Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris

Espaces de Hilbert et analyse de Fourier (L3)

Examen du mardi 7 mai 2013
Corrigé

Tout document ainsi que l'utilisation de tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est interdit.

Exercice 1. *(sur environ 6 points)*

Soit f la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0, \pi], \\ x - \pi & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f dans un repère orthonormé.
2. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de f ? Justifier.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. Montrer que pour tout entier $P \in \mathbb{N}$, la somme partielle de Fourier d'indice impair $S_{2P+1}(f)$ a pour expression

$$S_{2P+1}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{P} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos((2p+1)x).$$

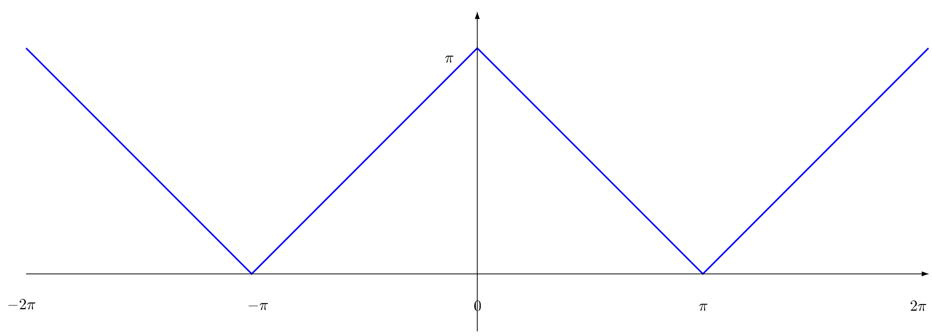
On pourra admettre cette expression pour traiter la question suivante (et uniquement la question suivante...).

5. En déduire les valeurs des séries suivantes :

$$\text{(a)} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Solution de l'exercice 1.

1. Le graphe est le suivant :



2. La fonction f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car affine par morceaux), la série de Fourier $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge donc normalement vers f d'après le théorème de convergence normale de Dirichlet.
3. f est une fonction paire. Par conséquent, ses coefficients $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont tous nuls. Calculons les coefficients $a_n(f)$. Pour $n = 0$,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi-x)^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n \geqslant 1$, en utilisant la parité,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx.$$

En effectuant une intégration par partie,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx \\ &= 0 + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right). \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n(f) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

4. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$,

$$S_{2P+1}(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{2P+1} a_n(f)\cos(nx).$$

De plus, pour tout n pair, on a $a_n(f) = 0$. On peut donc effectuer le changement d'indice $n = 2p+1$ dans la somme ci-dessus, et on obtient

$$S_{2P+1}(x) = a_0(f) + \sum_{p=0}^{P} a_{2p+1}(f)\cos((2p+1)x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{P}\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x).$$

5. (a) Pour tout $P \in \mathbb{N}$, la somme partielle de Fourier de f a pour expression

$$S_{2P+1}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{P}\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x).$$

Comme la série de Fourier converge normalement vers f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $S_{2P+1}(x)$ tend vers $f(x)$ quand P tend vers $+\infty$, soit

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x) = f(x).$$

En particulier en $x = 0$, on a

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} = \pi,$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) On va appliquer l'égalité de Parseval à f. Pour cela on calcule $\|f\|_2^2$.

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

L'égalité de Parseval

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \|f\|_2^2$$

devient ici

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 2. *(sur environ 3,5 points)*

Soit E un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{e_{2n} + ie_{2n+1}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{e_{2n} - ie_{2n+1}}{\sqrt{2}}.$$

Montrer que la famille de vecteurs $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de E.

