Exercices sur les séries de Fourier

A la mémoire de ma mère,
qui tant me manque, février 2010

Pierre-Jean Hormière

Introduction

C'est toujours la même histoire ! J'avais l'intention de réunir quelques exercices corrigés classiques sur les séries de Fourier, me disant que ce travail serait achevé au bout de quelques pages, mais de fil en aiguille, il a pris des proportions de plus en plus vastes, se transformant en une somme théologique. A la fin, c'est tout juste si les mathématiques toutes entières n'étaient plus qu'un chapitre des séries de Fourier ! Il faut pourtant bien s'arrêter avant de sombrer dans le désespoir et l'inachèvement, afin de ne pas finir comme ces insignes ratés que furent Léonard de Vinci, Michel-Ange et Van Gogh !

Références :

Revue de Mathématiques Spéciales
A. Zygmund : Trigonometric series (Cambridge)
J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse : Cours de taupe, tome 3 (Dunod)
Murray R. Spiegel : Analyse de Fourier (série Schaum)

1. <u>Développements en série de Fourier</u>.

Développer une fonction réglée périodique *f* en série de Fourier, c'est former sa série de Fourier exponentielle ou trigonométrique, et étudier les relations entre *f* et sa série de Fourier, à la lumière des théorèmes disponibles (ici, les trois théorèmes du programme).

Dans tous les exercices, le symbole ~ signifie « a pour série de Fourier ».

<u>Exercice 1</u> : <u>onde carrée ou créneau</u>.

1) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par :

$$(t) = 1 \text{ si } t \in]0, \pi[\ , \ -1 \text{ si } t \in]-\pi, 0[\ , \ 0 \text{ si } t \in \pi\mathbf{Z}.$$

2) Représenter graphiquement les sommes partielles de la série ; vérifier les résultats précédents. Quel phénomène nouveau voit-on apparaître ?

3) Soit S_n la somme partielle d'ordre *n* de la série. Montrer que : $S_n(\frac{\pi}{2n}) \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}.dt > 1$

<u>Solution</u> : est impaire et l'on a aussitôt :

$$(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} .$$

Remarque : le fait que (π – t) = (t) implique $b_{2k}(\ ) = 0$.

La formule de Parseval donne $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

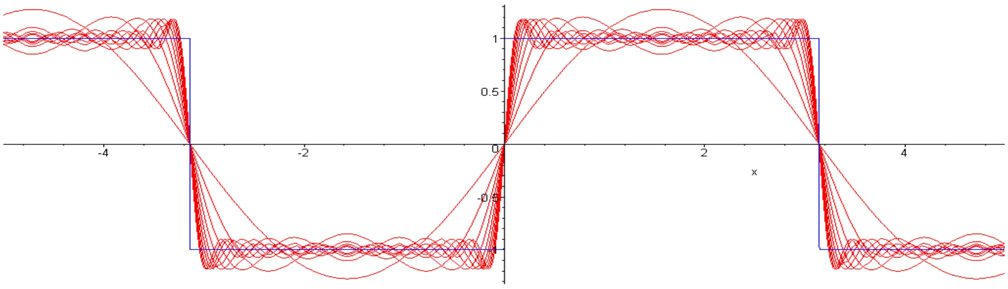
On en déduit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, car $\zeta(2) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\zeta(2)$.

Le théorème de Dirichlet s'applique, car est C^1 par morceaux, et comme elle est réelle, on a :

$$(\forall t \in \mathbf{R}) \quad (t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Si l'on fait $t = \frac{\pi}{2}$, on retrouve $\frac{\pi}{2} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

La série précédente converge <u>simplement</u> (Dirichlet), <u>en moyenne quadratique</u> (Parseval), <u>pas uniformément</u>, car est discontinue, mais <u>uniformément sur tout segment</u> $[\alpha, \pi-\alpha]$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, par un examen précis de la transformation d'Abel, si l'on note que les sommes partielles $V_n = \sin t + \sin 3t + \dots + \sin(2n-1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}$ sont uniformément bornées sur ces segments.



3) <u>Phénomène de Gibbs</u>.

Par sommes de Riemann : $S_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{4}{\pi}\sum_{0\leq k\leq n-1}\frac{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2n})}{2k+1} \to C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}.dt$.

Or $\forall t \in]0, \pi[$ $\frac{\sin t}{t} > 1 - \frac{t}{\pi}$. On en déduit $C > 1$ (cf. aussi ex. 3).

Cela confirme qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, \pi[$: l'approximation est de mauvaise qualité au voisinage des discontinuités.

<u>Exercice 2</u> : Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique définie par :

$$f(t) = c_2 \text{ si } t \in]0, \pi[\ , \ c_1 \text{ si } t \in]-\pi, 0[.$$

<u>Solution</u> : 1) On peut, soit faire un calcul direct, soit se ramener à l'exercice précédent si l'on note que $f = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_2-c_1}{2}$: on conclut alors par linéarité.

$$f(x) \sim \frac{c_1+c_2}{2} + 2.\frac{c_2-c_1}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right).$$

2) Parseval redonne $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, d'où l'on déduit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

3) f est C^1 par morceaux, donc Dirichlet s'applique :

$$\frac{c_1+c_2}{2} + 2.\frac{c_2-c_1}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = c_1 \text{ sur }]-\pi, 0[\ , \ \frac{c_1+c_2}{2} \text{ en } 0 \ , \ c_2 \text{ sur }]0, \pi[.$$

4) On peut faire les mêmes remarques que dans l'exercice précédent.

Exercice 3 : Si $0 < h < \pi$, f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{1}{2h}$ si $|x| < h$, 0 si $h < |x| \le \pi$.

Développer f en série de Fourier. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{h}{2}.(\pi - h)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nh}{n} = \frac{\pi - h}{2}$.

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ pour tout réel x.

Solution : f est paire, et C^1 par morceaux. On trouve aisément :

$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \sum_{n\ge1} \frac{\sin(nh)}{nh}.\cos(nx) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in Z} \frac{\sin(nh)}{nh}.e^{inx}$, en convenant que $\frac{\sin(nh)}{nh} = 1$ pour $n = 0$.

Il y a convergence en moyenne quadratique.

La formule de Parseval s'écrit : $\frac{1}{4\pi h} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{h}{2}.(\pi - h)$.

La fonction f étant C^1- par mocreaux, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n\ge1} \frac{\sin(nh)}{nh}.\cos(nx), \text{ en convenant que } f(\pm h) = \frac{1}{4h}.$$

$x = 0$ donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nh}{n} = \frac{\pi - h}{2}$, et $x = h$ donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nh}{n} = \frac{\pi}{2} - h$.

En particulier, prenant $h = 1$, il vient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ est continue, paire, π-périodique, et telle que $F(x) = \frac{x(\pi - x)}{2}$ sur $]0, \pi[$.

$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ est impaire, 2π-périodique telle que $G(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, 2\pi[$.

Ces résultats vont être retrouvés dans les exercices suivants.

Exercice 4 : **le « toit d'usine »**.

1) Développer en série de Fourier f la fonction 2π–périodique définie par :

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{si} \quad t \in\ ]0, 2\pi[\quad , \quad f(0) = 0.$$

2) Représenter graphiquement les sommes partielles S_n de la série ; visualiser les résultats précédents. Quel phénomène nouveau voit-on apparaître ?

3) a) Montrer que $S_n(\frac{\pi}{n}) \to G = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}.dt$ (constante de Wilbraham-Gibbs).

b) Montrer que $\frac{\sin t}{t} > 1 - \frac{t}{\pi}$ sur $]0, \pi[$; en déduire $G > \frac{\pi}{2}$.

c) La convergence de la série est-elle uniforme sur $]0, 2\pi[$?

4) Montrer que les sommes partielles S_n sont uniformément majorées sur **R**.

[Indication : on pourra étudier leurs variations, qui conduisent à $\forall(n, x)\ |S_n(x)| < G$. Mais on peut aussi prendre $x \in\ ]0, \pi[$, et découper la somme à l'aide de $p = [\pi/x]$.]

5) On considère la série trigonométrique $\sum_{n\ge1} \frac{\cos(nt)}{n^2}$. Montrer qu'elle est définie et continue sur **R** ; calculer sa somme.

Solution : 1) f est impaire, et C^1 par morceaux. On a : $f(t) \sim \sum_{n\ge1} \frac{\sin(nt)}{n}$.

Il y a convergence en moyenne quadratique, et la formule de Parseval implique $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Le théorème de Dirichlet s'applique, et il y a convergence simple de la série :

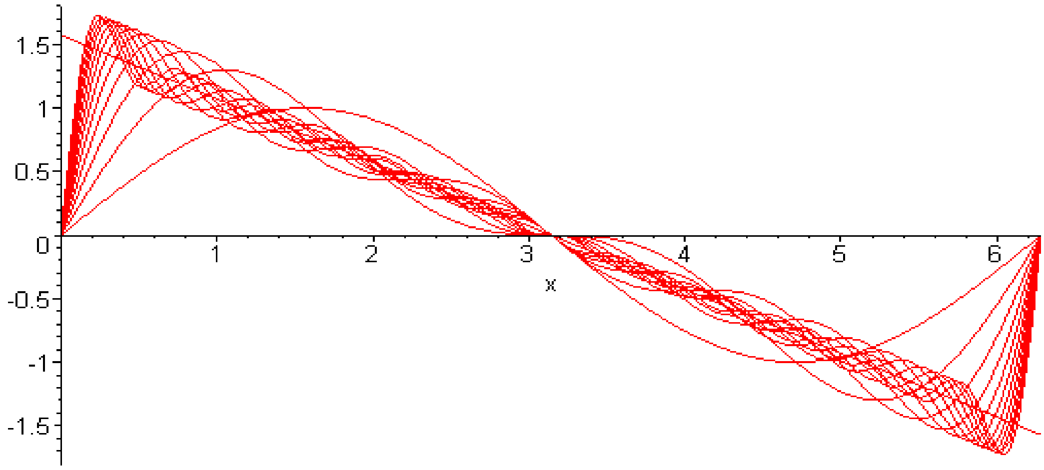
$$f(\mathrm{t}) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nt)}{n} .$$

Notons que $f(\mathrm{t}) = \operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{\pi - t}{2} \right)$.

Niels Abel observa en 1825 que cette série, déjà connue d'Euler, converge simplement vers une fonction discontinue, contredisant une affirmation du *Cours d'Analyse* de Cauchy selon laquelle toute série simplement convergente de fonctions continues a une somme continue. En réalité, il n'y a pas convergence uniforme, car f est discontinue, mais la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$, en vertu de la transformation d'Abel.

Notons en effet $\mathrm{V}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sin \frac{nx}{2} . \sin \frac{(n+1)x}{2}$.

La transformation d'Abel donne $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n(x)}{n(n+1)}$. Il y a convergence normale sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$.



3) <u>Phénomène de Gibbs</u>.

a) Par sommes de Riemann, $\mathrm{S}_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{k} = \frac{\pi}{n} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{k\pi/n} \to \mathrm{G} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} . dt$

(constante de Wilbraham-Gibbs).

b) Montrer $\frac{\sin t}{t} > 1 - \frac{t}{\pi}$ sur $]0, \pi[$ équivaut à montrer $\sin \mathrm{t} - \mathrm{t} + \frac{t^2}{\pi} > 0$. Cela se fait par étude des variations. On en déduit que $\mathrm{G} > \frac{\pi}{2}$ (théorème aux 4 hypothèses).

c) La convergence de la série n'est pas uniforme sur $]0, 2\pi[$, puisque $\sup | \mathrm{S}_n(x) - f(x) | \to 0$.

4) <u>Les sommes partielles sont bornées</u>. Cela peut se montrer par étude des variations.

Nous allons procéder autrement, et montrer précisément que $\forall (n, x) \quad | \mathrm{S}_n(x) | < 2 + \pi$.

Par imparité et périodicité, il suffit de supposer $0 < x < \pi$. Posons $p = \left[\frac{\pi}{x} \right]$.

• Si $n \leq p$, $| \mathrm{S}_n(x) | = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{k} = nx \leq px \leq \pi$.

• Si $n > p$, $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(kx)}{k} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Une transformation d'Abel montre que $\left| \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2$.

$$\sum_{k=p+1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=p+1}^{n}\frac{V_k - V_{k-1}}{k} = \sum_{k=p+1}^{n}\frac{V_k}{k} - \sum_{k=p}^{n-1}\frac{V_k}{k+1} = \frac{V_n}{n} - \frac{V_p}{p+1} + \sum_{k=p+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).V_k$$

Or $|V_n| = |\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)| \le \frac{1}{\sin(x/2)}$, donc $\left|\sum_{k=p+1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right| \le \frac{2}{(p+1)\sin(x/2)} \le \frac{2\pi}{(p+1)x} < 2$.

(en utilisant l'inégalité de convexité : $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin u \ge \frac{2u}{\pi}$).

5) Fixons $\theta \in]0, 2\pi[$.

Par convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$ sur $[\pi, \theta]$ ou $[\theta, \pi]$, on a $\int_\pi^\theta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}.dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\pi^\theta\frac{\sin(nt)}{n}.dt$

Le premier membre vaut $\int_\pi^\theta\frac{\pi-t}{2}.dt = -\frac{(\pi-\theta)^2}{4}$.

Le second membre vaut $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\cos(n\theta)+(-1)^n}{n^2} = -B(\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -B(\theta) - \frac{\pi^2}{12}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall\theta \in]0, 2\pi[\quad B(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad B(0) = B(2\pi) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

On a évité la difficulté en 0 car il n'y pas convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$ au voisinage de 0.

Mais on pouvait aussi intégrer sur $[0, \theta]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, les sommes partielles de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$ obéissant au théorème de convergence dominée.

<u>Exercice 5</u> : 1) Développer en série de Fourier la fonction 2π–périodique impaire f définie par

$$f(t) = \frac{\pi-t}{2} \quad \text{si } 0 < t < \pi .$$

2) Soit g la fonction 2π–périodique impaire continue, affine sur $[0, 1]$ et égale à f sur $[1, \pi]$.

Montrer que $\sum_{n\ge1}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n\ge1}\frac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n\ge1}\frac{\sin^2 n}{n^4}$.

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 2000, RMS n° 354]

1) cf. exercice précédent.

2) On trouve : $g(x) \sim \sum_{n\ge1}\frac{\sin n}{n^2}\sin(nx)$. g étant C^0 et C^1 par morceaux, il y a convergence normale.

Par évaluation en 1 : $g(1) = \sum_{n\ge1}\frac{\sin^2 n}{n^2} = f(1) = \sum_{n\ge1}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

Enfin, Parseval donne : $\sum_{n\ge1}\frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^2(x).dx = \frac{(\pi-1)^2}{6}$.

<u>Exercice 6</u> : **<u>La quinconce</u>.**

Développer en série la fonction 2π–périodique f définie par $f(t) = |t|$ si $|t| \le \pi$.
En considérant la quasi-dérivée de f, quels résultats retrouve-t-on ?

<u>Solution</u> : f est paire, continue, et C^1 par morceaux.

On a : $$f(t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\ge0}\frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}.$$

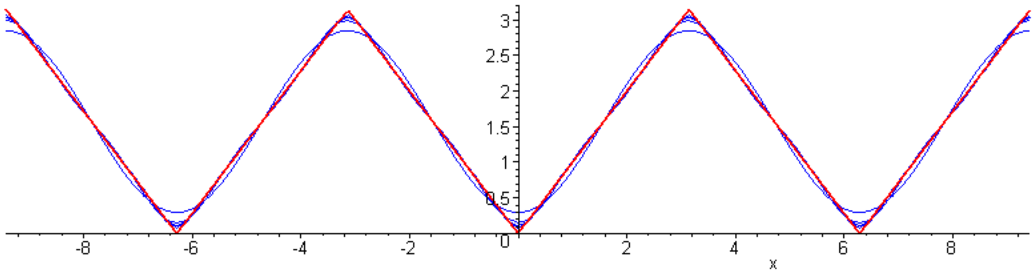
La formule de Parseval implique $\sum_{n\ge0}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$; d'où $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Il y a convergence normale de la série vers f.

Si t = 0 ou π, on trouve : $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, qui redonne ζ(2).

La quasi-dérivée de *f* n'est autre que l'onde carrée. D'après le cours, sa série de Fourier est la dérivée de celle-ci. On retrouve l'exercice 1.

```
> with(plots):
> f:=x->abs(x-2*floor((x+Pi)/(2*Pi))*Pi);
> S:=(n,x)->Pi/2-4/Pi*sum(cos((2*k+1)*x)/(2*k+1)^2,k=0..n);
> g:=plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi,color=red,thickness=2):
p:=n->plot(S(n,x),x=-3*Pi..3*Pi,color=blue):
display({g,p(0),p(1),p(2),p(3)});
```



Exercice 7 : 1) Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = |\sin x|$.

2) Montrer que $(\forall x \in \mathbf{R})\ |\sin x| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8.\sin^2(kx)}{\pi.(4k^2-1)}$.

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\sin((2k+1)x)$.

4) Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, soit $I_m = \int_0^{\pi/2}\frac{2|\sin(mt)|}{\pi \sin t}.dt$. Montrer que $I_m = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{nm-1}\frac{1}{(2k+1)(4n^2-1)}$.

5) Donner un équivalent de (I_m).

Solution : [Oral Mines 2006, RMS n° 236]

1) *f* est π-périodique paire, continue et C^1 par morceaux.

On trouve $|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$. Il y a convergence normale.

2) $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-2\sin^2(kx)}{4k^2-1} = A + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8.\sin^2(kx)}{\pi.(4k^2-1)}$.

La constante $A = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}$ est nulle : il suffit de faire $x = 0$.

3) $\sum_{k=0}^{n}\sin((2k+1)x) = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n}\exp(i(2k+1)x) = \dots = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}$.

4) $I_m = \int_0^{\pi/2}\frac{2|\sin(mt)|}{\pi \sin t}.dt = \frac{16}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 nmt}{(4n^2-1)\sin t}.dt = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 mnt}{\sin t}.dt$ (cvg. normale)

$= \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{nm-1}\frac{1}{(2k+1)(4n^2-1)}$ (question 3).

5) Ecrire $I_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(mt)|}{t}.dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)|\sin(mt)|dt$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{m\pi/2}\frac{|\sin u|}{u}.du + O(1) \sim \frac{2}{\pi}\ln m$, après découpe à la Chasles et encadrement.

En effet, $\int_0^{N\pi}\frac{|\sin u|}{u}.du = \sum_{k=0}^{N-1} I_k$, où $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}.du = \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\theta+k\pi}.d\theta$.

Pour $k \geq 1$, $\frac{2}{(k+1)\pi} = \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{(k+1)\pi}.d\theta \leq I_k \leq \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{k\pi}.d\theta = \frac{2}{k\pi}$, etc.

<u>Remarque</u> : ce résultat démontre une formule de Szegö relative aux constantes de Lebesgue.

<u>Exercice 8</u> : **<u>Le feston</u>.**

1) Développer en série de Fourier la fonction f 2π–périodique définie par $f(t) = t^2$ si $|t| \leq \pi$. Que trouve-t-on si $t = 0, \pi$? Prendre d'autres valeurs. Calculer $\zeta(4)$.

2) Développer en série de Fourier la « dérivée » de f.

<u>Solution</u> :

1) f est paire, continue et C^1 par morceaux. On a : $f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n.\frac{\cos(nt)}{n^2}$.

