) &= \pi \int_{0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-2\pi x(1+\mathrm{i}\xi)} + \mathrm{e}^{-2\pi x(1-\mathrm{i}\xi)}) \mathrm{d}x \\ &= \pi \lim_{M\to+\infty} \Big[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi x(1+\mathrm{i}\xi)}}{-2\pi(1+\mathrm{i}\xi)} + \frac{\mathrm{e}^{-2\pi x(1-\mathrm{i}\xi)}}{-2\pi(1-\mathrm{i}\xi)} \Big]_0^M = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1-\mathrm{i}\xi} \Big) = \frac{1}{1+\xi^2}.\end{aligned}$$

On observe ainsi que $\mathcal{F}g = h$. Donc $\mathcal{F}h = \mathcal{F}(\mathcal{F}g) \equiv \mathcal{F}^2 g$. Or, on sait depuis le cours (CM et/ou TD) que $\forall x$, $(\mathcal{F}^2 f)(x) = f(-x)$ pourvu que f soit continue & intégrable et que $\mathcal{F}f$ soit intégrable également. C'est le cas de la fonction g de l'énoncé. On en déduit que $\forall x$, $\mathcal{F}h(x) = g(-x)$. Or g étant paire, on a : $\mathcal{F}h = g$.

(2) $\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}$ et une intégration par parties donne le résultat $(\mathcal{F}j)(\xi) = -\mathrm{i}\pi^2 \xi \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}$.

(3) On utilise le résultat précédent et $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x\frac{x}{1+x^2}$ donc la transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}k)(\xi) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{d}{d\xi}\big(-\mathrm{i}\pi^2\xi\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|} \big) = \frac{\pi}{2}\frac{d}{d\xi}\big(\xi\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}\big).$$

(4) On utilise $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ pour obtenir comme transformée de Fourier de h^2 :

$$(\mathcal{F}h^2)(\xi) = \pi\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|} - \frac{\pi}{2}\frac{d}{d\xi}\big(\xi\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}\big) = \frac{\pi}{2}(1+2\pi|\xi|)\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}.$$