Solution de l'exercice 2. Montrons d'abord que $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormée. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$\left\|\frac{e_{2n} + \varepsilon i e_{2n+1}}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1.$$

Donc les vecteurs v_n et w_n sont de norme 1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Alors si $m \neq n$, comme la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, on a $\langle v_m, v_n\rangle = \langle v_m, w_n\rangle = \langle w_m, w_n\rangle = 0$. Pour conclure que $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonale il reste à montrer que $\langle v_n, w_n\rangle = 0$. C'est bien le cas car

$$\langle v_n, w_n\rangle = \left\langle \frac{e_{2n} + ie_{2n+1}}{\sqrt{2}}, \frac{e_{2n} - ie_{2n+1}}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 - 1) = 0.$$

Donc $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormée.

Pour montrer que $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de E nous allons montrer que

$$\mathrm{Vect}(\{e_n, n \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{Vect}(\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}).$$

Clairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n et w_n sont dans $\mathrm{Vect}(\{e_n, n \in \mathbb{N}\})$. Réciproquement, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_n + w_n)$$

et

$$e_{2n+1} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(v_n - w_n)$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n est dans $\mathrm{Vect}(\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\})$.

Or d'après le théorème de caractérisation des bases hilbertiennes, une famille orthonormée (u_n) est une base hilbertienne si et seulement si $\mathrm{Vect}(\{u_n, n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E, on en déduit que $\mathrm{Vect}(\{e_n, n \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{Vect}(\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E et donc que $\{v_n, w_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de E.

Exercice 3. *(sur environ 7,5 points)*

On se place sur $L^2_P(0, 2\pi)$. On définit le sous-ensemble H par

$$H = \left\{ f \in L^2_P(0, 2\pi),\ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 + n^2) \left|c_n(f)\right|^2 < +\infty \right\}.$$

1. Soient f et g deux fonctions de $L^2_P(0, 2\pi)$. Rappeler l'expression du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle$ ainsi que l'expression de la norme associée $\|f\|_2$ de $L^2_P(0, 2\pi)$.
2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $L^2_P(0, 2\pi)$.
3. Pour tout couple de fonctions $f, g \in H$ on définit
$$\langle f, g\rangle_H = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 + n^2) c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$
   (a) Justifier que pour tout couple de fonctions $f, g \in H$, $\langle f, g\rangle_H$ est bien défini *(Indication : Montrer que la série définissant $\langle f, g\rangle_H$ est absolument convergente.)*.
   (b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$ est un produit scalaire sur H.
4. On note $\|\cdot\|_H$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$.
   (a) Pour tout $f \in H$, donner l'expression de $\|f\|_H$ en fonction de ses coefficients de Fourier $c_n(f)$.
   (b) Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f appartient à H et que
$$\|f\|^2_H = \|f\|^2_2 + \|f'\|^2_2.$$
5. Soit $f \in H$.
   (a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|$ est convergente. *(Indication : faire apparaître la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 + n^2) \left|c_n(f)\right|^2$ dans l'inégalité.)*
   (b) Montrer que les sommes partielles de Fourier $S_N(f)$ convergent uniformément vers une fonction continue g.

(c) Montrer que $f = g$ p.p., c'est-à-dire que g est le représentant continu de f.

Solution de l'exercice 3.

1.
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $L^2_P(0, 2\pi)$. Les coefficients de Fourier de la fonction nulle sont $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc la série de terme général $(1 + n^2)\left|c_n(f)\right|^2$ est bien sommable.
Soient f et g deux fonctions de H et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par linéarité les coefficients de Fourier de $f + \alpha g$ valent, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f + \alpha g) = c_n(f) + \alpha c_n(g)$. Or,
$$\left|c_n(f) + \alpha c_n(g)\right|^2 = \left|c_n(f)\right|^2 + 2\operatorname{Re}\left(c_n(f)\overline{\alpha c_n(g)}\right) + \left|\alpha c_n(g)\right|^2$$
Mais
$$2\operatorname{Re}\left(c_n(f)\overline{\alpha c_n(g)}\right) \leqslant 2\left|c_n(f)\right|\left|\alpha c_n(g)\right| \leqslant \left|c_n(f)\right|^2 + \left|\alpha c_n(g)\right|^2.$$
Ainsi,
$$\left|c_n(f) + \alpha c_n(g)\right|^2 \leqslant 2\left(\left|c_n(f)\right|^2 + \left|\alpha c_n(g)\right|^2\right) = 2\left(\left|c_n(f)\right|^2 + \left|\alpha\right|^2\left|c_n(g)\right|^2\right).$$
Comme f et gs ont dans H, les séries de termes généraux $(1 + n^2)\left|c_n(f)\right|^2$ et $(1 + n^2)\left|c_n(g)\right|^2$ sont sommables, et donc, vu l'inégalité ci-dessus, la série de terme générale $(1 + n^2)c_n(f + \alpha g)$ est elle aussi sommable, c'est-à-dire $f + \alpha g \in H$.