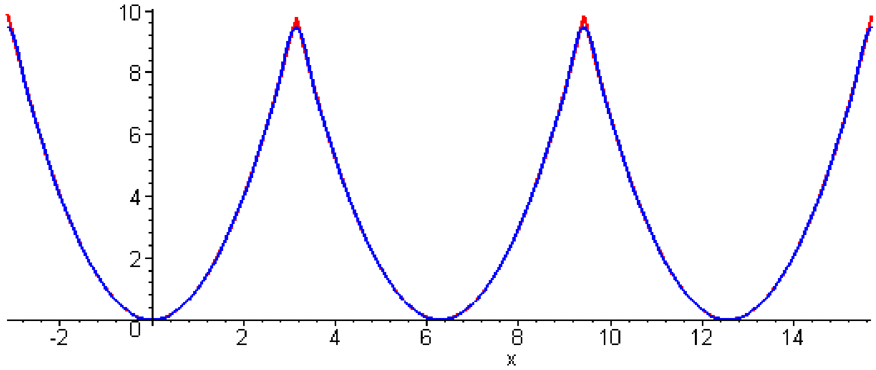
La formule de Parseval implique $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Il y a convergence normale de la série vers f.

$t = 0$ donne $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $t = \pi$ donne $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. Les deux redonnent $\zeta(2)$.

2) La « dérivée » de f est $g(t) = 2t$ si $|t| \leq \pi$. En vertu du cours, $g(t) \sim 4\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}.\frac{\sin(nt)}{n}$.

Il y a CMQ, et égalité par Dirichlet. D'ailleurs on retrouve le toit d'usine.

```
> with(plots):
> k:=x->floor((x+Pi)/(2*Pi));f:=x->(x-k(x)*2*Pi)^2;
> S:=(n,x)->Pi^2/3+4*sum((-1)^p*cos(p*x)/p^2,p=1..n);
> p:=n->plot(S(n,x),x=-Pi..5*Pi,color=blue,thickness=2);
g:=plot(f(x),x=-Pi..5*Pi,thickness=2):
> display({g,p(10)});
```



<u>Exercice 9</u> : Montrer que :

$\forall x \in]0, \pi[\quad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.

$\forall x \in [0, \pi] \quad x.(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k^2} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

Calculer $\zeta(6)$.

<u>Solution</u> : 1) Pour développer $\frac{\pi - x}{2}$ en série de sinus, il faut la rendre impaire. Pour la développer en série de cosinus, il faut la rendre paire.

Soit f la fonction impaire 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ sur $]0, \pi[$.

On a aussitôt $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, et on conclut par Dirichlet.

Soit g la fonction paire 2π-périodique définie par $g(x) = \frac{\pi-x}{2}$ sur $[0, \pi]$.

On a aussitôt $g(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$, et on conclut par convergence normale.

L'identité proposée s'obtient par restriction à $]0, \pi[$.

2) Même méthode.

Exercice 10 : En calculant un seul développement en série de Fourier, déterminer ceux de :

sup(sin, 0) , sup(cos, 0) , | sin | , | cos | .

Solution : [Oral Mines 2002, RMS n° 249]

1) Notons respectivement f, g, h, k ces quatre fonctions. Elles sont continues et C^1 par morceaux. Après examen de leurs graphes, nous allons développer en série de Fourier la seconde, g.
Dans tous les cas, la série de Fourier d'une translatée est la translatée de la série de Fourier. Cela découle, non de l'égalité entre une fonction continue et sa série de Fourier, mais d'un calcul manuel des coefficients de Fourier de la translatée.

2) Après calculs, on trouve $\mathrm{g}(\theta) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.\cos(2k\theta)$ (1).

D'où : $f(\theta) = \mathrm{g}(\theta - \frac{\pi}{2}) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1}$ (2).

Puis : $\mathrm{h}(\theta) = f(\theta) + f(\theta+\pi) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1}$ (3).

Enfin : $\mathrm{k}(\theta) = \mathrm{h}(\theta + \frac{\pi}{2}) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.\cos(2k\theta)$ (4).

Dans les quatre cas, il y a convergence normale.

Variante : Comme il y a convergence normale en (1), on peut translater et constater que les séries (2), (3) et (4) sont normalement convergentes, donc sont les séries de Fourier de leurs sommes.

Conclusion : on a les développements en série de Fourier normalement convergents :

$$\sup(\sin\theta, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1}$$

$$\sup(\cos\theta, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.\cos(2k\theta)$$

$$|\sin\theta| = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k\theta)}{4k^2-1} \qquad |\cos\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.\cos(2k\theta)$$

Exercice 11 : Montrer $\forall x \in [0, \pi]$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ pour $k = 1, 2, 3$.

Solution : [Oral Mines 2005, RMS n° 491]

1) Il suffit de développer en série de Fourier la fonction f paire 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

Cette fonction étant continue et C^1 par morceaux, il y a convergence normale.

2) $x = 0$ donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Parseval donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Pour avoir $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$, intégrer terme à terme sur $[0, x]$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ = etc. et appliquer Parseval.

Exercice 12 : 1) Développer en série de Fourier la fonction f 2π–périodique telle que :
$f(x) = \frac{1}{12}x.(\pi - x).(\pi + x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Cas où $x = \frac{\pi}{2}$. Calculer $\zeta(6)$.
2) Développer en série de Fourier la fonction g 2π–périodique telle que :
$g(x) = \frac{1}{12}x.(x - \pi).(x - 2\pi)$ sur $[0, 2\pi]$. Cas où $x = \frac{\pi}{2}$. Calculer $\zeta(6)$.

Solution : f et g sont impaires, continues et C^1 par morceaux.

Après calculs : $f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin(kx)}{k^3}$ et $g(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k^3}$. Il y a convergence normale.

$f(\frac{\pi}{2}) = \boxed{\frac{\pi^3}{32} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}}$. Parseval donne $\frac{1}{2}\zeta(6) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x).dx$, donc : $\boxed{\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}}$.

Exercice 13 : Développer en série de Fourier la fonction f 2π–périodique impaire telle que :
$f(t) = t^4 - 2\pi t^3 + \pi^3 t$ sur $[0, \pi]$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^5}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{10}}$ et $\zeta(10)$.

Solution : [Oral Mines 1990, Arts et métiers 1990, Oral X 1993]
Sur $[0, \pi]$, $f(x) = x(x - \pi)(x^2 - \pi x - \pi^2)$, et $f(x) = f(\pi - x)$.
L'imparité implique $a_n(f) = 0$, $f(x) = f(\pi - x)$ implique $b_{2k}(f) = 0$.

Après calculs, $f(x) \sim \frac{96}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^5}$.

Parseval donne $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{10}} = \frac{31.\pi^{10}}{2903040}$, puis $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$.

f étant continue et C^1 par morceaux, il y a convergence normale $f(x) = \frac{96}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^5}$.

$x = \frac{\pi}{2}$ donne $\frac{5\pi^4}{6} = \frac{96}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^5}$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$.

Conclusion : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{10}} = \frac{31.\pi^{10}}{2903040}$, $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$.

Exercice 14 : Développer en série de Fourier la fonction f 2π–périodique et paire telle que $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0, \pi]$. Montrer que la série converge normalement.

Solution : [Oral Centrale 2005, RMS n° 808]
La fonction f est continue, mais n'est pas C^1 par morceaux, car elle a en 0 une tangente verticale.
$a_0(f) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$, et, pour $n \geq 1$, $b_n(f) = 0$ et

$a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{x}.\cos(nx).dx$ = ipp + chgt var = $-\dfrac{1}{\pi.n^{3/2}}\displaystyle\int_0^{n\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}.dx$.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}.dx$ est (semi) convergente, $a_n(f) \sim -\dfrac{1}{\pi.n^{3/2}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}.dx = O(\dfrac{1}{n^{3/2}})$.

La série de Fourier de f est normalement convergente. Sa somme g est continue et a mêmes coefficients de Fourier que f. Comme f est continue, $f = g$ par Parseval.

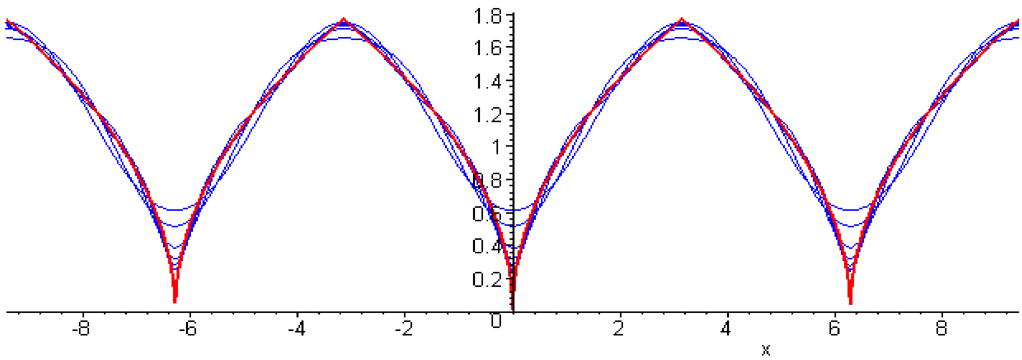
$$\boxed{f(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.dx\Big).\cos(nt) = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}}\sin(u^2).du\Big).\cos(nt)}$$

On voit donc qu'il peut y avoir convergence normale vers f de la série de Fourier, sans que les hypothèses du théorème du cours (f continue et C^1 par morceaux) soient satisfaites.
On trouvera dans la suite un théorème généralisant cette situation.

Introduisons avec Maple la fonction FresnelS(x) = $\displaystyle\int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}u^2).du$.

Alors $a_n(f) = -\dfrac{1}{n^{3/2}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ FresnelS($\sqrt{2n}$) si $n > 0$. D'où les voûtes gothiques :

```
> with(plots):
> k:=x->floor((x+Pi)/(2*Pi)):f:=x->sqrt(abs(x-2*k(x)*Pi)):
> p:=plot(f(x),x=-3*Pi..3*Pi,numpoints=2000,thickness=2):
> a:=n->-sqrt(2/Pi)/n^(3/2)*FresnelS(sqrt(2*n)):
> S:=(n,x)->2*sqrt(Pi)/3+sum(a(k)*cos(k*x),k=1..n):
> q:=n->plot(S(n,x),x=-3*Pi..3*Pi,color=blue):
> display({p,q(1),q(2),q(4),q(6),q(8),q(10)});
```



Exercice 15 : Soit α réel, f : **R** → **R** 2π-périodique paire telle que ∀t ∈ [0, π] $f(t) = t^{\alpha}$.
a) Si α ≥ 1, que dire de la convergence de la série de Fourier ?
b) Si α = 1, quelle est la série de Fourier de f ? En déduire ζ(2) et ζ(4).
c) Si α ∈]0, 1[, calculer $a_n(f)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{t^{1-\alpha}}.dt$. Montrer que la suite $(n^{1+\alpha}a_n(f))$ est bornée.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la série de Fourier de f ?

Solution : Oral Centrale PC 2010, RMS n° 1003.

Exercice 16 : Développer en série de Fourier $f(x) = (\sin x)^3$.

Solution : [Oral X 2008, RMS n° 301]
Belle occasion de vérifier si le candidat a du bon sens… Au tennis, on nomme ça un « amorti ».

La fonction $f(x) = \sin^3 x$ est tout bonnement un polynôme trigonométrique, donc est son propre développement en série de Fourier. $f(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = i\,\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{3ix}}{8} = \frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$.

Exercice 17 : Développer en série de Fourier $f(x) = \text{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$?

Solution : [Oral X 2008, RMS n° 302]
f est 2π-périodique, impaire, et si $|x| < \pi$, $f(x) = x/2$. Elle n'est pas définie en $\pi + 2k\pi$, mais on peut sans dommage poser $f(\pi) = 0$. On trouve $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\sin(nx)$.

Parseval donne, comme d'hab. $\zeta(2) = \pi^2/6$. Le théorème de Dirichlet s'applique : $f(x)$ = etc.

Enfin, si l'on fait $x = 1 + \pi$, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

Exercice 18 : Développer en série de Fourier $f(x) = \exp(e^{ix})$.

En déduire $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos x}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$. Retrouver cette formule directement.

Solution : [Oral Mines 2005, RMS n° 489, Mines MP 2013, RMS n° 607]
La fonction $f(x) = \exp(e^{ix}) = e^{\cos x}(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x))$ est C^∞ 2π-périodique.

Point n'est besoin de calculer ses coefficients de Fourier. Il suffit de noter que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$.

Il y a convergence normale, donc c'est le développement en série de Fourier de f.

Par conséquent $c_n(f) = \frac{1}{n!}$ si $n \geq 0$, $c_n(f) = 0$ si $n < 0$.

Parseval donne aussitôt : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos x}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Autre solution : par convergence normale :

$$\int_0^{2\pi}e^{2\cos x}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}\cos^n x.dx = 4\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^{2m}}{(2m)!}W_{2m} = 2\pi\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m!)^2}.$$

En effet, si n est impair, $\int_0^{2\pi}\cos^n x.dx = 0$, et si $n = 2m$, $\int_0^{2\pi}\cos^{2m}x.dx = 4\,W_{2m} = 4\,\frac{\pi}{2}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$.

Exercice 19 : Calculer les coefficients de Fourier réels de $f : x \to \text{sh}(\sin x).\cos(\cos x)$.

Solution : [Oral TPE 2009, RMS n° 968]
La fonction f est C^∞, 2π-périodique, π-antipériodique et impaire, de **R** dans **R**. Ecrivons :

$$\text{sh}(\sin x).\cos(\cos x) = \frac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{2}\,\frac{e^{i.\cos x}+e^{-i.\cos x}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{\sin x+i\cos x} - e^{-\sin x-i\cos x} - e^{-\sin x+i\cos x} + e^{\sin x-i\cos x}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{i.\exp(-ix)} - e^{-i.\exp(-ix)} - e^{i.\exp(ix)} + e^{-i.\exp(ix)}\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}[1-(-1)^n]\,[\exp(-inx) - \exp(inx)]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}(-2i)\sin((2k+1)x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sin((2k+1)x).$$

C'est une série trigonométrique normalement convergente, donc elle est bien la série de Fourier de sa somme.

Exercice 20 : **Développements eulériens.**

1) a) Soit $\alpha \in$ **C**–**Z** . Développer en série de Fourier la fonction f la fonction 2π–périodique définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$ si $|t| \leq \pi$.

b) En déduire : $\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \dfrac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$ et $\pi.\text{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$.

Et, si $\alpha \in$ **R**–**Z**, la formule $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)} = \sum_{n\in Z}\dfrac{1}{(\alpha-n)^2}$.

c) Montrer que $\varphi(x) = \text{cotan}\, x - \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $]-\pi, \pi[$. Calculer $\int_0^x \varphi(t).dt$.

d) En déduire que $\forall x \in\ ]-\pi, \pi[\quad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$.

2) Soit toujours $\alpha \in$ **C**–**Z** . Développer en série de Fourier la fonction g 2π–périodique définie par $g(t) = \sin(\alpha t)$ si $|t| < \pi$. Formules obtenues ?

3) a) Soit $\alpha \in$ **C**–i.**Z**. Développer en série de Fourier la fonction 2π–périodique définie par $h(t) = \text{ch}(\alpha t)$ si $|t| \leq \pi$. Formules obtenues ?

b) Montrer que $\psi(x) = \coth x - \dfrac{1}{x}$ est continue sur **R**. Exprimer $\psi(x)$ comme somme d'une série de fonctions rationnelles.

c) Prouver que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})$ converge, et calculer sa valeur.

4) Soit $\alpha \in$ **C**–i.**Z**. Développer en série de Fourier la fonction 2π–périodique définie par $k(t) = \text{sh}(\alpha t)$ si $|t| < \pi$. Formules obtenues ?

Solution : Cet exercice apparemment artificiel, est d'un grand intérêt mathématique, car il fournit à peu de frais des « développements eulériens » des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire des développements en série de fractions rationnelles, ou en produits infinis, analogues aux factorisations de polynômes ou aux décompositions en éléments simples de fractions rationnelles. Traitons 1)

1) f est paire, continue et C^1 par morceaux. $b_n(f) = 0$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha t).\cos(nt).dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((\alpha+n)t)+\cos((\alpha-n)t)].dt = (-1)^n\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\,\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} .$$

Finalement : $$f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}.\cos(nt) ,$$

et il y a convergence normale de la série vers f . Si l'on fait t = 0 puis t = π, on obtient :

$\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \dfrac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\alpha-n}$
$\pi.\text{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\alpha-n}$.

Si $\alpha \in$ **R** – **Z**, Parseval donne $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)} = \sum_{n\in Z}\dfrac{1}{(\alpha-n)^2}$.

En effet, $$(f\,|\,f) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\alpha\pi)}{4\alpha\pi} = \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\alpha^2\pi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n})^2$$

$$= \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2}\left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{(\alpha-n)^2}+\frac{1}{(\alpha+n)^2}+\frac{2}{\alpha^2-n^2})\right]$$

$$= \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n\in Z}\frac{1}{(\alpha-n)^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\in Z}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right] = \text{etc. en utilisant } \pi.\text{cotan}(\alpha\pi) = \ldots$$

Remarque : Cette formule est valable pour tout $\alpha \in$ **C** − **Z**.

La fonction $\varphi(x) = \text{cotan}\, x - \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $]-\pi, \pi[$, car elle est développable en série entière en 0 : écrire $\varphi(x) = \frac{x.\cos x - \sin x}{x \sin x}$. Il découle de ce qui précède que $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$.

De plus si $|x| < \pi$, par intégration terme à terme (convergence normale)

$$\int_0^x \varphi(t).dt = \ln\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) . \quad \text{Donc}$$

$$\boxed{\forall x \in\ ]-\pi, \pi[\qquad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) .}$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve une formule de Wallis : $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 21 :

1) Soit a réel. Montrer que l'intégrale $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}.dx$ converge, et que $F(a) = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$.

2) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, 2\pi[$.

3) En déduire $F(a)$.

Solution : [Oral Centrale 1996, Mines 2005, RMS n° 487]

1) Formellement :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin(ax)}{1-e^{-x}}.dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\sin(ax).dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin(ax).dx = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2} .$$

Nous sommes sous le parapluie du théorème d'intégration terme à terme des séries, si l'on observe que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}|\sin(ax)|.dx \leq |a| \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x.e^{-nx}.dx = \sum_{n\geq 1} \frac{|a|}{n^2} < +\infty.$$

2) Après calculs : $f(x) \sim \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi} \sum_{n\in Z} \frac{a+in}{a^2+n^2}.e^{inx}$. f est C^1 par morceaux. Par Dirichlet :

$$\frac{1}{2}(f(0+)+f(0-)) = \frac{1+e^{2a\pi}}{2} = \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi} \sum_{n\in Z} \frac{a+in}{a^2+n^2} = \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi} \sum_{n\in Z} \frac{a}{a^2+n^2} \quad \text{(ne garder que la partie réelle).}$$

D'où $\qquad \pi.\coth(a\pi) = \sum_{n\in Z} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{1}{a} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$.

3) Finalement :

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}.dx = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{1}{2}\left[\, \pi.\coth(a\pi) - \frac{1}{a} \,\right].}$$

Remarque : On en déduit que $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}$. Cela peut se retrouver au moyen d'un encadrement intégral, en considérant, à a fixé, la fonction $t \to \frac{a}{a^2+t^2}$. On ne peut donc pas passer à la limite dans la série : la série converge normalement sur tout segment $|a| \leq A$, mais il n'y a pas convergence uniforme sur **R**.

Exercice 22 : Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par

$f(x) = -\ln\left|\, 2\sin\frac{x}{2}\,\right|$ si $0 < |x| \leq \pi$, $f(0) = 0$. Quels problèmes cela pose-t-il ?

Solution : Cet exercice est d'un grand intérêt… car-mais il déborde du programme.

1) La fonction f est paire, 2π-périodique, continue sur $\mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$, intégrable au V(0+), car

$$f(x) = \ln(x + O(x^3)) \sim -\ln x \text{ au V}(0+)$$

donc f est intégrable et de carré intégrable sur tout segment, et elle admet des coefficients de Fourier. Cependant, f n'est pas bornée, donc non réglée.

2) Série de Fourier. $b_n(f) = 0$ par imparité.

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\ln(2.\sin\frac{x}{2}).dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(2.\sin u).du = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(2.\cos v).dv$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(2.\sin(2u)).du = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(2.\sin u).du \text{ , (symétrie, pliage, etc.) donc } a_0(f) = 0 .$$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\cos(nx).\ln(2.\sin\frac{x}{2}).dx = \text{IPP}\ldots = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)+\sin((n-\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.dx = \frac{1}{n} .$$

Conclusion : $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$.

3) Reste à appliquer les théorèmes… mais ils sont hors programme !

La formule de Parseval s'étend aux fonctions 2π-périodiques réglées sur $]-\pi, \pi[$ telles que $\int_{-\pi}^{+\pi}|f|^2$ converge. C'est le cas ici, donc $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln^2(2.\sin\frac{x}{2}).dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Le théorème de Dirichlet s'étend également (Arnaudiès-Fraysse, t. 3, remarque 2, p. 316), et donne

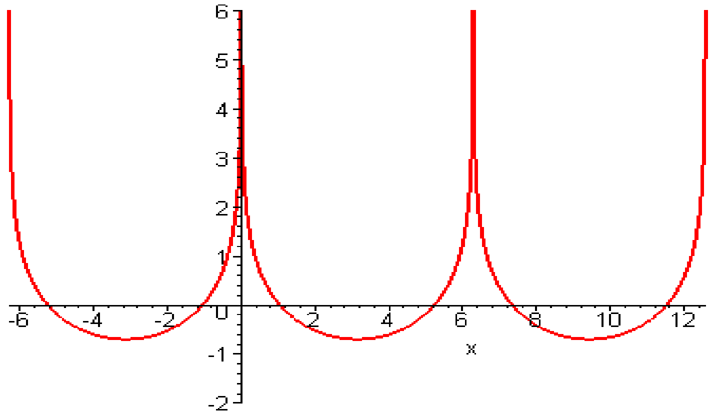
$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}-2\pi\mathbf{Z} \qquad -\ln\left|\,2\sin\frac{x}{2}\,\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n} .}$$

4) Peut-on rester dans le cadre du programme ?

Certainement, en considérant la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\frac{\cos(nx)}{n}$ $(0 < r < 1)$.

Elle est normalement convergente, et on peut la calculer par dérivation-intégration.
On peut lui appliquer Parseval et faire tendre r vers 1 par associativité de bornes supérieures.
On peut enfin raisonner par convergence simple à condition d'appliquer la limite radiale d'Abel.
Bref, cela donnerait un joli énoncé d'écrit.

```
> f:=x->-ln(abs(2*sin(x/2)));plot(f(x),x=-2*Pi..4*Pi,-2..6,numpoints=2000,
thickness=2);
```



Exercice 23 : 1) Soit F : $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}$ définie par $F(x, y) = x(1-y)$ si $x \le y$, $F(x, y) = y(1-x)$ si $y \le x$.

Montrer que $F(x, y) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi x).\sin(n\pi y)}{n^2}$.

2) Représenter les courbes d'équations respectives :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx).\sin(ny)}{n^2} = 0 \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx).\sin(ny)}{n^3} = 0 .$$

Solution : [Oral X 2008, etc. ; cf. aussi mon problème sur le noyau F et ses fonctions propres.]

1) Le développement en série de Fourier des fonctions de deux variables n'est pas au programme. Fixons donc $y \in [0, 1]$ et développons en série de Fourier la fonction impaire 2-périodique définie par $f(x) = x.(1 - y)$ si $0 \le x \le y$, $f(x) = y.(1 - x)$ si $y \le x \le 1$.

On trouve aisément : $f(x) \sim \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\pi x).\sin(n\pi y)}{n^2}$.

De plus f est continue et C^1 par morceaux : il y a égalité avec convergence normale.

Remarque : Parseval donne ici $\forall y \in [0, 1]$ $\dfrac{1}{3} y^2 (1 - y)^2 = \dfrac{2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(n\pi y)}{n^4}$

2) Soit F la fonction $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admettant $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ pour groupe de périodes et prolongeant F.

Elle vérifie $F(x, y) = \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\pi x).\sin(n\pi y)}{n^2}$ pour tout couple de réels (x, y).

Du coup, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$ ou $y \in \mathbf{Z}$.

$G(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\pi x).\sin(n\pi y)}{n^3}$ se calcule par dérivation-réintégration.

$G(0, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\pi y)}{n^3}$ est la fonction 2-périodique qui vaut $\dfrac{\pi^3}{12} y(y - 1)(y - 2)$ sur $[0, 2]$.

Pour $0 \le x$ et $y < 1$, $G(x, y) = G(0, y) + \int_0^x F(t,y).dt$.

Exercice 24 : Développer en série de Fourier $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$ et $g(x) = \dfrac{1+\cos x}{4-2\cos x}$.

Solution : [Oral X 1997, RMS n° 70, etc.]

Exercice important et instructif. Traitons en détail la fonction f.

1) La fonction f est C^∞ , paire et 2π-périodique. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f, et les coefficients de Fourier sont à décroissance rapide. Pour calculer la série de Fourier, deux méthodes sont possibles.

2) Méthode directe. $b_n = 0$, $a_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi \dfrac{\cos(nx)}{5+4.\cos x}.dx$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dx}{5+4.\cos x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)(5+4.\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} .$$

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{2\cos x.\cos(nx)}{5+4.\cos x}.dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(5+4\cos x-5).\cos(nx)}{5+4.\cos x}.dx = -\frac{5}{2} a_n.$$

La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Il vient : $a_n = \lambda.(-2)^n + \mu.(-\frac{1}{2})^n$.

On pourrait calculer a_1 pour obtenir λ et μ : il suffit de noter que $5.a_0 + 4.a_1 = 0$.

Mais on peut aussi noter que (a_n) est bornée : cela implique $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{2}{3}$. Donc $a_n = \frac{2}{3}.(-\frac{1}{2})^n$.

Conclusion : $\dfrac{1}{5+4.\cos x} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-\dfrac{1}{2})^n.\cos(nx)$

3) Méthode indirecte : nous avons développer f en série trigonométrique.

$$f(x) = \frac{1}{5+2.(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{e^{ix}}{2e^{2ix}+5e^{ix}+2}.$$

Décomposons en éléments simples, avec Maple, la fraction F = $\dfrac{T}{2T^2+5T+2}$.

```
> F:=T/(2*T^2+5*T+2);convert(F,parfrac,T);
```

$$F := \frac{T}{2\,T^2+5\,T+2} \qquad \frac{2}{3}\frac{1}{T+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\,T+1}$$

Ainsi, $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{2e^{2ix}+5e^{ix}+2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+e^{ix}/2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1+e^{-ix}/2} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{inx}}{2^n} - \dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{-i(n+1)x}}{2^n}$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{inx}}{2^n} - \dfrac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{e^{-inxx}}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2^n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(nx)}{2^n}$

Cette série converge normalement, donc elle est la série de Fourier de sa somme, et l'on retombe sur ses pattes. Le lecteur montrera par les mêmes méthodes que :

$$\boxed{\frac{1+\cos x}{4-2\cos x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n.\cos(nx).}$$

Voici sur cet exemple une autre présentation des calculs : écrivons $(4-2\cos x).g(x) = 1+\cos x$,

où $g(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n.\cos(nx)$, avec convergence normale, puisque g est C^∞.

$$2a_0 + 4\sum_{n\geq 1} a_n.\cos(nx) - 2a_0\cos x - \sum_{n\geq 1} a_n.[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x] = 1+\cos x.$$

Réindexons et identifions les deux séries trigonométriques. Il vient :

$$2a_0 - a_1 = 1 \ , \ -2a_0 + 4.a_1 - a_2 = 1 \ , \ -a_{n-1} + 4.a_n - a_{n+1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Pour $n \geq 1$, il vient $a_n = \alpha.(2+\sqrt{3})^n + \beta.(2-\sqrt{3})^n$.

Comme la suite (a_n) est bornée (et même de carré sommable), $\alpha = 0$, et $a_n = a_1.(2-\sqrt{3})^n$.

Reportant dans les deux premières équations, il vient : $a_0 = \sqrt{3} - 1$ et $a_1 = \sqrt{3}$. cqfd

L'identification des deux séries trigonométriques est légitime, sans recourir à la théorie de Riemann : en effet, il s'agit de séries normalement convergentes, donc ce sont les séries de Fourier de leurs sommes.

Exercice 25 : Développer en série entière $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x.\cos\theta+x^2}$.

En déduire le développement en série de Fourier de $g(\theta) = \dfrac{1}{2-\cos\theta}$.

Solution : [Oral Mines 2005, RMS n° 493]

1) Par décomposition en éléments simples : $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x.\cos\theta+x^2} = -1 + \dfrac{1}{1-x.e^{i\theta}} + \dfrac{1}{1-x.e^{-i\theta}}$.

Donc si $|x| < 1$, $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x.\cos\theta+x^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x^n.\cos(n\theta)$.

Changeons de point de vue : cette série trigonométrique est normalement convergente, donc est la série de Fourier de : $\theta \to \dfrac{1-x^2}{1-2x.\cos\theta+x^2}$.

2) Choisissons x tel que $x^2 + 1 = 4x$ et $|x| < 1$. Il vient $x = 2-\sqrt{3}$, et :

$$\boxed{\frac{1}{2-\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n.\cos(n\theta)}$$

3) Plus généralement, on pourrait développer en série de Fourier, pour $a \neq 0$, $\dfrac{1}{\text{ch}a - \cos\theta}$. Cf. ex svt.

<u>Exercice 26</u> : Soit $a > 0$. 1) Développer en série trigonométrique la fonction $f(x) = \dfrac{\text{sh}a}{\text{ch}a + \cos x}$.

En déduire le développement en série de Fourier de f, puis la valeur des intégrales :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x}.\cos(nx).dx .$$

2) Calculer les intégrales a_n (Indication : noter que $a_{n+1} + 2.\text{ch}\,a.\,a_n + a_{n-1} = 0$.)
Retrouver le développement en série de Fourier de f.

3) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sh}^2a}{(\text{ch}a+\cos x)^2}.dx$.

4) Montrer que la fonction $F(x, y) = \dfrac{\text{sh}y}{\text{ch}y+\cos x}$ est harmonique sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$.

<u>Solution</u> :

La fonction $f(x) = \dfrac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x}$ est C^∞ , paire et 2π-périodique. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f, et les coefficients de Fourier sont à décroissance rapide. Comme dans les exercices précédents, on peut procéder de deux façons, l'une indirecte, l'autre directe.

1) <u>Développement en série trigonométrique</u>. On a : $\dfrac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x} = \dfrac{2\text{sh}a.e^{ix}}{e^{2ix}+2\text{ch}a.e^{ix}+1} = F(e^{ix})$,

Décomposons en éléments simples : $F(T) = \dfrac{2\text{sh}a.T}{T^2+2\text{ch}a.T+1} = \dfrac{e^a}{T+e^a} - \dfrac{e^{-a}}{T+e^{-a}}$.

$$\frac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x} = F(e^{ix}) = \frac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}} = \frac{1}{1+e^{-a}.e^{ix}} - \frac{e^{-a}.e^{-ix}}{1+e^{-a}.e^{-ix}} = \dots ,$$ et finalement :

$$\boxed{\frac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.e^{-na}.\cos(nx).}$$

2) <u>Calcul direct de la série de Fourier</u>.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\cos x}.dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\text{sh}a}{\text{ch}a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\text{sh}a}{1+\text{ch}a+(\text{ch}a-1)t^2}.dt = \dots = 2$$

[Poser $t\sqrt{\text{ch}a-1} = u\sqrt{\text{ch}a+1}$] .

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sh}a.\cos x.\cos(nx)}{\text{ch}a+\cos x}.dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{ch}a+\cos x-\text{ch}a}{\text{ch}a+\cos x}.\text{sh}a.\cos(nx).dx = -2.\text{ch}\,a.I_n .$$

(a_n) est une suite récurrente linéaire. On trouve $a_n = \lambda.(-1)^n.e^{na} + \mu.(-1)^n.e^{-na}$

Comme (a_n) est bornée, $\lambda = 0$. Donc $a_n = (-1)^n.e^{-na}\,a_0 = 2.(-1)^n.e^{-na}$.

3) Parseval donne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sh}^2a}{(\text{ch}a+\cos x)^2}.dx = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2an} = \coth a$.

4) Laissons faire Maple !

```
> F:=(x,y)->sinh(y)/(cosh(y)+cos(x));
```

$$F := (x, y) \to \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)+\cos(x)}$$

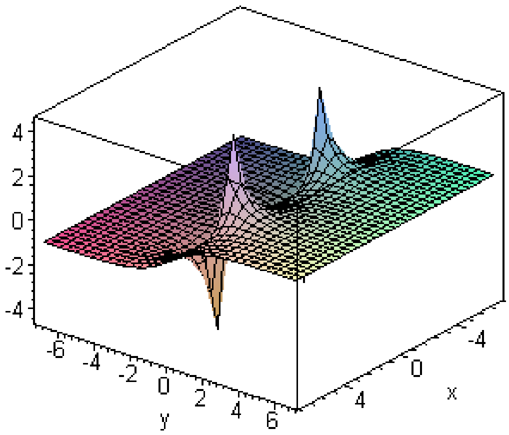
```
> simplify(diff(F(x,y),x,x)+diff(F(x,y),y,y));
```

$$0$$

```
> simplify(linalg[laplacian](F(x,y),[x,y]));
```

$$0$$

```
> plot3d(F(x,y),x=-7..7,y=-7..7,numpoints=1000,axes=boxed);
```



Exercice 27 : Développer en série de Fourier $f(x) = \ln(5 - 3\cos x)$.

Solution : [Oral Mines 2005, RMS n° 486]

1) La fonction f est C^∞, paire et 2π-périodique. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f, et les coefficients de Fourier sont à décroissance rapide.

2) Méthode directe. $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln(5-3\cos x).\cos(nx).dx$, $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{5-3.\cos x}dx$.

Une intégration par parties donne $a_n = \frac{3}{n\pi}(I_{n+1}-I_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

(I_n) est une suite récurrente linéaire $I_{n+2} + I_n = \frac{10}{3}I_{n-1}$; $I_n = a.3^n + \frac{b}{3^n}$.

Comme (I_n) est bornée, $a = 0$, et $I_n = \frac{b}{3^n}$, où $b = \int_0^\pi \frac{dx}{5-3.\cos x} = \frac{\pi}{4}$ après calculs.

Finalement $\ln(5 - 3\cos x) = \frac{a_0}{2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n.3^n}$.

Pour avoir a_0, il suffit de faire x = 0. On obtient : $a_0 = 4\ln 3 - 2\ln 2$.

Conclusion : $\ln(5 - 3\cos x) = 2\ln 3 - \ln 2 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n.3^n}$.

Une autre approche consisterait à dériver f, à développer en série de Fourier f', et à réintégrer.

Exercice 28 : 1) Développer en série de Fourier $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$.

2) Tracer la courbe C d'équation polaire $\rho = \frac{2}{3+\cos(2\theta)}$. Calculer l'aire délimitée par C.

Solution : [Oral Centrale 2005, RMS n° 805, Oral Centrale PC 2012, RMS n° 919].

1) La fonction f est C^∞, paire et π-périodique. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f, et les coefficients de Fourier sont à décroissance rapide.

2) Méthode directe. $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(2nx)}{1+\cos^2 x}dx$.

$a_0 = \sqrt{2}$ (poser t = tan x), et

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\cos(2x).\cos(2nx)}{1+\cos^2 x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(4\cos^2 x-2).\cos(2nx)}{1+\cos^2 x}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(4\cos^2 x+4-6).\cos(2nx)}{1+\cos^2 x}dx = \dots = -6\,a_n\,.$$

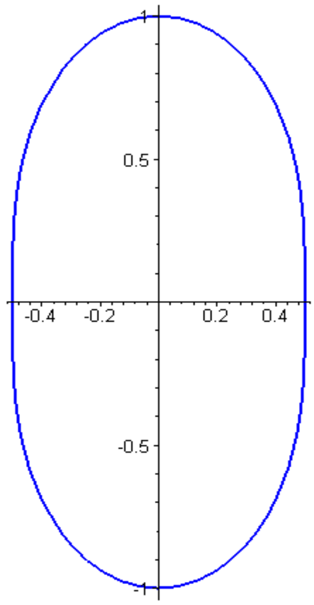
Suite récurrente linéaire. On trouve $a_n = \alpha.(-3+2\sqrt{2})^n + \beta.(-3-2\sqrt{2})^n$.

Mais $a_n \to 0$ (ou a_n bornée) implique $\beta = 0$, et finalement : $a_n = \sqrt{2}\,(-3+2\sqrt{2})^n$.

Conclusion : $\dfrac{1}{1+\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-3+2\sqrt{2})^n.\cos(2nx)$

3) Autre méthode :

$\dfrac{1}{1+\cos^2 x} = \dfrac{4e^{2ix}}{e^{4ix}+6e^{2ix}+1}$, décomposer en éléments simples cette fraction en $\exp(2ix)$, et développer f en série trigonométrique normalement convergente.



4) Le tracé de C ne pose aucun problème.
Le calcul de l'aire peut se faire à l'aide des règles de Bioche, mais fait aussi appel à Parseval :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta).d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{4.d\theta}{(3+\cos(2\theta))^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+u^2}{(2+u^2)^2}.du = \dots = \frac{3\pi}{8}\sqrt{2} \quad \text{si l'on pose } u = \tan\theta.$$
$$= \pi\,[\,\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-3+2\sqrt{2})^{2n}\,] = \frac{3\pi}{8}\sqrt{2} \quad \text{si l'on pense à Parseval.}$$

```
> with(plots):f:=t->2/(3+cos(2*t));
polarplot(f(t),t=0..2*Pi,color=blue,thickness=2);
> A:=1/2*int(f(t)^2,t=0..2*Pi);
int((1+u^2)/(2+u^2)^2,u=-infinity..infinity);
```

$$A := \frac{3}{8}\sqrt{2}\,\pi$$
$$\frac{3}{8}\sqrt{2}\,\pi$$

```
> B:=simplify(Pi*(1/2+sum((-3+2*sqrt(2))^(2*n),n=1..infinity)));
```

$$B := -\frac{3}{4}\,\frac{\pi\,(-3+2\sqrt{2})}{-4+3\sqrt{2}}$$

Exercice 29 : Pour $x \in\ ]-1, +1[$ et θ réel, établir l'identité : $\operatorname{Arctan}\dfrac{x.\sin\theta}{1-x.\cos\theta} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$.

Solution : [Oral Mines 2005, RMS n° 458]
L'idée est simple : dériver-réintégrer. Il n'y a pas de série de Fourier là-dedans…

$$x\frac{d}{dx}\left[\operatorname{Arctan}\frac{x.\sin\theta}{1-x.\cos\theta}\right] = \frac{x.\sin\theta}{1-2x.\cos\theta+x^2} = \operatorname{Im}\frac{x.e^{i\theta}}{1-x.e^{i\theta}} = \sum_{n=1}^{+\infty}x^n\sin(n\theta)\,.$$

$\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{Arctan}\dfrac{x.\sin\theta}{1-x.\cos\theta}\right] = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\sin(n\theta)$. Il reste à intégrer terme à terme la série entière.