3. (a) Soient f et g deux fonctions de H. Montrons que la série définissant $\langle f, g\rangle_H$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$\left|c_n(f)\overline{c_n(g)}\right| = \left|c_n(f)\right|\left|c_n(g)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|c_n(f)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|c_n(g)\right|^2.$$
Ainsi,
$$\left|(1 + n^2)c_n(f)\overline{c_n(g)}\right| \leqslant \frac{1}{2}(1 + n^2)\left|c_n(f)\right|^2 + \frac{1}{2}(1 + n^2)\left|c_n(g)\right|^2.$$
Comme f et g sont dans H, par définition les séries de terme général $(1+n^2)\left|c_n(f)\right|^2$ et $(1+n^2)\left|c_n(g)\right|^2$ sont convergentes. Ainsi, la série de terme général $\left|(1 + n^2)c_n(f)\overline{c_n(g)}\right|$ est convergente, et donc la série définissant $\langle f, g\rangle_H$ est bien absolument convergente.

(b) Montrons que $\langle f, f\rangle_H \geqslant 0$ et $\langle f, f\rangle_H = 0 \Rightarrow f = 0$. Pour toute fonction $f \in H$ on a
$$\langle f, f\rangle_H = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(1 + n^2)\left|c_n(f)\right|^2 \geqslant 0.$$
Soit maintenant $f \in H$ telle que $\langle f, f\rangle_H = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $(1 + n^2)\left|c_n(f)\right|^2 = 0$, d'où $c_n(f) = 0$. Par unicité des coefficients de Fourier, on en déduit que f est bien la fonction nulle.
Montrons maintenant que pour tout $f, g \in H$, $\langle f, g\rangle_H = \overline{\langle g, f\rangle_H}$. On a
$$\overline{\langle g, f\rangle_H} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(1 + n^2)c_n(g)\overline{c_n(f)}} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(1 + n^2)\overline{c_n(g)}c_n(f) = \langle f, g\rangle_H$$

Pour finir montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est linéaire à gauche. Soient $f, g, h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\langle f + \alpha g, h \rangle_H &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) c_n(f+\alpha g) \overline{c_n(h)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) \left(c_n(f) + \alpha c_n(g) \right) \overline{c_n(h)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) c_n(f) \overline{c_n(h)} + \alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) c_n(g) \overline{c_n(h)} \\
&= \langle f, h \rangle_H + \alpha \langle g, h \rangle_H,
\end{aligned}$$

où toutes les séries sont bien convergentes d'après la question précédente.

4. (a) Par définition de la norme associée à un produit scalaire,

$$\|f\|_H = \sqrt{\langle f, f \rangle_H} = \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f et sa dérivée f' sont toutes les deux des fonctions de $L^2_P(0, 2\pi)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Ainsi, d'après l'égalité de Parseval pour f et f', on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2$$

et

$$\|f'\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f')|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n^2 |c_n(f)|^2.$$

On a donc

$$\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) |c_n(f)|^2 < +\infty.$$

Ainsi, f appartient bien à H et on a bien $\|f\|_H^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$.

5. (a) On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)| &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \sqrt{1+n^2} |c_n(f)| \\
&\leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{1+n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2) |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ est finie ainsi que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1+n^2)|c_n(f)|^2$ puisque $f \in H$.