Exercice 30 : On pose $f(x, \theta) = \operatorname{Arctan}\,(\dfrac{1-x}{1+x}.\tan\theta)$.
1) Pour $\theta \in\ ]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, donner le développement en série entière de $x \to f(x, \theta)$ en 0.
2) Pour $x \in\ ]-1, 1[$, donner le développement en série de Fourier de $\theta \to f(x, \theta)$.

Solution : [Oral X 1996, RMS n° 61, Oral X 1997, RMS n° 67]

0) La fonction f est définie sur D = { (x, θ) ; $x \neq -1$, $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ }.

1) Fixons $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $x \to f(x, \theta)$ est C^∞ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; de plus,

$$f(-1 \pm 0, \theta) = \pm\frac{\pi}{2} \quad , \quad f(\pm\infty, \theta) = -\theta .$$

Elle est développable en série entière en 0 car sa dérivée est une fraction rationnelle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta) = \frac{-\sin(2\theta)}{1+2x\cos(2\theta)+x^2} = -\frac{e^{2i\theta}}{2i}\frac{1}{1+xe^{2i\theta}} + \frac{e^{-2i\theta}}{2i}\frac{1}{1+xe^{-2i\theta}} = \dots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n\sin((2n+2)\theta)$$

Réintégrons ! Il vient :

$$\boxed{\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad , \quad \forall x \in]-1, +1[\qquad f(x, \theta) = \theta + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n\theta)}{n}.x^n .}$$

2) Fixons $x \in]-1, 1[$. La fonction $\theta \to f(x, \theta)$ est π–périodique et impaire. De plus $f(x, \pm\frac{\pi}{2}) = \pm\frac{\pi}{2}$.
On pourrait la développer en série de Fourier, mais utilisons la question 1 !!!

Il découle de 1) que $f(x, \theta) = g(\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n\theta)}{n}.x^n$, où g est la fonction π–périodique et impaire telle que $g(\theta) = \theta$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, autrement dit $g(\theta) = \text{Arctan}(\tan\theta)$.

La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n\theta)}{n}.x^n$ converge normalement, donc est la série de Fourier de sa somme. Reste à développer g en SF : $g(\theta) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n\theta)}{n}$, avec égalité par Dirichlet.

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in]-1, +1[\qquad f(x, \theta) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1-x^n).\sin(2n\theta) . \\ \forall\theta \in \mathbf{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi.\mathbf{Z}) \quad \forall x \in]-1, +1[\quad f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1-x^n).\sin(2n\theta)\end{gathered}}$$

Exercice 31 : Soient $a > 0$, et f la fonction $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$.
Existence, continuité, périodicité, parité.
On admet la formule $\forall x \in \mathbf{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}}{1+u^2}.du = \pi\, e^{-|x|}$.
Développer f en série de Fourier ? Lien entre f et sa série de Fourier ?
Expression élémentaire de f ? Cas où $x = 0$?

Solution :

1) Fixons x réel. La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{a^2+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}+\frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}\right)$
est à termes positifs et convergente (règle de l'équivalent).
Sa somme est 2π-périodique et paire (réindexer).
Il y a convergence normale sur $[-2\pi, 2\pi]$ (pourquoi ?), ce qui suffit à assurer la continuité.

2) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-inx}}{a^2+(x-2k\pi)^2}.dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{a^2+(x+2k\pi)^2}.dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{e^{-inu}}{a^2+u^2}.du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-inu}}{a^2+u^2}.du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nu)}{a^2+u^2}.du .$$

La formule admise découle de la formule d'inversion de Fourier. On peut la démontrer élémentairement, mais ce n'est pas facile.

Il en découle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}}{a^2+u^2}.du = \frac{\pi}{a}\,e^{-a|x|}$. Par conséquent : $c_n(f) = F(n) = \frac{1}{2a}\,e^{-a|n|}$.

$$f(x) \sim \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-a|n|}.e^{inx} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-an}.\cos(nx)$$

Cette série converge normalement, donc est son propre développement de Fourier.
Par Parseval, sa somme est égale à f. Ainsi :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-a|n|}.e^{inx} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-an}.\cos(nx)$$

Mais la série obtenue se calcule élémentairement, et vaut, après calculs : $\frac{1}{2a}\,\frac{sha}{cha-\cos x}$.

Pour tout $a > 0$ et tout réel x :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} = \frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-a|n|}.e^{inx} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-an}.\cos(nx) = \frac{1}{2a}\,\frac{sha}{cha-\cos x}.$$

En particulier, si $x = 0$, on retrouve un développement eulérien trouvé dans des exercices antérieurs :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+4n^2\pi^2} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-an} = \frac{1}{2a}\,\frac{sha}{cha-1} = \frac{1}{2a}\coth\frac{a}{2}.$$

Exercice 32 : Soient $a > 0$, et f la fonction $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-a(x-2n\pi)^2}$.

Existence, périodicité, dérivabilité. Développement en série de Fourier.

Solution : [Ecrit Mines 1987, Oral Centrale 1987 RMS n° 297]
Les connaisseurs reconnaîtront la fonction θ de Jacobi.

1) La fonction $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-a(x-2n\pi)^2} = e^{-ax^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-a(x-2n\pi)^2}+e^{-a(x+2n\pi)^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$

est définie, 2π-périodique, paire et continue, et même C^∞ sur **R**.
Il suffit de montrer la convergence normale de la série et de toutes ses dérivées sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Pour tout $n \in$ **Z**, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-inx}.e^{-a(x+2k\pi)^2}.dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}e^{-inx}.e^{-a(x+2k\pi)^2}.dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}e^{-inu}.e^{-au^2}.du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-inu}.e^{-au^2}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(nu).e^{-au^2}.du .$$

Or on sait que : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixu}.e^{-u^2}.du = \sqrt{\pi}\,e^{-x^2/4}$.

[par dérivation-intégration par parties, ou par développement en série entière.]

Par conséquent : $c_n(f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}F(\frac{n}{\sqrt{a}}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\,e^{-n^2/(4a)}$. Il y a convergence normale, et :

Pour tout $a > 0$ et tout x réel :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-a(x-2k\pi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n^2}{4a}}.e^{inx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} + \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{n^2}{4a}}.\cos(nx).$$

En particulier, si l'on fait $x = 0$, et $a = 4a$, on obtient la **formule de Poisson** :

Pour tout $a > 0$: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} + \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{a}}$.

<u>Exercice 33</u> : Soit $f \in C^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que $\forall(m, n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ $\lim_{x\to+\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$.
On pose $F(x) = \sum_{k\in Z} f(x+2k\pi)$. Que dire de F ?

Calculer les coefficients de Fourier de F. Montrer que $F(x) = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n).e^{inx}$, où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{int}}.dt$.

<u>**Solution**</u> : [Oral X 1997, RMS n° 68]
Cet exercice généralise le précédent.

<u>Exercice 34</u> : <u>Intégrales de Fresnel</u>.

1) Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}.du$. En déduire celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x^2}.dx$.

2) Montrer que la fonction 1-périodique f de **R** dans **C** telle que $\forall x \in [0, 1[$ $f(x) = e^{2i\pi x^2}$, est somme de sa série de Fourier.

3) Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(x^2).dx$ et $\int_0^{+\infty} \cos(x^2).dx$ convergent. Calculer ces intégrales en utilisant les coefficients de Fourier de f.

<u>**Solution**</u> : [Oral Centrale MP 2012, RMS n° 795]

1) <u>L'intégrale</u> $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}.du$ <u>est semi-convergente</u>. En effet, la fonction $g(u) = \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbf{R}^*_+$, intégrable sur]0, 1] et semi-intégrable sur [1, +∞[(cela se montre par IPP).

Les changements de variable $u = 2\pi x^2$, puis $s = \sqrt{u}$ donnent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x^2}.dx = 2\int_0^{+\infty} e^{2i\pi x^2}.dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}.du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{is^2}.ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is^2}.ds .$$

2) La fonction 1-périodique f de **R** dans **C** telle que $\forall x \in [0, 1[$ $f(x) = e^{2i\pi x^2}$ vérifie $f(0) = f(1-) = 1$.

Elle est continue et C^1-par morceaux, donc sa série de Fourier converge normalement et a pour somme f. Calculons ses coefficients de Fourier :

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{-2i\pi nx} e^{2i\pi x^2}.dx = \int_0^1 e^{2i\pi(x^2-nx)}.dx = \int_0^1 e^{2i\pi[(x-n/2)^2-n^2/4]}.dx = e^{-i\pi n^2/2} \int_0^1 e^{2i\pi(x-n/2)^2}.dx$$

$$c_n(f) = \int_{-n/2}^{1-n/2} e^{2i\pi x^2}.dx \text{ si } n \text{ est pair , } -i\int_{-n/2}^{1-n/2} e^{2i\pi x^2}.dx \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Du coup, $\displaystyle f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{2i\pi nx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-k}^{1-k} e^{2i\pi u^2}.du \Big).e^{4i\pi kx} - i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-1/2-k}^{1/2-k} e^{2i\pi u^2}.du \Big).e^{2i\pi(1+2k)x}$

En particulier : $\displaystyle f(0) = 1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-k}^{1-k} e^{2i\pi u^2}.du \Big) - i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-1/2-k}^{1/2-k} e^{2i\pi u^2}.du \Big) = (1-i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}.du$.

3) Les intégrales $S = \int_0^{+\infty} \sin(x^2).dx$ et $C = \int_0^{+\infty} \cos(x^2).dx$ convergent, car

$$C + i.S = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}.du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}.dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}.du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \frac{1+i}{2} .$$

<u>Conclusion</u> : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2).dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2).dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

```
> C:=int(cos(t^2),t=0..infinity);S:=int(sin(t^2),t=0..infinity);
```

$$S := \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$C := \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

Exercice 35 : **Equation de Kepler**.

Soit e un réel tel que $0 < e < 1$. On considère l'équation d'inconnue x $y = x - e \sin x$ (K)

1) Montrer que, pour tout réel y, l'équation (K) admet une unique solution x, et que la fonction g : $y \to x$ ainsi définie est de classe C^∞.

2) On pose $h(y) = g(y) - y = e.\sin g(y)$. Montrer que h est impaire et périodique.

3) Montrer que h est développable en série de Fourier, et calculer sa série de Fourier à l'aide des fonctions de Bessel $J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - z\sin t).dt$.

4) En déduire la solution de (K) sous forme de série.

Solution :

1) Considérons la fonction $f : x \to x - e \sin x$.

f est de classe C^∞, impaire, et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vers $-\infty$ en $-\infty$. De plus $f'(x) > 0$ pour tout x.

Par conséquent, f est un C^∞-difféomorphisme impair croissant de **R** sur **R**.

Pour tout y, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution $x = g(y)$, et la fonction $g = f^{-1}$ est elle-même un C^∞-difféomorphisme croissant impair de **R** sur **R**.

2) Il est clair que h est impaire, 2π-périodique et de classe C^∞.

3) Il résulte de 2) que la série de Fourier de h est normalement convergente, de somme h.

$$h(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(ny) \ , \text{ où } \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(t).\sin(nt).dt \ .$$

Intégrons par parties ; il vient :

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi h'(t).\cos(nt).dt = \frac{2e}{n\pi}\int_0^\pi \cos(g(t)).g'(t).\cos(nt).dt \ , \text{ car } h'(t) = e\, g'(t).\cos g(t).$$

Effectuons le changement de variable $t = f(u)$, $u = g(t)$. Il vient, après calculs :

$$b_n = \frac{2e}{n\pi}\int_0^\pi \cos(u).\cos(nu - ne\sin u).du = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nu - ne\sin u).du = \frac{2}{n} J_n(ne).$$

[Indication : développer $\cos(nu - ne.\sin u)$ par formules d'addition, noter que

$$e.\cos u.\cos(ne.\sin u) = \frac{d}{du}\left(\frac{\sin(ne\sin u)}{n}\right) \ , \ e.\cos u.\sin(ne.\sin u) = \frac{d}{du}\left(-\frac{\cos(ne\sin u)}{n}\right)$$

et intégrer par parties.]

4) Comme $x = g(y) = y + h(y)$, il vient :

Pour tout $0 < e < 1$, la solution de l'équation $y = x - e \sin x$ est donnée par :

$$x = y + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} J_n(ne).\sin(ny) \ .$$

Remarque : La résolution de l'équation de Kepler permet de déterminer la position d'une planète sur son orbite en fonction du temps.

Exercice 36 : Soit $f(x) = \frac{x}{2\pi} - E\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$.

1) Montrer que f est 2π-périodique ; étudier sa parité.

2) Développer f en série de Fourier. Convergence de la série de Fourier.

3) Soient p et q des entiers ≥ 1. Calculer $\int_0^{2\pi} f(pt).f(qt).dt$ en fonction de $p \wedge q$ et de $p \vee q$.

Solution : [Oral Centrale PSI 2005, RMS n° 888, Centrale MP 2009, RMS n° 790].

1) Etude de f. Pour $0 \le x < 2\pi$, $f(x) = \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{1}{2}$. La périodicité est facile.

f est C^1 par morceaux et presque impaire. Pour la rendre impaire, il faut la modifier légèrement, et poser $f(0) = 0$ au lieu de $f(0) = -\dfrac{1}{2}$. Cela ne modifie pas ses coefficients de Fourier.

2) Un calcul facile montre que $f(x) \sim -\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Le théorème de Dirichlet s'applique et montre que $f(x) = -\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n}$, une fois modifiée en 0.

3) En vertu d'une propriété classique des coefficients de Fourier d'une fonction, on a :

$$f(px) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(npx)}{n} \quad \text{et} \quad f(qx) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nqx)}{n} .$$

Notant f_p la première fonction, $b_n(f_p) = -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{p}{n}$ si $p \mid n$, 0 sinon. Idem pour f_q .

Par Parseval, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(pt).f(qt).dt = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f_p).b_n(f_q) = \dfrac{1}{2\pi^2}\sum_{p\,\text{et}\,q \mid n}\dfrac{pq}{n^2} = \dfrac{pq}{2\pi^2}\sum_{p\vee q \mid n}\dfrac{1}{n^2}$

$$= \frac{pq}{2\pi^2}\sum_{k\ge 1}\frac{1}{(p\vee q)^2.k^2} = \frac{\pi^2}{6}\frac{pq}{2\pi^2}\frac{1}{(p\vee q)^2} = \frac{1}{12}\frac{p\wedge q}{p\vee q} .$$

Exercice 37 : Pour m et n entiers ≥ 1, calculer $\displaystyle\int_0^1 (-1)^{[mt]}.(-1)^{[nt]}.dt$

Solution : [Oral Mines 2004, RMS n° 70]

Cet exercice est susceptible de deux approches très différentes. La première, voisine de celle de l'exercice précédent, consiste à développer en série de Fourier la fonction $S(t) = (-1)^{[t]}$, et à appliquer la formule de Parseval. La seconde consiste à accumuler suffisamment de propriétés simples de l'intégrale $I(m, n)$ pour pouvoir la calculer.

1) Solution par séries de Fourier.

Considérons la fonction $S(t) = (-1)^{[t]}$ pour $t \notin \mathbf{Z}$, $S(t) = 0$ si $t \in \mathbf{Z}$.

C'est une fonction impaire, 2-périodique, 1-antipériodique, en escaliers sur tout segment.

$$S(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1} .$$

En réalité $S(t) = C(\pi t)$, où C est l'onde carrée.

En vertu du théorème de Dirichlet, on a $S(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\sin((2k+1)\pi t)}{2k+1}$, mais peu importe.

$$S(mt) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)m\pi t)}{2k+1} \quad \text{et} \quad S(nt) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin((2k+1)n\pi t)}{2k+1} .$$

Notant $S_m(t) = S(mt)$, il vient $b_p(S_m) = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{2k+1}$ si $m \mid p$ et $p = (2k+1)m$, $b_p(S_m) = 0$ sinon.

Idem pour S_n . Maintenant, utilisons Parseval !

$$I(m, n) = \int_0^1 (-1)^{[mt]}.(-1)^{[nt]}.dt = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} b_p(S_m).b_p(S_n) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p\in A}\frac{mn}{p^2} ,$$

où $A = \{\, p \in \mathbf{N}^* \,;\, p \mid m ,\, p \mid n ,\, \dfrac{p}{m} \text{ et } \dfrac{p}{n} \text{ sont impairs} \,\}$.

Notons $m = 2^a(2r+1)$ et $n = 2^b(2s+1)$.

• Si $a \neq b$, je dis que A est vide, et I(m, n) = 0.

• Si $a = b$, on constate que $p \in$ A ssi p est de la forme $p = (m \vee n)(2i+1)$.

Dès lors $\quad I(m, n) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{mn}{(m\vee n)^2(2i+1)^2} = \dfrac{m\wedge n}{m\vee n}$.

<u>Conclusion</u> : $I(m, n) = \int_0^1 (-1)^{[mt]}.(-1)^{[nt]}.dt = 0$ si $v_2(m) \neq v_2(n)$, $I(m, n) = \dfrac{m\wedge n}{m\vee n}$ si $v_2(m) = v_2(n)$

2) <u>Méthode directe</u>. Elle consiste à montrer les résultats suivants, laissés en exercice :

• $I(m, n) = I(n, m)$, $I(m, m) = 1$.

♣ $I(2m, 2n) = \dfrac{1}{2}[\,1 + (-1)^{m+n}\,].I(m, n)$ pour m et $n \geq 1$.

♦ $I(2m, 2n+1) = 0$ pour $m \geq 1$ et $n \geq 0$.

♥ $I(am, an) = I(m, n)$ si $m + n$ est pair, $I(am, an) = \dfrac{1-(-1)^a}{2a}I(m, n)$ si $m + n$ est impair.

♠ Si m et n sont impairs et premiers entre eux, $I(m, n) = \dfrac{1}{mn}$.

C'est le point le plus délicat de la preuve. En voici une preuve.

Tout d'abord, par Chasles $I(m, n) = \sum_{k=0}^{mn-1}\int_{k/mn}^{(k+1)/mn} etc. = \dfrac{1}{mn}\sum_{k=0}^{mn-1}(-1)^{q_m(k)}.(-1)^{q_n(k)}$,

où $q_m(k)$ et $r_m(k)$ désignent le quotient et le reste euclidiens de k par m.

Or, m et n étant impairs, $(-1)^{q_m(k)+q_n(k)} = (-1)^{r_m(k)+r_n(k)}$. Ainsi, $I(m, n) = \dfrac{1}{mn}\sum_{k=0}^{mn-1}(-1)^{r_m(k)+r_n(k)}$.

Or, en vertu du théorème chinois, l'application $k \to (r_m(k), r_n(k))$ est une bijection de [1, $mn-1$] sur [1, $m-1$]×[1, $n-1$]. Donc $I(m, n) = \dfrac{1}{mn}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{b=0}^{n-1}(-1)^{a+b} = \ldots = \dfrac{1}{mn}$.

Je laisse au lecteur le soin de conclure.

2. <u>Séries de Fourier</u>.

<u>Exercice 1</u> : Montrer pour tout $0 \leq k \leq n$ $\quad C_n^k = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(2.\cos\dfrac{\theta}{2})^n.\cos((\dfrac{n}{2}-k)\theta).d\theta$.

En déduire $C_{2n}^n = \dfrac{2}{\pi}\,2^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi.d\varphi$.

<u>Solution</u> : Partons de $(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k$. En particulier $(1 + e^{i\theta})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.e^{ik\theta}$.

Ce polynôme trigonométrique est son propre développement de Fourier.

$$C_n^k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(1+e^{i\theta})^n.e^{-ik\theta}.d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(2.\cos\frac{\theta}{2})^n.\exp(i(\frac{n}{2}-k)\theta).d\theta \text{ , or ceci est un réel, donc:}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(2.\cos\frac{\theta}{2})^n.\cos((\frac{n}{2}-k)\theta).d\theta .$$

Si l'on fait $(n, k) = (2n, n)$, on retrouve les intégrales de Wallis d'indice pair.

<u>Exercice 2</u> : <u>applications combinatoires et probabilistes</u>.

1) Calculer $D_n(x) = \sum_{-n\leq k\leq n} e^{ikx}$.

2) Calculer $I_{mn} = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.\dfrac{\sin((2m+1)x/2)}{\sin(x/2)}.dx$ pour $(m, n) \in \mathbf{N}^2$.

3) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)})^3.dx$. Interprétations combinatoire et probabiliste.

4) Soient n, s ∈ **N**. Montrer que :

card { (x, y, z) ∈ $[-n, n]^3$; $-s \le x + y + z \le s$ } = $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)})^3.\frac{\sin((2s+1)x/2)}{\sin(x/2)}dx$.

5) Soit a_n le coefficient du terme constant du développement de $(1/x + 1 + x)^n$. Exprimer a_n sous forme intégrale, et en déduire un équivalent et un développement asymptotique de a_n.

Solution : [Oral X 1999, Polya-Szegö, tome 1, n° 30, p. 5]

1) $D_n(x) = \sum_{-n\le k\le n} e^{ikx} = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ si x ∉ 2π**Z** , $D_n(x) = 2n+1$ sinon.

2) On a : $I_{mn} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.\frac{\sin((2m+1)x/2)}{\sin(x/2)}.dx = c_0(D_m.D_n)$

$=$ card { (p, q} ∈ $[-m, m]\times[-n, n]$; p + q = 0 } = 1 + 2.min(m, n).

Il est conseillé de faire un dessin.

3) De même, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)})^3.dx = c_0(D_n^3)$.

$D_n^3(x) = \sum_{-n\le p,q,r\le n} e^{i(p+q+r)x} = \sum_{-3n\le s\le 3n} C(n,s).e^{isx}$, où $C(n, s) = \text{card}\{ (p, q, r) \in [-n, n]^3 ; p + q + r = s \}$.

Par conséquent, $c_0(D_n^3) = \text{card } \{ (p, q, r) \in [-n, n]^3 ; p + q + r = 0 \} \in$ **N**.

$c_0(D_n^3)$ est le nombre de points à coordonnées entières de l'intersection du cube $[-n, n]^3$ avec le plan d'équation x + y + z = 0 ; cette intersection est un hexagone, que le lecteur est prié de dessiner.

$c_0(D_n^3) = (n+1) + (n+2) + \dots + (2n) + (2n+1) + (2n) + \dots + (n+2) + (n+1) = \dots = 3n^2 + 3n + 1$.

Exercice 3 : Polynômes de Tchebychev.

1) Montrer que pour tout n ∈ **N**, il existe un unique polynôme réel T_n vérifiant (∀θ) cos(nθ) = $T_n(\cos\theta)$. Formule de récurrence liant T_{n+2} , T_{n+1} et T_n ? Factoriser $T_n(X)$.

2) Montrer que pour tout n ∈ **N***, existe un unique polynôme réel U_{n-1} vérifiant (∀θ) sin(nθ) = $\sin(\theta).U_{n-1}(\cos\theta)$. Montrer que les U_n vérifient la même relation de récurrence que les T_n, et exprimer les U_n en fonction des T_n. Factoriser $U_n(X)$.

3) En déduire que les polynômes trigonométriques pairs sont les polynômes en cos θ et que les polynômes impairs sont de la forme sin θ.Q(cos θ), où Q est un polynôme.

Solution : cf. mon chapitre sur le sujet.

Exercice 4 : interpolation de Lagrange trigonométrique.

On note $\mathcal{P}_n = \text{Vect}(e_{-n} , \dots, e_0 , \dots, e_n)$. Les réels $x_0, x_1, x_2, \dots$ sont dits *distincts modulo 2π* si leurs classes modulo 2π sont distinctes dans **R**/2π**Z**, *i.e.* si e^{ix_0} , e^{ix_1} , e^{ix_2} , … sont distincts dans **U**.

1) Si $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ sont distincts modulo 2π, et si $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$ sont des complexes quelconques, montrer : $\exists! P \in \mathcal{P}_n \quad \forall k \in \{0, 1, \dots , 2n\} \quad P(x_k) = y_k$.

2) Montrer que P est donné par : $P(x) = \sum_{0\le p\le 2n} y_p.L_p(x)$, où $L_p(x) = \prod_{q\ne p}(\frac{\sin((x-x_q)/2)}{\sin((x_p-x_q)/2)})$.

3) a) Si $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont distincts dans [0, π], et si $y_0, y_1, \dots, y_n$ sont des complexes quelconques, montrer qu'il existe un unique P ∈ $\mathcal{P}_n$ pair tel que $\forall k \in \{0, 1, \dots , n\} \quad P(x_k) = y_k$.

Il est donné par : $P(x) = \sum_{0\le p\le n} y_p.C_p(x)$, où $C_p(x) = \prod_{q\neq p}\left(\frac{\cos x - \cos x_q}{\cos x_p - \cos x_q}\right)$.

b) Si $x_1, \dots, x_n$ sont distincts dans $]0, \pi[$, et si $y_1, \dots, y_n$ sont des complexes quelconques, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathcal{P}_n$ impair tel que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $P(x_k) = y_k$.

Il est donné par : $P(x) = \sum_{0\le p\le n} y_p.S_p(x)$, où $S_p(x) = \frac{\sin x}{\sin x_p}.\prod_{q\neq p}\left(\frac{\cos x - \cos x_q}{\cos x_p - \cos x_q}\right)$.

<u>Solution</u> : cf. Zygmund, *Trigonometric series*, chap. X.

<u>Exercice 5</u> : Soit *f* une fonction continue 2π-périodique de **R** dans **C**. Montrer que *f* est un polynôme trigonométrique ssi ses coefficients de Fourier sont nuls sauf un nombre fini.

<u>Solution</u> : Attention ! cet exercice est faussement facile !

1) Si *f* est un polynôme trigonométrique, $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k.e^{ikx}$, *f* est son propre développement de Fourier. Les coefficients de Fourier de *f* sont nuls si $|k| > n$.

2) Si les coefficients de Fourier de *f* sont nuls pour $|k| > n$, *f* a pour série de Fourier $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e^{ikx}$.

Notons $P(x)$ le polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f).e^{ikx}$.

f et P ont les mêmes coefficients de Fourier. Par Parseval, $\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} |f(x) - P(x)|^2.dx = 0$.

Comme $|f - P|^2$ est continue positive d'intégrale nulle, $f = P$.

<u>Exercice 6</u> : Soit *f* une fonction continue 2π-périodique de **R** dans **C**.
Montrer que *f* est à valeurs réelles ssi les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.
Montrer que *f* est paire ssi $(\forall n \in \mathbf{N}^*)$ $b_n(f) = 0$, impaire ssi $(\forall n \in \mathbf{N})$ $a_n(f) = 0$.
Montrer que *f* est π-périodique ssi $(\forall n \in \mathbf{Z})$ $\int_0^{2\pi} f(t).e^{(2n+1)it}.dt = 0$.
Montrer que *f* est π-antipériodique ssi $(\forall n \in \mathbf{Z})$ $\int_0^{2\pi} f(t).e^{2nit}.dt = 0$.
Montrer que $f(x) = f(\pi - x)$ ssi $(\forall k)$ $a_{2k+1}(f) = 0$, $b_{2k}(f) = 0$.

<u>Solution</u> : Comme tout serait facile si *f* était somme de sa série de Fourier, comme l'ont cru les mathématiciens, de Fourier lui-même jusqu'à Du-Bois Reymond ! Hélas, trois fois hélas, *f* entretient avec sa série de Fourier des relations compliquées, et la seule relation certaine que *f* entretient avec sa série de Fourier est la convergence en moyenne quadratique, et la formule de Parseval !
Cependant, cela va nous suffire pour conclure. Car il découle de Parseval que si deux fonctions continues ont mêmes coefficients de Fourier, elles sont égales.

Notons $f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{in\theta} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f).\cos(n\theta) + b_n(f).\sin(n\theta))$.

Alors $\overline{f(\theta)} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}.e^{-in\theta} = \frac{\overline{a_0(f)}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\overline{a_n(f)}.\cos(n\theta) + \overline{b_n(f)}.\sin(n\theta))$.

$$f(-\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n}(f).e^{in\theta} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f).\cos(n\theta) - b_n(f).\sin(n\theta)).$$

$$f(\theta + \pi) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n(f).e^{in\theta} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.(a_n(f).\cos(n\theta) + b_n(f).\sin(n\theta)).$$

$$f(\pi-\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n c_{-n}(f).e^{in\theta} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.(a_n(f).\cos(n\theta) - b_n(f).\sin(n\theta)).$$

Une fois encore, ces formules découlent, non pas de l'égalité, mais d'un calcul direct.
On conclut par coïncidence.

Exercice 7 : Soient f et g réglées 2π-périodiques de **R** dans **C**.

Si $f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{in\theta}$ et $g(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g).e^{in\theta}$, alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \overline{f(\theta)}.g(\theta).d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}.c_n(g) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} f(\theta).g(\theta).d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).c_{-n}(g)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} f(x-\theta).g(\theta).d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).c_n(g).e^{inx} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} f(x+\theta).\overline{f(\theta)}.d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.e^{inx}$$

Solution : thèmes et variations autour de Parseval.

Exercice 8 : Soit f réglée 2π-périodique de **R** dans **R**.

1) Si f est décroissante sur $]0, 2\pi[$, montrer que $\forall n \geq 1$ $b_n(f) \geq 0$.

[Indication : noter que $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/n}[f(\theta+\frac{2k\pi}{n}) - f(\theta+\frac{(2k+1)\pi}{n})].\sin n\theta.d\theta$.]

2) Si f est convexe sur $]0, 2\pi[$, montrer que $\forall n \geq 1$ $a_n(f) \geq 0$.

[Indication : noter que

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi/2n}[f(\theta+\frac{2k\pi}{n}) - f(\theta+\frac{(2k+1)\pi}{n}) - f(\frac{(2k+1)\pi}{n}-\theta) + f(\frac{(2k+2)\pi}{n}-\theta)].\cos n\theta.d\theta$.]

Solution : laissée en exercice.

Exercice 9 : module d'uniforme continuité.

1) Soit f continue 2π-périodique de **R** dans **C**.

Montrer que la fonction $\omega_f(\delta) = \sup \{ | f(x) - f(y) | ; | x - y | \leq \delta \}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et vérifie

$$\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta') \quad \text{et} \quad \lim_{\delta\to 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{Z}$ $| c_n(f) | \leq \frac{1}{2}\,\omega_f(\frac{\pi}{|n|})$.

[Indication : noter que $c_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f(t) - f(t-\frac{\pi}{n}))e^{-int}.dt$] .

Solution : laissée en exercice.

Exercice 10 : Soit f réglée 2π-périodique de **R** dans **C**.

1) Exprimer à l'aide de celle de f la série de Fourier de $f(x + a)$ et de $f(nx)$ ($a \in$ **R**, $n \in$ **Z**).

2) Exprimer à l'aide de celle de f la série de Fourier de $g(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x}{n}+\frac{2k\pi}{n})$ ($n \geq 1$).

2) Soit $h > 0$. Exprimer à l'aide de celle de f la série de Fourier de $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t).dt$.

Solution : Notons $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f).e^{ikx}$ la série de Fourier de f.

1) On a : $f(x+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f).e^{ia}.e^{ikx}$ et $f(nx) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f).e^{iknx}$.

2) La fonction g(x) est réglée 2π-périodique, et : g(x) = $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x}{n}+\frac{2k\pi}{n}) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{pn}(f).e^{ipx}$.

3) On trouve, par intégrales doubles : $f_h(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).\frac{\sin(nh)}{nh}e^{inx}$.

Dans les trois cas, cela se montre en calculant les coefficients de Fourier.

<u>Exercice 11</u> : Existe-t-il une fonction réglée 2π-périodique dont la série de Fourier est $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$?

<u>Solution</u> : [Oral Mines 2005, RMS n° 490]

Cette fonction f aurait pour coefficients de Fourier $a_n(f) = 0$, $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or, cette suite n'est pas de carré sommable. C'est donc impossible.

<u>Remarque</u> : On peut montrer au moyen d'une transformation d'Abel que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur **R** vers une fonction f … Mais elle n'est pas la série de Fourier de sa somme, puisque ce n'est pas une série de Fourier !

Que se passe-t-il ? f est-elle intégrable, a-t-elle des coefficients de Fourier, à commencer par le plus simple d'entre eux, $a_0(f)$? La réponse est non.

Ces questions délicates sont abordées dans le problème de l'X 1992.

<u>Exercice 12</u> : Trouver les fonctions f : **R** → **C**, 2π-périodiques, de classe C^∞, telles que :

$$\exists M \quad \forall n \quad \forall x \quad |f^{(n)}(x)| \le M .$$

<u>Solution</u> : Je dis que f est de la forme $f(x) = A.e^{ix} + B + C.e^{-ix} = B + D.\cos x + E.\sin x$.

En effet, soit $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx}$ la série de Fourier de f . Il y a convergence normale, ainsi que toutes les dérivées. Et $f^{(p)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(in)^p.c_n(f).e^{inx}$, autrement dit $\forall n \in \mathbf{Z}$ $\forall p$ $c_n(f^{(p)}) = (in)^p.c_n(f)$.

L'hypothèse implique, pour tout n et tout p : $|(in)^p.c_n(f)| \le M$.

Cela implique, si l'on fait tendre p vers l'infini, $c_n(f) = 0$ pour $|n| > 1$.

On conclut par Parseval que f est un polynôme trigonométrique $f(x) = A.e^{ix} + B + C.e^{-ix}$.

<u>Exercice 13</u> : 1) Soit f une fonction réglée 2π-périodique impaire. En considérant la fonction $F(x) = \int_0^x f(t).dt$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}$ converge.

2) Montrer que la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$ converge simplement sur **R**.

3) Que peut-on déduire des questions 1) et 2) ?

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 2004, RMS n° 491]

Cet exercice me paraît difficile et inadapté au concours de Centrale. Il sera repris dans la suite.

1) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}$ converge absolument, car les suites $(b_n(f))$ et $(\frac{1}{n})$ sont de carré sommable.

La fonction F est continue, paire et 2π-périodique.

Formellement, si $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f).\sin(nx)$, alors : $F(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}.\cos(nx)$

On peut calculer les coefficients de Fourier de F par intégration par parties généralisée :

Pour $n \geq 1$, $a_n(F) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx).F(x).dx$ = etc.

Une autre solution consiste à noter que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}.\cos(nx)$ converge normalement, a une somme continue ; elle est égale à F car elles ont mêmes coefficients de Fourier.

2) est la redoutable série de Fatou, absolument indispensable pour deux catégories d'esprits :

a) les professionnels des séries trigonométriques ; b) les enculeurs de mouches.

3) On déduit des questions 1) et 2) que la série de Fatou n'est pas une série de Fourier.

Exercice 14 : Généralisation du théorème de convergence normale.

Soit f une fonction C-lipschitzienne et 2π-périodique de **R** dans **C**.

a) Si $h \in \mathbf{R}$, montrer que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |e^{inh}-1|^2 \, | c_n(f) |^2 \leq C^2 h^2$.

b) Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2$ converge, puis que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} | c_n(f) |$ converge.

c) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx}$.

Solution : [Oral Centrale 2009, RMS n° 791]

a) Ecrivons $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx}$. Alors $f(x+h) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inh}.e^{inx}$, et :

$$f(x+h) - f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).(e^{inh}-1).e^{inx} .$$

Il reste à appliquer Parseval à cette fonction et à majorer.

b) Si l'on fait tendre h vers 0 dans l'inégalité $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h^2}|e^{inh}-1|^2 \, | c_n(f) |^2 \leq C^2$, il vient $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2$.

Attention toutefois, il s'agit d'un passage à la limite dans une série.

Fixons N ; on a : $\sum_{n=-N}^{+N}\frac{1}{h^2}|e^{inh}-1|^2 \, | c_n(f) |^2 \leq C^2$. Faisons tendre h vers 0 ; il vient : $\sum_{n=-N}^{+N} n^2 | c_n(f) |^2 \leq C^2$.

Cela étant vrai pour tout N, en passant au sup, il vient : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 | c_n(f) |^2 \leq C^2$.

Le reste est classique ; cf le théorème de convergence normale.

Exercice 15 : Nouvelle généralisation.

1) Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $h > 0$. Montrer que :

$$\frac{1}{2h}\int_{(2\pi)} | f(x+h) - f(x-h)|^2.dx = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sin^2 nh . |c_n(f)^2| .$$

2) On suppose $\exists M \geq 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \;\; | f(u) - f(v) | \leq | u - v |^\alpha$.

Montrer que $\sum_{n=N+1}^{2N} |c_n(f)|^2 = O(\frac{1}{N^{2\alpha}})$. [Indication : prendre $h = \frac{\pi}{4N}$.]

3) En déduire que si $\alpha > ½$, la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Solution :

Exercice 16 : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On suppose tous ses coefficients de Fourier $c_n(f) \geq 0$.

1) Montrer que $\forall r \in \,]0, 1[\quad \sum_{n\in Z} c_n(f).r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2).f(t)}{r^2-2r\cos t+1}.dt$.

2) Montrer que la série $\sum_{n\in Z} c_n(f)$ converge.

3) Montrer que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

Solution : [Oral Mines PSI 2010, RMS n° 578.]

1) Fixons $r \in \,]0, 1[$. Comme la suite $(c_n(f))$ est bornée, la série trigonométrique $\sum_{n\in Z} c_n(f).r^{|n|}$ converge absolument convergente. Sa somme se calcule par interversion de sommes (cf. § 4, ex. 1) :

$$\sum_{n\in Z} c_n(f).r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in Z} r^{|n|}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} f(t).dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in Z} r^{|n|}e^{-\mathrm{int}}.f(t).dt = \dots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2).f(t)}{r^2-2r\cos t+1}.dt .$$

2) Je dis que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2).f(t)}{r^2-2r\cos t+1}.dt \to f(0)$ quand $r \to 1-0$.

Cela se montre par soustraction et concentration de masse en 0 (cf. cours sur suites en delta).

Or, par double monotonie, $\sum_{n\in Z} c_n(f).r^{|n|} \to \sum_{n\in Z} c_n(f) \in [0, +\infty]$ quand $r \to 1-0$.

Donc la série $\sum_{n\in Z} c_n(f)$ converge et vaut $f(0)$.

3) Comme les $c_n(f)$ sont ≥ 0, la série trigonométrique $\sum_{n\in Z} c_n(f).e^{in\theta}$ est normalement convergente.

Sa somme g a mêmes coefficients de Fourier que f. Par Parseval, $g = f$.

3. Applications géométriques.

Les courbes fermées peuvent être paramétrées par des fonctions périodiques, donc par des séries de Fourier : équations polaires ou équations d'Euler. Cette idée est à l'origine de la preuve d'Hurwitz de l'inégalité isopérimétrique. Sont ici regroupés divers exercices portant sur ce thème, directement ou non. Le problème ENS Saint-Cloud 1981 fait le tour de la question.

Exercice 1 : Soit $f \in C^2([-\pi, \pi], \mathbf{R})$. Montrer que : $\int_{-\pi}^{+\pi}(f'^2 - f^2) \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{+\pi} f\right)^2$.

Solution : [Oral X 1996, RMS n° 71].

Prolongeons $f|_{[-\pi,\pi[}$ en une fonction 2π-périodique continue par morceaux.