(b) Il s'agit d'une proposition vue en cours. On a $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\| c_n(f)e^{inx} \right\|_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty,$$

la série de Fourier converge donc normalement. Notons g la fonction limite des $S_N(f)$. g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme de fonctions continues (puisque la convergence normale implique la convergence uniforme de la suite des sommes partielles).

(c) D'après le théorème de convergence quadratique des séries de Fourier, $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2_P(0, 2\pi)$, c'est-à-dire $\|f - S_N(f)\|_2 \to 0$.
Par ailleurs, $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g. Or

$$\|g - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x) - S_N(f)(x)|^2 dx \leqslant \|g - S_N(f)\|_\infty^2 \to 0,$$

donc $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge également vers g pour la norme quadratique. Par unicité de la limite, $f = g$ p.p.. Donc f est admet bien un représentant continu (et sa série de Fourier converge normalement vers son représentant continu).

Exercice 4. *(sur environ 5 points)*

Soit $f \in L^1([0, +\infty[)$.

1. Montrer que la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par
$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\xi x)dx$$
est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(x)|dx$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en appliquant le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.
4. On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ le prolongement impair de f défini par
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ -f(-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(\xi) = \frac{i}{2}\hat{g}(\xi)$, où $\hat{g}$ est la transformée de Fourier de g.
5. En déduire que si $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour presque tout $x \in [0, +\infty[$,
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\xi)\sin(\xi x)d\xi.$$

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors, comme $|f(x)\sin(\xi x)| \leqslant |f(x)|$ et que $|f|$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(\xi x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Ainsi,
$$\tilde{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\xi x)dx$$
est bien définie.
2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a
$$\left|\tilde{f}(\xi)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\xi x)dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x)\sin(\xi x)|\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$
3. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, l'application $\xi \mapsto f(x)\sin(\xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a la domination
$$|f(x)\sin(\xi x)| \leqslant |f(x)| \in L^1([0,+\infty[).$$
Donc d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $\xi \mapsto \tilde{f}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On remarque que g est intégrable sur $\mathbb{R}$ car f est intégrable sur $[0,+\infty[$. La transformée de Fourier de g est donc bien définie. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^0 (-f(-x))e^{-i\xi x}dx + \int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$
En effectuant le changement de variable $y = -x$ dans la première intégrale,
$$-\int_{-\infty}^0 f(-x)e^{-i\xi x}dx = -\int_0^{+\infty} f(y)e^{i\xi y}dy.$$
D'où,
$$\hat{g}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\left(-e^{i\xi x} + e^{-i\xi x}\right)dx = \int_0^{+\infty} f(x)\left(-2i\sin(\xi x)\right)dx.$$
On a donc $\hat{g}(\xi) = -2i\tilde{f}(\xi)$, soit $\tilde{f}(\xi) = \frac{i}{2}\hat{g}(\xi)$.
5. Supposons que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, vu l'égalité $\tilde{f} = \frac{i}{2}\hat{g}$, $\hat{g}$ appartient également à $L^1(\mathbb{R})$. Ainsi g et $\hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème d'inversion de la transformée de Fourier qui assure que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$
On a
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$
En effectuant le changement de variable $\nu = -\xi$ dans la première intégrale, comme $\hat{g}$ est impaire (car la transformée de Fourier d'une fonction impaire est impaire) on obtient
$$\int_{-\infty}^0 \hat{g}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \int_0^{+\infty} \hat{g}(-\nu)e^{-i\nu x}d\nu = -\int_0^{+\infty} \hat{g}(\nu)e^{-i\nu x}d\nu.$$

Ainsi, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\xi) \left(-e^{-i\xi x} + e^{i\xi x}\right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\xi) 2i \sin(\xi x) d\xi.$$

Enfin, par définition de g, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) = f(x)$, et on a montré que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = -2i\tilde{f}(\xi)$. Ainsi, pour presque tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(-2i\tilde{f}(\xi)\right) 2i \sin(\xi x) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\xi) \sin(\xi x) d\xi.$$