Et développons-la en série de Fourier : $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n.\cos(nx)+b_n.\sin(nx))$

Alors $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n.\cos n(nx)+nb_n.\sin(nx))$, en notant f' la 2π-périodisée de $f|_{[-\pi,\pi[}$.

Cela s'établit par parties, rappelons-le : voir remarques du cours sur les quasi-dérivées.

Par Parseval, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f'^2 - f^2) = \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2) \leq \frac{a_0^2}{4} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\right)^2$.

Cas d'égalité : $a_n = b_n = 0$ pour $n \geq 2$, donc $f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\sin x$.

Exercice 2 : **Inégalité de Wirtinger**. Soit G = { $f \in C^1([0, 1], \mathbf{R})$; $f(0) = f(1) = 0$ }.

Montrer l'inégalité $(\forall f \in G)\quad \pi^2 \int_0^1 f^2 \le \int_0^1 f'^2$. Cas d'égalité ?

Solution : C'est un problème d'optimisation sous contraintes, G étant un sous-espace de codimension 2 de $C^1([0, 1], \mathbf{R})$. La solution ici proposée utilise les séries de Fourier. Il en existe une autre (cf. mes problèmes d'intégration).

La fonction $f(t) = \sin(\pi t)$ est élément de G, et vérifie $\int_0^1 f^2 = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 f'^2 = \frac{\pi^2}{2}$.

Soient $f \in G$, et h la fonction 2-périodique et impaire prolongeant f.

h est continue et C^1 par morceaux. Développons h et sa quasi-dérivée h' en série de Fourier.

$$h(\theta) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(n\pi\theta) \quad , \quad h'(\theta) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.n\pi.\cos(n\pi\theta)$$

où $\qquad b_n = \int_{-1}^{+1} h(\theta)\sin(n\pi\theta).d\theta = 2\int_0^{+1} f(\theta)\sin(n\pi\theta).d\theta$.

La formule de Parseval donne :

$$\frac{1}{2}\int_{(2)} h(\theta)^2.d\theta = \int_0^1 f(\theta)^2.d\theta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^{\,2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_{(2)} h'(\theta)^2.d\theta = \int_0^1 f'(\theta)^2.d\theta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^{\,2} n^2\pi^2 .$$

$$\pi^2 \int_0^1 f^2 \le \int_0^1 f'^2 \text{ découle de } \pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^{\,2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^{\,2} n^2\pi^2 .$$

Il y a égalité ssi $b_n = 0$ pour $n \ge 2$, ce qui équivaut (cf. cours) à $f(\theta) = A.\sin(\pi\theta)$.

Exercice 3 : 1) Soit $f \in C^1([0, 2\pi], \mathbf{C})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t).dt = 0$.

Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2.dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2.dt$.

2) Démontrer une inégalité analogue pour $f \in C^1([0, 1], \mathbf{C})$ telle que $f(0) = f(1)$ et $\int_0^1 f(t).dt = 0$.

Solution : [Oral Centrale 2005, RMS n° 807]

Exercice 4 : Soit $f \in C^1([0, 2\pi], \mathbf{C})$, de classe C^2 par morceaux, telle que $f(0) = f(2\pi)$.

Montrer que $4\int_0^{2\pi} |f(t)|^2.dt + 2\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2.dt \ge 5\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2.dt$.

Solution : Prolongeons f en une fonction 2π-périodique $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Cette fonction, encore notée f, est continue, de classe C^2 par morceaux.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx} \qquad f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in.c_n(f).e^{inx} \qquad f''(x) \sim -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2.c_n(f).e^{inx} .$$

Par f' et f'' il faut entendre les quasi-dérivées de f.

$$\frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2.dt + \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2.dt - \frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2.dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.[2n^4 - 5n^2 + 4] \ge 0,$$

car le trinôme $2x^2 - 5x + 4$, de discriminant > 0, est toujours > 0. Cqfd.

Exercice 5 : Soit $F : t \in \mathbf{R} \to (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$ de classe C^1 2π-périodique telle que, pour tout réel t, $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$. On pose $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x.dy - y.dx$. Montrer que $|S| \le \pi$. Cas d'égalité ? Interprétation géométrique ?

Solution : [Oral RMS 1993, RMS n° 55]

Exercice 6 : Soit γ une application de classe C^1 2π-périodique de **R** dans **C** telle que :
$\forall s \in \mathbf{R}$ $|\gamma'(s)| = 1$. On note S l'aire orientée délimitée par $\gamma|_{[0,2\pi]}$.
1) Exprimer S à l'aide des coefficients de Fourier de γ.
2) Montrer que $S \le \dfrac{1}{4\pi}$; étudier le cas d'égalité.

Solution : [Oral Centrale 2004, RMS n° 93]

Exercice 7 : Soit $f \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 2π-périodique telle que $f > 0$ et $f + f'' > 0$.
Pour $t \in \mathbf{R}$, soit M(t) le point de $\mathbf{R}^2$ défini par $\overrightarrow{OM(t)} = f(t).(\cos t, \sin t) + f'(t).(-\sin t, \cos t)$.
1) On suppose f constante. Que dire ?
2) Montrer que la longueur L du support de M est $L = \int_0^{2\pi} f$.
3) Déterminer la tangente en M au point de paramètre t, la distance de cette droite à l'origine.
4) Montrer que l'aire A limitée par le support de M est : $A = \int_0^{2\pi} (f + f'').f$.
5) Montrer que $4\pi A \le L^2$. Etudier le cas d'égalité.

Solution : [Oral Centrale MP 2011, RMS n° 905]
Introduisons le repère radial $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t)$, $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Rappelons que $\vec{v}(t) = \vec{u}(t+\frac{\pi}{2}) = \dfrac{d\vec{u}}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}(t)$.

$$\overrightarrow{OM(t)} = f(t).\vec{u}(t) + f'(t).\vec{v}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = (\, f(t) + f''(t)\,).\vec{v}(t) .$$

L'arc paramétré Γ décrit par M est C^1 et régulier puisqu'en tout point $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} \neq \vec{0}$.

1) Si $f(t) = a > 0$, cet arc est le cercle de centre O et de rayon a décrit dans le sens trigonométrique.

2) $\dfrac{ds}{dt} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| = |\, f(t) + f''(t)\,| = f(t) + f''(t)$, compte tenu des hypothèses.

Donc $L = \int_0^{2\pi} (f(t) + f''(t)).dt = \int_0^{2\pi} f(t).dt$.

3) La tangente en M à Γ est dirigée par le vecteur $\vec{v}(t)$. C'est donc la droite d'équation $X = f(t)$ dans le repère radial. Il en résulte aussitôt que la distance de O à cette tangente est $|\, f(t)\,| = f(t)$.
4) L'aire A délimitée par le support de Γ est donnée par :

$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x.dy - y.dx) = \frac{1}{2}\int_\Gamma [\overrightarrow{OM}, d\overrightarrow{M}] = \frac{1}{2}\int_\Gamma [\overrightarrow{OM(t)}, \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}].dt .$$

où [,] désigne le produit mixte plan, c'est-à-dire le déterminant dans une base orthonormée directe.

C'est une conséquence de Riemann-Green. Ici : $[\overrightarrow{OM(t)}, \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}] = f(t).(\, f(t) + f''(t)\,)$.

Par conséquent, $A = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f + f'').f = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f^2 - f'^2)$ après une I.P.P.

5) L'inégalité demandée est la célèbre **inégalité isopérimétrique**.

Compte tenu de 2) et 4), elle s'écrit $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f^2 - f'^2) \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\right)^2$.

On pense à Parseval. Développons f et f' en série de Fourier :

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n.\cos(nt) + b_n.\sin(nt)) \quad , \quad f'(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-na_n.\sin(nt) + nb_n.\cos(nt)) \; .$$

Il y a convergence normale des deux séries, compte tenu des hypothèses faites sur f.

On veut : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f^2 - f'^2) = \frac{a_0^{\,2}}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2-1)(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\right)^2 = \frac{a_0^{\,2}}{4}$.

Or c'est bien évident ! Il y a égalité ssi $\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2-1)(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}) = 0$, i.e. ssi $a_n = b_n = 0$ pour $n \ge 2$,

autrement dit ssi $f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos t + b_1.\sin t$ (soit par égalité, soit par Parseval).

Le lecteur est invité à vérifier que l'arc Γ correspondant est un cercle.

<u>Remarque</u> : Ce résultat, l'un des plus anciens et des plus célèbres des mathématiques, demanderait à être précisé. Il faudrait expliquer le rôle exact joué par l'hypothèse $f(t) + f''(t) > 0$: on montrer qu'il implique la stricte convexité de la région délimitée par Γ. Il resterait à généraliser ce résultat.

<u>Exercice 8</u> : 1) Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée dans $\mathbf{R}^2$, continue et C^1 par morceaux. Montrer qu'on peut lui associer une série de Fourier et réciproquement.
2) Trouver la série de Fourier d'un polygone.

<u>Solution</u> : [Oral X 2004, RMS n° 55]

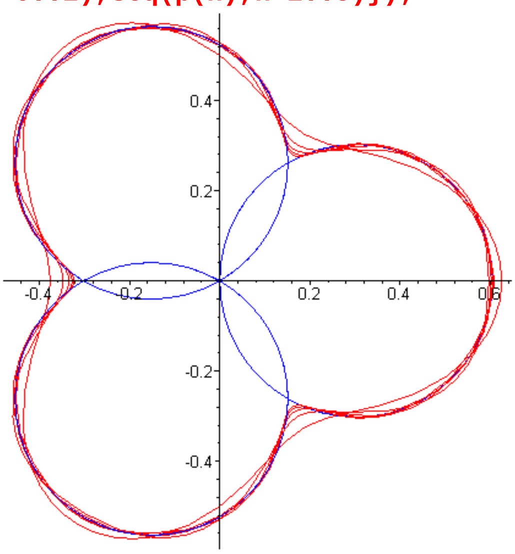
<u>Exercice 9</u> : Tracer la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(3k\theta)}{(3k+1)(3k-1)}$.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2011, RMS n° 237]

1) $r(\theta)$ est somme d'une série trigonométrique normalement convergente.
C'est une fonction continue, paire et $2\pi/3$ périodique.

2) Ne sachant pas si une indication fut donnée par l'examinateur, ou si le candidat disposait d'un ordinateur, il est difficile de se trouver dans les conditions de la planche.
Quoi qu'il en soit, on subodore que cet exercice contient une dose d'humour. Ce que confirme Maple, qui suggère que la courbe est réunion de trois arcs de cercle passant par O.

```
> with(plots):
> r:=(n,t)->1/2+sum((-1)^(k-1)*cos(3*k*t)/(9*k^2-1),k=1..n);
> p:=n->polarplot(r(n,t),t=0..2*Pi):c:=k->polarplot(Pi/(3*sqrt(3))*cos(t+2*k*Pi/3),t=0..2*Pi,color=blue):
> display({seq(c(k),k=0..2),seq(p(n),n=1..5)});
```



3) Développons en série de Fourier $2\pi/3$-périodique.la fonction paire et $2\pi/3$ périodique définie par :

$$f(t) = \cos t \quad \text{pour } |\,t\,| \le \pi/3.$$

Il vient $a_k(f) = \dfrac{3}{\pi}\int_{(\frac{2\pi}{3})}\cos t.\cos(3kt).dt = \dfrac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\cos t.\cos(3kt).dt$

$$= \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}[\cos((3k+1)t)+\cos((3k-1)t)].dt = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\,\frac{(-1)^{k-1}}{(3k-1)(3k+1)}.$$

f étant continue et C^1 par morceaux, il vient $f(\theta) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos(3k\theta)}{(3k+1)(3k-1)}$.

Par conséquent $r(\theta) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}.f(\theta)$. En particulier $r(\theta) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}.f(\theta)$ pour $|\theta| \leq \pi/3$.

4) Aurions-nous pu calculer la série trigonométrique « à l'aveugle » ?

Formellement, $r''(\theta) + r(\theta) = -\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\cos(3k\theta) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\cos(3k(\theta+\pi))$,

série trigonométrique dont la somme est nulle au sens de Lagrange.
Donc $r''(\theta) + r(\theta) = 0$ et $r(\theta) = a.\cos\theta + b.\sin\theta$.
Un argument de parité conclut, mais il reste à calculer a.
Tout cela n'est pas très sérieux. C'est du calcul symbolique.
On pourrait de manière plus terre à terre calculer les sommes partielles de la série.

$$r_n''(\theta) + r_n(\theta) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(3k\theta) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\cos(3k(\theta+\pi)) = \dots,$$

intégrer cette équation différentielle, puis passer à la limite.

Exercice 10 : Courbes en polaires.

1) La **feuille de vigne de Weierstrass**. Etudier et représenter la courbe $r = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(3^n\theta)}{2^n}$.

2) L'**étoile polaire**. Soit $d(x) = d(x, \mathbf{Z})$, $f(x) = \dfrac{\pi}{10}(1 + 4.d(\dfrac{5x}{2\pi} - \dfrac{1}{4}))$. Etudier $r = \dfrac{1}{\sin f(\theta)}$.

3) Equation polaire du polygone régulier de n côtés de centre O.

4) La **chapelle romane**. Soit f la fonction $\dfrac{\pi}{2}$-périodique définie par $f(\theta) = 2.\cos\theta$ si $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Développer f en série de Fourier. Représenter la courbe $r = f(\theta)$.

Solution :

Exercice 11 : **inégalité de Hilbert**.

Soit e_n ($n \in \mathbf{Z}$) l'application de **R** dans **C** définie par $e_n(t) = e^{int}$.

a) Développer en série de Fourier la fonction h 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $h(t) = \pi - t$.

b) Soient $P = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}a_p.e_{-p}$ et $Q = \displaystyle\sum_{q=0}^{n}b_q.e_{-q}$, où les a_p et b_q sont complexes.

Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(t)Q(t)h(t)e_{-1}(t).dt$.

c) Trouver une constante C (indépendante des a_p, b_q et de n) telle que :

$$\Big|\sum_{0\leq p,q\leq n}\frac{a_p b_q}{p+q+1}\Big|^2 \leq C\sum_{p=0}^{n}|a_p|^2\sum_{q=0}^{n}|b_q|^2.$$

d) On pose $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+k+1}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2 \leq \pi^2\sum_{j=0}^{n}|a_j|^2$.

Solution : [Oral ENS 1995, RMS n° 318]

4. Séries trigonométriques.

Exercice 1 : Noyau de Poisson.

Soit $r \in [0, 1[$. Convergence et calcul des séries trigonométriques :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\, e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n.\cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} r^n.\sin(n\theta).$$

Solution :

Les séries trigonométriques sont normalement convergentes, et de sommes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}.e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n.\cos(n\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} r^n.\sin(n\theta) = \frac{r.\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

En effet $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n.\exp(in\theta) = \frac{r.e^{i\theta}}{1-r.e^{i\theta}} = \frac{r.e^{i\theta}-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$, etc.

Du coup, ce sont les séries de Fourier de leur somme, et :

- $\forall n \in \mathbf{Z} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.e^{-in\theta}.d\theta = r^{|n|}$.
- $\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.\cos(n\theta).d\theta = r^n$.
- $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{1}{\pi}\int_{(2\pi)} \frac{r.\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.\sin(n\theta).d\theta = r^n$.

Exercice 2 : La série d'Euler-Abel $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ (1744-1825) [1].

1) Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbf{R}$. Soit $f(\theta)$ sa somme.

2) Pour $0 < r < 1$, on pose $F_n(r, \theta) = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}.\sin(k\theta)$. Calculer $F_n(r, \theta)$, et montrer que :

$F_n(r, \theta) = \frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} + R_n(r, \theta)$, où R_n est une fraction rationnelle de r à préciser.

3) Soit $A_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$. Vérifier que $A_n(\theta) = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.dr + \int_0^1 R_n(r,\theta).dr$.

4) Calculer la première intégrale. Montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $\int_0^1 R_n(r,\theta).dr \to 0$, la convergence étant uniforme sur tout $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, $(0 < \alpha < \pi)$. En déduire $f(\theta)$.

Solution :

1) La convergence de la série se montre par transformation d'Abel.
Mais dans la suite de l'exercice, on va la redémontrer au passage en calculant cette série.

[1] Euler indiqua la somme de cette série, dans une lettre à Goldbach (1744). Abel nota en 1825 qu'elle donnait un exemple de suite simplement convergente de fonctions continues ayant une somme discontinue.

2) Pour $0 < r < 1$, $F_n(r, \theta) = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}.\sin(k\theta) = \mathrm{Im} \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}.e^{ik\theta} = \mathrm{Im}\,\dfrac{e^{i\theta}-r^n e^{i(n+1)\theta}}{1-re^{i\theta}}$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{(e^{i\theta}-r^n e^{i(n+1)\theta})(1-re^{-i\theta})}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{\sin\theta-r^n\sin(n+1)\theta+r^{n+1}\sin(n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} + R_n(r, \theta) ,$$

où $R_n(r, \theta) = \dfrac{-r^n\sin(n+1)\theta+r^{n+1}\sin(n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}$.

3) Ecrivons $A_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) \int_0^1 r^{k-1}.dr = \int_0^1 \dfrac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.dr + \int_0^1 R_n(r,\theta).dr$.

4) La première intégrale est une fraction rationnelle en r. On a : $\int_0^1 \dfrac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.dr = \dfrac{\pi-\theta}{2}$.

Fixons $\theta \in]0, 2\pi[$; alors $\int_0^1 R_n(r,\theta).dr = \int_0^1 \dfrac{-r^n\sin(n+1)\theta+r^{n+1}\sin(n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}$ dr $\to 0$ quand $n \to +\infty$, la convergence étant uniforme sur tout $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, $(0 < \alpha < \pi)$.

En effet : $\left| \int_0^1 R_n(r,\theta).dr \right| \le \int_0^1 \dfrac{2r^n}{1-2r\cos\theta+r^2}.dr \le \int_0^1 \dfrac{2r^n}{1-2r\cos\alpha+r^2}.dr \to 0$ par convergence dominée.

<u>Conclusion</u> : Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = \dfrac{\pi-\theta}{2}$.

<u>Remarque</u> : une autre approche consiste à noter que $\dfrac{1}{n} = \int_0^{+\infty} e^{-nt}.dt$. Le schéma de calcul est alors le suivant : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) \int_0^{+\infty} e^{-nt}.dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) e^{-nt}.dt$.

Au bout du compte, on trouve $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^t\sin\theta}{e^{2t}-2e^t\cos\theta+1}.dt$, qui se calcule.

Mais le changement de variable r = exp t donne aussitôt $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}.dr$ …

<u>Exercice 3</u> : Soit f continue 2π-périodique de **R** dans **C**.

1) Montrer que f est C^∞ si et seulement si, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $c_n(f) = O(\dfrac{1}{|n|^p})$ quand $n \to \pm\infty$.

2) Montrer que f est développable en série entière en 0 ssi :

$$\exists\, C , \lambda > 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad | c_n(f) | \le C.\exp(-\lambda.|n|).$$

<u>Solution</u> :

1) Si f est C^∞, pour tout $(n, p) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}$, $c_n(f^{(p)}) = (in)^p.c_n(f)$; comme la suite $(c_n(f^{(p)}))$ est bornée (elle tend même vers 0), $c_n(f) = O(\dfrac{1}{|n|^p})$ quand $n \to \pm\infty$.

Réciproquement, si, pour tout p, $c_n(f) = O(\dfrac{1}{|n|^p})$ quand $n \to \pm\infty$, la série trigonométrique $\sum_{n\in Z} c_n.e^{in\theta}$ converge normalement ainsi que toutes ses dérivées.

Sa somme g est donc C^∞. Elle a mêmes coefficients de Fourier que f, donc $g = f$ et f est C^∞.

2) Supposons $\exists\, C, \lambda > 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad | c_n(f) | \le C.\exp(-\lambda.|n|)$ (*).

Alors f est C^∞ en vertu de 1). Mieux ! Ecrivons :

$$f(x) = \sum_{n\in Z} c_n.e^{inx} = \sum_{n\in Z} c_n.\sum_{k\ge 0} \frac{(inx)^k}{k!} = \sum_{k\ge 0} \Big(\sum_{n\in Z} c_n.n^k\Big).\frac{(ix)^k}{k!} .$$

Le théorème relatif aux séries doubles s'applique pour $|x| < \lambda$, car si $|x| < \mu < \lambda$:

$$\sum_{n\in Z}\Big(\sum_{k\geq 0}|c_n||n|^k\Big).\frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{n\in Z}\Big(\sum_{k\geq 0}|c_n||n|^k\Big).\frac{\mu^k}{k!} = \sum_{n\in Z}|c_n|\exp(|n|\mu) \leq \sum_{n\in Z}C.\exp(|n|.(\mu-\lambda)) < +\infty.$$

Reste à montrer que si f est développable en série entière au V(0), ses coefficients de Fourier vérifient (*). Or c'est faux, car si f est DSE(0), rien ne dit qu'elle est C^∞ sur **R** : il suffit de « biseauter » une fonction égale à 1 au V(0). Peut-être faut-il supposer de plus f C^∞ sur **R** …

<u>Exercice 4</u> : Pour $k \in$ **N***, étudier la convergence des séries trigonométriques

$$C_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^k} \quad \text{et} \quad S_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^k}.$$

Indiquer un procédé récurrent pour calculer leurs sommes, et pour calculer $\zeta(2k)$.

<u>Solution</u> :

Pour $k \geq 2$, les séries sont normalement convergentes, et ont des sommes continues 2π-périodiques sur **R**, et resp. paires et impaires.

Mieux, $C_k(x)$ et $S_k(x)$ sont de classe C^{k-2}, et, pour $k \geq 3$, $C_k'(x) = -S_{k-1}(x)$ et $S_k'(x) = C_{k-1}(x)$.

Pour $k = 1$, la situation est plus délicate.

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \text{ est le toit d'usine, et } C_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n} = -2\ln\Big|\sin\frac{x}{2}\Big|.$$

La formule $C_2'(x) = -S_1(x)$ est encore valable, par convergence dominée.

Ceci donne un calcul récurrent de $S_1(x)$, $C_2(x)$, $S_3(x)$, $C_4(x)$, …i.e. de $S_{2k+1}(x)$ et $C_{2k}(x)$, sur $[0, 2\pi]$.

```
> S1:=t->(Pi-t)/2;1/Pi*int(S1(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$S1 := t \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}t \qquad\qquad \frac{1}{6}\pi^2$$

```
> C2:=t->Zeta(2)-int(S1(u),u=0..t):C2(t);1/Pi*int(C2(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{4}t^2 \qquad\qquad \frac{1}{90}\pi^4$$

```
> S3:=t->int(C2(u),u=0..t):S3(t);1/Pi*int(S3(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2 t - \frac{1}{4}\pi t^2 + \frac{1}{12}t^3 \qquad\qquad \frac{1}{945}\pi^6$$

```
> C4:=t->Zeta(4)-int(S3(u),u=0..t):C4(t);1/Pi*int(C4(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$\frac{1}{90}\pi^4 - \frac{1}{12}\pi^2 t^2 + \frac{1}{12}\pi t^3 - \frac{1}{48}t^4 \qquad\qquad \frac{1}{9450}\pi^8$$

```
> S5:=t->int(C4(u),u=0..t):S5(t);1/Pi*int(S5(t)^2,t=0..2*Pi);
```

$$\frac{1}{90}\pi^4 t - \frac{1}{36}\pi^2 t^3 + \frac{1}{48}\pi t^4 - \frac{1}{240}t^5 \qquad\qquad \frac{1}{93555}\pi^{10}$$

Ces calculs peuvent être systématisés grâce aux nombres et aux polynômes de Bernoulli.

Le calcul récurrent de $C_1(x)$, $S_2(x)$, $C_3(x)$, $S_4(x)$, …, i.e. de $C_{2k+1}(x)$ et $S_{2k}(x)$, sur $[0, 2\pi]$, est plus ardu, et pose des problèmes à Maple, qui s'enferre dans des expressions complexes contenant la fonction dilog… Ce sujet mériterait d'être approfondi.

<u>Exercice 5</u> : Etudier la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n}).\sin(n\theta)$.

Solution : Ecrivons $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n}).\sin(n\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty}b_n.\sin(n\theta)$.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.\sin(n\theta)$ a pour somme le « toit d'usine » (cf. § 1).

Comme $b_n = O(\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.\sin(n\theta)$ est une série trigonométrique normalement convergente.

En résumé, $f(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{n}).\sin(n\theta)$ est somme du toit d'usine et d'une fonction continue 2π-périodique et impaire. Elle est donc la série de Fourier de sa somme, et est continue sauf aux points $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Il se passe en ces points un phénomène de Gibbs.

Exercice 6 : Soit (b_n) une suite tendant en décroissant vers 0.

1) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.\sin(n\theta)$ converge simplement sur **R**, et uniformément sur tout segment $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, $0 < \alpha < \pi$.

2) Montrer que les sommes partielles de cette série sont uniformément majorées ssi $b_n = O(1/n)$.

3) Montrer que la série converge uniformément ssi $b_n = o(1/n)$.

Solution : [Zygmund, chap. V p. 182, RMS fév. 1983, p. 239-246, Ecrit X M' 1992, Oral X , etc.]
Cf. mon problème d'écrit sur ce thème.

Exercice 7 : Soit $f : x \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$. Montrer que f est définie sur **R**, qu'elle est continue mais n'est pas C^1 par morceaux.

Solution : [Oral Mines PC 2012, RMS n° 690]
Il s'agit d'une série trigonométrique normalement convergente. Sa somme est définie, continue, paire et 2π-périodique.

Nous allons montrer que $f'_d(0) = -\infty$, autrement dit que $\Delta(x) = \frac{f(1)-f(x)}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0+$.

$$\Delta(x) = \frac{f(1)-f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^{3/2}x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.\sin^2(nx/2)}{n^{3/2}x} = \sum_{n=1}^{N}\frac{2.\sin^2(nx/2)}{n^{3/2}x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2.\sin^2(nx/2)}{n^{3/2}x}.$$

où l'on a cassé la somme en deux en introduisant $N = [\frac{\pi}{x}]$, $x > 0$.

Alors $$\Delta(x) \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{2.\sin^2(nx/2)}{n^{3/2}x} \geq \sum_{n=1}^{N}\frac{2(nx/\pi)^2}{n^{3/2}x} = \frac{2x}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n} \geq \frac{2x}{\pi^2}\int_1^{N+1}\sqrt{x}.dx$$

$$= \frac{2x}{\pi^2}\frac{2}{3}(\,(N+1)^{3/2} - 1\,) \geq \frac{4x}{3\pi^2}\,(\,(\frac{\pi}{x})^{3/2} - 1\,) = H(x).$$

La seconde minoration découle du fait que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ (par concavité) et du fait que

$1 \leq n \leq N \leq \frac{\pi}{x} < N+1 \Rightarrow 0 < \frac{nx}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Le reste est facile.

Pour conclure, il reste à observer que $H(x) = \frac{4x}{3\pi^2}\,(\,(\frac{\pi}{x})^{3/2} - 1\,) \sim \frac{4}{3\sqrt{\pi x}} \to +\infty$ quand $x \to 0+$.

Remarque : La fonction f est C^1 sur $]0, 2\pi[$ et a pour dérivée $g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}$. Cela peut s'établir par abélisation. Elle est liée aux polylogarithmes comme le montre cette feuille de calculs Maple.

```
> with(plots):F:=x->sum(cos(n*x)/n^(3/2),n=1..infinity);F(x);
```

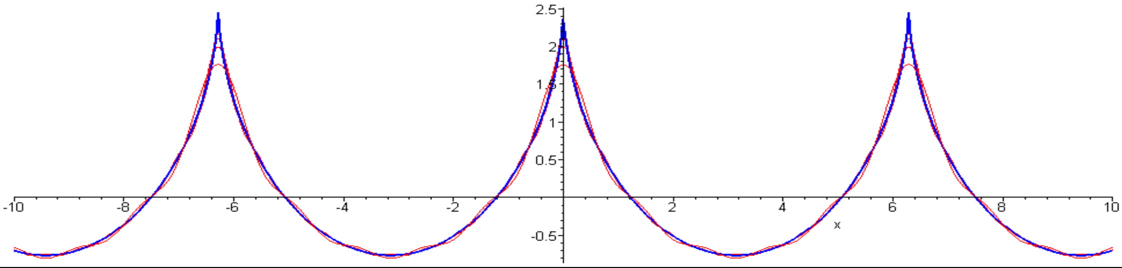
$$F := x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^{(3/2)}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^{(3/2)}}$$

```
> S:=(N,x)->sum(cos(n*x)/n^(3/2),n=1..N);
p:=N->plot(S(N,x),x=-10..10,numpoints=2000);
> f:=z->sum(z^n/n^(3/2),n=1..infinity);f(z);
```

$$f := z \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{(3/2)}} \qquad \mathrm{polylog}\left(\frac{3}{2}, z\right)$$

```
> G:=x->Re(polylog(3/2,exp(I*x)));q:=plot(G(x),x=-10..10,
thickness=2,color=blue):display({q,seq(p(5*N),N=1..7)});
```

$$G := x \to \Re\left(\mathrm{polylog}\left(\frac{3}{2}, \mathrm{e}^{(I\,x)}\right)\right)$$



Exercice 8 : Montrer que la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est définie et continue sur **R**. Etudier sa dérivabilité en 0.

Solution : [Oral X MP 2012, RMS n° 234]
Il s'agit d'une série du « type Weierstrass ».
C'est une série trigonométrique normalement convergente. Sa somme est définie, continue, 2π-périodique, impaire et bornée : $|\, f(x)\,| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Nous allons montrer que $f'(0) = +\infty$, autrement dit que $\Delta(x) = \frac{f(x)}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0+$.

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n x} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(2^n x)}{2^n x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n x}.$$

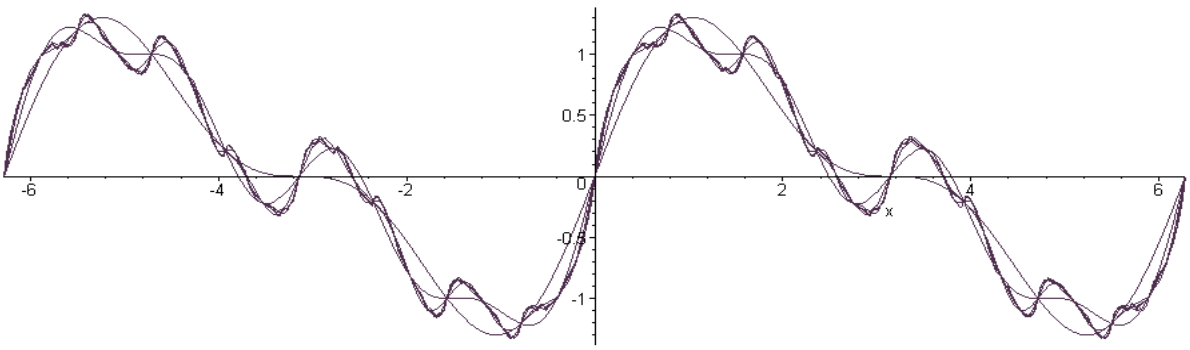
où l'on a cassé la somme en deux en introduisant $N = [\log_2(\frac{\pi}{2x})]$. On a donc $2^N \le \frac{\pi}{2x} < 2^{N+1}$.

Alors $\quad \Delta(x) \ge \sum_{n=0}^{N} \frac{2^{n+1} x}{2^n \pi x} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n x} = \frac{2}{\pi}(\,N+1\,) - \frac{1}{2^N x} > \frac{2}{\pi}\log_2(\frac{\pi}{2x}) - \frac{4}{\pi} = H(x)$.

On a minoré le première somme via $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \ \sin t \ge \frac{2t}{\pi}$, la seconde via $\sin t \ge -1$.

Pour conclure, il reste à noter que $H(x) \to +\infty$ quand $x \to 0+$.
Feuille de calculs Maple :

```
> with(plots):
> S:=(N,x)->sum(sin(2^n*x)/2^n,n=0..N);
p:=N->plot(S(N,x),x=-2*Pi..2*Pi,color=violet);
> display({seq(p(N),N=1..7)});
```



Exercice 9 : **la série de Fatou** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\ln n}$ (1906).

1) Montrer que cette série converge sur **R** ; domaines de convergence uniforme ?
2) Par des transformations d'Abel répétées, montrer que la somme de cette série est C^1 sur]0, 2π[.
3) Représenter graphiquement les premières sommes partielles. Qu'observe-t-on ? [2]

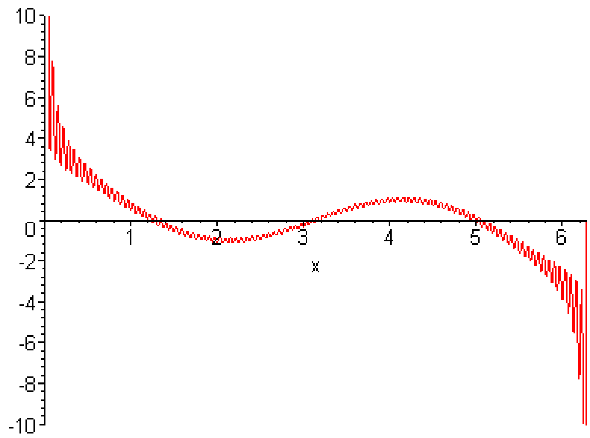
Solution :

1) La série de Fatou est une série trigonométrique de la forme $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n \sin(n\theta)$, où $b_n \downarrow 0$.

Une transformation d'Abel suffit à démontrer la convergence simple sur]0, 2π[, et uniforme sur tous les segments [α, 2π−α], 0 < α < π. Du coup, la somme est définie sur **R**, et continue sur **R** −π**Z**.

2) Etant donnée l'extrême lenteur de la décroissance de (b_n), deux transformations d'Abel sont ici nécessaires. Elles sont courageusement laissées au lecteur intrépide…

```
> S:=(n,x)->sum(sin(k*x)/ln(k),k=2..n);
> plot(S(100,x),x=0..2*Pi,-10..10,numpoints=5000);
```



Exercice 10 : **paradoxe de Lagrange**.

Lagrange affirmait que la série ½ + cos θ + cos 2θ + … a une somme nulle.

De même, il affirmait que la série sin θ + sin 2θ + … a pour somme $\frac{1}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}$.

En quel sens peut-on donner raison à Lagrange ?

Solution : 1) La première série diverge en tout point, la seconde converge seulement en les $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

[2] On peut montrer que la somme de cette série est non bornée sur [0, 2π], n'est ni intégrable-Riemann au sens généralisé, ni intégrable-Lebesgue sur cet intervalle, et qu'enfin la série de Fatou n'est pas la série de Fourier de sa somme.

En effet, si $\sum\cos(nx)$ converge, son terme général $\cos(nx) \to 0$.

Alors $\sin^2 nx = 1 - \cos^2 nx \to 1$ et $\sin^2 nx = \frac{1-\cos(2nx)}{2} \to \frac{1}{2}$!

Si $\sum\sin(nx)$ converge, $\sin(nx) \to 0$. Alors $\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2.\sin x.\cos nx \to 0$.

Donc $\sin^2 x.\cos^2 nx \to 0 = \sin^2 x$. cqfd.

On peut aussi calculer les sommes partielles.

Celles de la première série valent $\frac{\sin((2n+1)\theta/2)}{2.\sin(\theta/2)}$ si $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$, $n+\frac{1}{2}$ sinon. Elles divergent !

On pourrait en conclure que Lagrange était un idiot… si l'on oubliait qu'il fut l'un des plus grands mathématiciens et physiciens du XVIIIème siècle.

2) D'une part, les sommes partielles de chacune des deux séries convergent resp. vers 0 et vers $\frac{1}{2}\text{cotan}\frac{\theta}{2}$ en moyenne de Cesàro.

3) D'autre part, si l'on intègre terme à terme ½ + cos θ + cos 2θ + …, on obtient $\frac{x}{2} + \sum_{n\geq1}\frac{\sin(n\theta)}{n}$, qui converge simplement vers une onde carrée (cf. ex. sur le toit d'usine). En redérivant, on trouve 0.

De même, si l'on intègre terme à terme sin θ + sin 2θ + … , on trouve $\sum_{n\geq1}\frac{\cos(n\theta)}{n}$, dont la somme est $-\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$ (cf. § 1). En réintégrant, on trouve $\sum_{n\geq1}\sin(n\theta) = \frac{1}{2}\text{cotan}\frac{\theta}{2}$.

Exercice 11 : Soient $(b_{mn})_{m,n\geq1}$ une suite double telle que $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_{mn}| < +\infty$, T_1 et T_2 deux réels > 0.

Montrer que $f(x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}b_{mn}.\sin\frac{m\pi x}{T_1}.\sin\frac{n\pi y}{T_2}$ est définie, continue sur $\mathbf{R}^2$,

et vérifie $f(x + T_1, y) = f(x, y + T_2) = f(x, y)$, $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$.

et $b_{mn} = \frac{4}{T_1\,T_2}\iint_{[0,T_1]\times[0,T_2]} f(x,y).\sin\frac{m\pi x}{T_1}.\sin\frac{n\pi y}{T_2}.dxdy$.

Solution : Ce n'est pas difficile du tout.

5. Séries entières et séries trigonométriques.

Exercice 1 : 1) Calculer pour $n \in \mathbf{N}$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e^{i\theta})^{2n}.e^{-in\theta}.d\theta$.

2) Rayon de convergence et calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^n.x^n$.

Solution : 1) Si $P(\theta) = (1 + e^{i\theta})^{2n}$, $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e^{i\theta})^{2n}.e^{-in\theta}.d\theta = c_n(P) = C_{2n}^n$.

Par ailleurs, $I = \frac{4^{n+1}}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta.d\theta$.

2) D'Alembert donne pour rayon R = ¼.

Et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^n.x^n = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(4x)^n\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta.d\theta = \dots = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1-4x\cos^2\theta} = \dots = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Naturellement, on peut vérifier cela par le binôme, ou en montrant que f satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (cf. écrit Mines 2000).

Exercice 2 : Soient D = { z ∈ **C** ; |z| < 1 }, $\overline{D}$ son adhérence, f : $\overline{D} \to$ **C** une fonction continue telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ pour tout z ∈ D.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2$ converge.

2) Montrer que, pour tout n, $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}).e^{-in\theta}.d\theta$, et retrouver 1).

3) Que dire de f si $f(z) = 0$ pour tout z tel que |z| = 1 ?

Solution : [Oral X 2003, RMS n° 57].

1) Notons M = max { | f(z) | ; z ∈ $\overline{D}$ } (théorème des bornes). Fixons r ∈ [0, 1[.

La série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} a_n.r^n.e^{in\theta}$ converge normalement sur **R**, car $\sum_{n\geq 0} |a_n|.r^n < +\infty$.

Elle est donc la série de Fourier de sa somme.

La formule de Parseval s'écrit : $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2.r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2.d\theta \leq M^2$.

Il reste à passer au sup en r par associativité de bornes supérieures :

$$\sup_{0\leq r<1} \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.r^{2n} = \sup_{0\leq r<1} \sup_N \sum_{0\leq n\leq N} |a_n|^2.r^{2n}$$
$$= \sup_N \sup_{0\leq r<1} \sum_{0\leq n\leq N} |a_n|^2.r^{2n} = \sup_N \sum_{0\leq n\leq N} |a_n|^2 \leq M^2.$$

NB : Ce résultat est sans réciproque : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ ne se prolonge pas continûment à $\overline{D}$, bien que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

2) Pour tout n et tout $0 < r < 1$, $a_n = \frac{1}{2\pi.r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}).e^{-in\theta}.d\theta$.

Il est légitime de faire tendre r vers 1 dans cette formule par convergence dominée.

En effet, $f(r.e^{i\theta}).e^{-in\theta} \to f(e^{i\theta}).e^{-in\theta}$ quand $r \to 1-0$ et $| f(r.e^{i\theta}).e^{-in\theta} | \leq M$.

Mais il s'agit en réalité d'une banale convergence uniforme, car f est uniformément continue sur $\overline{D}$.

Par conséquent, pour tout n : $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}).e^{-in\theta}.d\theta$.

On retrouve le résultat de 1) via Parseval appliqué à la fonction $\theta \to f(e^{i\theta})$.

3) Si f est nulle sur le cercle unité, tous les a_n sont nuls et f est nulle.

Exercice 3 : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ une série entière de rayon R > 0, et de somme f(z).

Pour $0 \leq r <$ R, on pose $I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2.d\theta$.

1) Montrer que : $\forall r \in [0, R[$ $I(r) = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.r^{2n}$.

2) Montrer que I est de classe C^∞ et croissante sur [0, R[.

3) Montrer que ϕ : u ∈]−∞, ln R[→ ln(I(exp(u)) ∈ **R** est croissante et convexe.

Solution : [Oral Centrale 2004, RMS n° 88]

1) La formule découle de Parseval.

2) I(r) est somme d'une série entière de rayon ≥ R. L'assertion est facile.

3) ϕ est croissante comme composée ; sa convexité découle de Cauchy-Schwarz.

6. Equations différentielles et fonctionnelles.

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles $y'' - y = \sin x$ et $y'' - y = |\sin x|$.

Solution : 0) Ce sont deux équations linéaires du second ordre à coefficients constants.
L'équation homogène a pour solutions $y = a.\exp x + b.\exp(-x) = c.\text{ch } x + d.\text{sh } x$.
Reste à trouver une solution particulière de chacune des équations.

1) Solution particulière de $y'' - y = \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

L'équation $y'' - y = e^{ix}$ admet une solution de la forme $y = \alpha\, e^{ix}$: on trouve $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Par conjugaison et linéarité (superposition) $y'' - y = \sin x$ a une solution de la forme $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

2) Solution particulière de $y'' - y = |\sin x|$.
La méthode de variation des constantes est ici peu élégante.
Développons $|\sin x|$ en série de Fourier. Il y a ici convergence normale :

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

Cherchons y sous forme d'une série trigonométrique $y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(2nx)$ dérivable à volonté.

Alors $y'' = -\sum_{n=1}^{+\infty} 4n^2 a_n.\cos(2nx)$ et l'identification terme à terme donne $\frac{a_0}{2} = -\frac{2}{\pi}$, $a_n = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{16n^4-1}$

Cette méthode purement inductive conduit à considérer la série trigonométrique :

$$y = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{16n^4-1}.$$

Cette série est normalement convergente, ainsi que ses deux premières séries dérivées. Par conséquent, y est de classe C^2 et les calculs précédents sont validés : y est solution de $y'' - y = |\sin x|$.

Conclusion : L'équation $y'' - y = \sin x$ a pour solutions $y = -\frac{1}{2}\sin x + a.\text{ch } x + b.\text{sh } x$.

L'équation $y'' - y = |\sin x|$ a pour solutions $y = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{16n^4-1} + a.\text{ch } x + b.\text{sh } x$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles $y'' + y = \sin x$ et $y'' + y = |\sin x|$.

Solution : [Oral Centrale 2006, RMS n° 744]
Même méthode que dans l'exercice précédent.

Conclusion : L'équation $y'' + y = \sin x$ a pour solutions $y = -\frac{1}{2}x.\cos x + a.\cos x + b.\sin x$.

L'équation $y'' + y = |\sin x|$ a pour solutions $y = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2} + a.\cos x + b.\sin x$.

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles :

$y'' + y = \max(\sin t, 0)$ et $y^{(4)} + 5.y'' + 4.y = |\sin(2t)|$.

Solution :

1) Résolution de y'' + y = max(sin t , 0) .
L'équation homogène a pour solutions z(t) = A.cos t + B.sin t.

On a max(sin t , 0) = $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$.

Il suffit d'additionner des solutions particulières de

$$y'' + y = \frac{1}{\pi}\ ,\quad y'' + y = \frac{1}{2}\sin t \quad\text{et}\quad y'' + y = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}.$$

Dans le dernier cas, on cherche Y(t) = $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\cos(2nt)$, et on trouve Y(t) = $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{(4n^2-1)^2}$.

Conclusion : l'équation différentielle y'' + y = max(sin t , 0) a pour solutions :

$$y(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}t.\cos t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nt)}{(4n^2-1)^2} + A.\cos t + B.\sin t\ .$$

2) Résolution de $y^{(4)} + 5.y'' + 4y = |\sin(2t)|$.
L'équation homogène a pour solutions z(t) = A.cos t + B.sin t + C.cos(2t) + D.sin(2t).

On a $|\sin(2t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(4nt)}{4n^2-1}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme Y(t) = $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\cos(4nt)$, suffisamment dérivable.

Il vient $Y^{(4)} + 5.Y'' + 4.Y = \sum_{n=0}^{+\infty}(256n^4-80n^2+4).a_n.\cos(4nt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(4nt)}{4n^2-1}$.

En identifiant formellement, on trouve : $Y(t) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(4nt)}{(4n^2-1)(64n^4-20n^2+1)}$.

La fonction ainsi obtenue est de classe C^4, et satisfait bien les conditions précédentes.

Conclusion : L'équation différentielle $y^{(4)} + 5.y'' + 4y = |\sin(2t)|$ a pour solutions :

$$\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(4nt)}{(4n^2-1)(64n^4-20n^2+1)} + A.\cos t + B.\sin t + C.\cos(2t) + D.\sin(2t).$$

Exercice 4 : Soient g continue 2π–périodique **R** → **C**, (E) équation différentielle y' – y = g(x).
1) Montrer que (E) admet une unique solution bornée. Etudier sa périodicité.
2) Calculer ses coefficients de Fourier à l'aide de ceux de g.

Solution : [Oral Centrale 1999 RMS n° 366, Ecrit Centrale 2003, Oral Centrale 2004, RMS n° 96]
1) C'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.
L'équation homogène a pour solutions z(t) = a.exp(x).
On en déduit aussitôt que (E) a au plus une solution bornée.
La variation des constantes donne : y(x) = c(x).exp(x) , où c'(x) = g(x).exp(–x).

Le mieux est d'écrire $c(x) = -\int_x^{+\infty} g(t).\exp(-t).dt$ + cte.

Les solutions de (E) sont $y(x) = -e^x\int_x^{+\infty} g(t).e^{-t}.dt + a.e^x$.

La solution $y_0(x) = -e^x\int_x^{+\infty} g(t).e^{-t}.dt$ est bornée, car g est bornée, et c'est la seule.

De plus $y_0(x) = -\int_0^{+\infty} g(x+u).e^{-u}.du$, et, sous cette forme, on voit que y_0 est 2π-périodique.

2) Si $g(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(g).e^{inx}$, on trouve, par coefficients indéterminés $y_0(x) = \sum_{n\in Z}\frac{c_n(g)}{in-1}.e^{inx}$.

Mais on peut retrouver ce résultat à partir de :

$$y_0(x) = -\int_0^{+\infty} g(x+u).e^{-u}.du = -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} g(x+u).e^{-u}.du = -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g(x+t).e^{-t-2k\pi}.dt$$

$$= \frac{-1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi} g(x+t).e^{-t}.dt = \frac{-2\pi}{1-e^{-2\pi}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} g(x-u).e^{u}.du = \frac{-2\pi}{1-e^{-2\pi}}\,(g * h)(x),$$

où h est la fonction 2π-périodique définie par $h(x) = \exp x$ sur $]-2\pi, 0]$.

Exercice 5 : Soit g continue 2π–périodique **R** → **C**, (E) équation différentielle $y'' - 2y' + y = g(x)$.
1) Montrer que (E) admet une unique solution 2π–périodique.
2) Calculer ses coefficients de Fourier à l'aide de ceux de g.

Solution :

Exercice 6 : Montrer que $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^2(a^2+k^2)}$ est de classe C^2 et vérifie sur $[-\pi, \pi]$ l'équation différentielle $S''(x) - a^2 S(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$. Calculer $S(x)$.

Solution : [Oral Mines 1992]

Exercice 7 : Soit $C^\infty_{2\pi}$ l'espace des fonction C^∞ 2π-périodiques de **R** dans **C**.
1) Soit T l'endomorphisme de $C^\infty_{2\pi}$ qui à f associe $f^{(n)}$. Déterminer Ker T et Im T ; montrer qu'ils sont orthogonaux.
2) Soit $(a_k)_{0\le k\le n}$ une suite de complexes. Pour toute $f \in C^\infty_{2\pi}$, on pose $T(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k.f^{(k)}$.
Image et noyau de T ? Quand T est-elle bijective ?

Solution :

Exercice 8 : caractères de U.
1) Construire une bijection naturelle de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathbf{C})$, où $\mathbf{U} = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| = 1 \}$.
2) Montrer que les caractères du groupe compact **U**, c'est-à-dire les morphismes continus de groupe multiplicatif de **U** dans **C***, sont les fonctions $e_n : \theta \to e^{in\theta}$, où n décrit **Z**.

Solution :
1) A toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathbf{C})$ associons la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ définie par $f(t) = \varphi(e^{it})$.
Cette correspondance est linéaire injective, car $t \to e^{it}$ est une surjection de **R** sur **U**.
Elle est bijective, car si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $e^{is} = e^{it} \Rightarrow f(s) = f(t)$, donc $f(t)$ ne dépend que de e^{it}.
Il existe donc $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{C})$ telle que $(\forall t)\ f(t) = \varphi(e^{it})$. Reste à montrer que φ est continue.
Or si $0 < t < 2\pi$ et $e^{it} = x + iy$, alors $t = 2.\text{Arccotan}\frac{x+1}{y}$. La continuité en 1 est facile.
2) Soit φ un caractère de **U**. Posons comme en 1) $f(t) = \varphi(e^{it})$, et développons f en série de Fourier.

$$f(t) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).e^{int}.$$

La relation $f(s + t) = f(s).f(t)$ s'écrit, en passant aux séries de Fourier en t :

$$\sum_{n\in Z} c_n(f).e^{ins}.e^{int} = \sum_{n\in Z} c_n(f).f(s).e^{int}\ ,\ \text{ i.e. : } \forall s\ \ \forall n \in \mathbf{Z}\quad c_n(f).e^{ins} = c_n(f).f(s).$$

Comme f est non nulle, l'un des $c_n(f)$ est non nul. Et alors $\forall s\ \ c_n(f).e^{ins} = c_n(f).f(s)$. cqfd.

Remarque : on peut aussi utiliser la méthode de renforcement d'Euler.

Exercice 9 : Trouver les fonctions continues : $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ admettant pour périodes 1 et ω, où $\omega \notin \mathbf{Q}$.

Solution : La solution la plus classique consiste à noter que $G = \{ a + b\omega \,;\, (a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \}$ est un sous-groupe additif dense dans **R**. On en déduit aussitôt que f est constante.

Voici une solution par séries de Fourier, plus coûteuse, mais tout de même intéressante.

Soit $f(x) \sim \sum_{n=\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{2i\pi nx}$. Alors $f(x + \omega) \sim \sum_{n=\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{2i\pi n\omega}.e^{2i\pi nx}$.

Les deux fonctions sont égales, donc ont mêmes coefficients de Fourier.

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad (1 - \exp(2i\pi n\omega)).c_n(f) = 0 .$$

Comme ω est irrationnel, $\exp(2i\pi n\omega) \neq 1$ pour tout $n \neq 0$, donc $c_n(f) = 0$.

On en déduit que seul $c_0(f)$ est quelconque. Par Parseval, f est constante.

Exercice 10 : Soit E le **C**-espace vectoriel des fonctions C^∞ 1-périodiques.

Pour $f \in$ E et $x \in \mathbf{R}$, on pose $T(f)(x) = f(x + \sqrt{2}) - f(x)$.

Déterminer le noyau de T, puis l'image de T.

Solution : [Oral ENS 2009, RMS n° 71, juin 2010, p. 71]

T est un endomorphisme de E dont le noyau est formé des fonctions constantes (voir exercice précédent) et dont l'image est formé des fonctions C^∞ 1-périodiques de moyenne nulle.

Cf mes notes et la RMS juin 2010.

Exercice 11 : Trouver les fonctions f C^∞ 2π-périodiques telles que $(\forall x)\ \ f(2x) = 2.\sin(x).f'(x)$.

Solution : [Oral Mines 1994, RMS n° 179]

Ecrivons $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx}$, avec convergence normale ainsi que toutes les dérivées.

L'identité $f(2x) = 2.\sin(x).f'(x)$ s'écrit : $i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{i2nx} = (e^{ix} - e^{-ix}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).ine^{inx}$.

On peut identifier les coefficients puisque ce sont les coefficients de Fourier des deux membres.

Il vient : $(n - 1).c_{n-1}(f) - (n + 1).c_{n+1}(f) = c_{n/2}(f)$ si n est pair , 0 si n est impair.

En écrivant cette condition pour $n = 0, 1, -1, 2, -2$, etc. il vient :

$c_{-1}(f) + c_1(f) + c_0(f) = 0$, tous les autres coefficients étant nuls.

Ainsi, $f(x) = \sum_{n=-1}^{+1} c_n.e^{inx}$, avec $c_{-1} + c_1 + c_0 = 0$. Autrement dit $f(x) = a.(1 - \cos x) + b.\sin x$.

Exercice 12 : Trouver les fonctions f de classe C^1, 2π-périodiques, à valeurs réelles telles que :

$$(\forall x) \quad 2.f(x + 1) = f(x) + f(2x) .$$

Solution : [Oral Mines 1996, RMS n° 262]

Ecrivons $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{inx}$, avec convergence normale.

Donc $f(x + 1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{in}.e^{inx}$, $f(2x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).e^{i2nx}$.

En identifiant les développements en série de Fourier, il vient

$$2.c_n(f).e^{in} = c_n(f) \text{ si } n \text{ impair }, \quad 2\, c_n(f).e^{in} = c_n(f) + c_{n/2}(f) \text{ si } n \text{ pair.}$$

On en déduit, d'abord que $c_n(f) = 0$ si n est impair, puis que $c_n(f) = 0$ si n est pair > 0.
Ce dernier point se montre par récurrence sur $k = \mathrm{val}_2(n) \geq 1$.
En résumé, f est constante !

5. Convolution, fonctions propres.

Exercice 1 : **convolution.**
Si f et g sont réglées 2π-périodiques $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on appelle **convolée** de f et g la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} f(x - t).g(t).dt\,.$$

1) Montrer que la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f est la convolée de f avec le noyau de Dirichlet d'ordre n : $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \dfrac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$.

2) Soit $0 < h < \pi$, d_h la fonction 2π-périodique définie par $d_h(x) = \dfrac{\pi}{h}$ si $|x| < h$, 0 si $h < |x| \leq \pi$.

Montrer que, pour tout x : $\quad (f * d_h)(x) = \dfrac{1}{2h} \displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(u).du$.

3) Calculer $f *$, $*$, où est l'onde carrée. Propriétés ?

4) Calculer $c_n(f * g)$ à l'aide de $c_n(f)$ et $c_n(g)$, puis $a_n(f * g)$ et $b_n(f * g)$ à l'aide de $a_n(f)$, $b_n(f)$, $a_n(g)$ et $b_n(g)$.

Solution : 1) et 2) sont faciles.

3) $(f * \ )(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_{x-\pi}^{x} f(u).du - \int_{x}^{x+\pi} f(u).du \right)$ est continue, dérivable à droite et à gauche en tout point. De plus, si f est de classe C^k, $f *$ est C^{k+1}. Et $(f * \ )'(x) = \dfrac{1}{2\pi}[\, 2 f(x) - f(x + \pi)\,]$.

$*$ est continue, paire, 2π-périodique, égale à $\dfrac{2x-\pi}{\pi}$ sur $[0, 2\pi]$.

4) $(f * g)(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f).c_n(g).e^{inx}$

$$= \frac{1}{4} a_0(f).a_0(g) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f).a_n(g) - b_n(f).b_n(g)].\cos(nx) + [a_n(f).b_n(g) + b_n(f).a_n(g)].\sin(nx)$$

Exercice 2 : Soient f et g deux fonctions réglées 2π-périodiques $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, h leur convolée.
1) Montrer que h est continue dès que l'une des fonctions est continue.
2) Montrer que h est toujours continue, et est somme de sa série de Fourier.

Solution :
1) peut se démontrer, soit en utilisant le théorème de convergence dominée, soit élémentairement, en notant qu'une fonction continue périodique est uniformément continue.
2) Procéder par étapes, en supposant que f est sur $[0, 2\pi]$, fonction caractéristique de segment, puis fonction en escaliers, et enfin limite uniforme de telles fonctions.

Si $f(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).e^{inx}$ et $g(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(g).e^{inx}$, alors $(f * g)(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).c_n(g).e^{inx}$.

Or cette série est normalement convergente, car, les suites $(c_n(f))$ et $(c_n(g))$ étant de carré sommable, la suite $(c_n(f).c_n(g))$ est sommable.
La somme k de cette série est normalement convergente et a mêmes coefficients de Fourier que h. Comme h est continue, h = k par Parseval.

Ainsi donc les convolées ont des propriétés particulières.

Exercice 3 : On note $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k,\ -n \le k \le n)$.

1) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une algèbre pour la convolution, unifère d'unité D_n, noyau de Dirichlet, et *diagonale*, c'est-à-dire isomorphe à l'algèbre $\mathbf{C}^{2n+1}$.

2) Montrer qu'il existe un élément $\Delta_n \in \mathcal{P}_n$ tel que $(\forall P \in \mathcal{P}_n)\ \Delta_n * P = P'$. Exprimer Δ_n à l'aide de D_n. Application : Soit $f \in \mathcal{P}$; résoudre dans $\mathcal{P}$ l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = f$.

Solution :

1) Si $P(x) = \sum_{-n\le k\le n} a_k.e^{ikx}$ et $Q(x) = \sum_{-n\le k\le n} b_k.e^{ikx}$, alors $(P * Q)(x) = \sum_{-n\le k\le n} a_k b_k.e^{ikx}$.

L'application $\Phi : (a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^{2n+1} \to \sum_{-n\le k\le n} a_k.e^{ikx} \in \mathcal{P}_n$ est donc, non seulement un isomorphisme d'espace vectoriel, mais un isomorphisme d'algèbre. L'élément neutre de $\mathcal{P}_n$ est l'image par Φ de l'élément neutre $(1, \dots, 1)$ de $\mathbf{C}^{2n+1}$; c'est donc $D_n = \sum_{-n\le k\le n} e^{ikx}$ noyau de Dirichlet.

Les inversibles de cette algèbre sont les $\sum_{-n\le k\le n} a_k.e^{ikx}$, où $\forall k\ a_k \ne 0$.

2) Si $P(x) = \sum_{-n\le k\le n} a_k.e^{ikx}$, $P'(x) = \sum_{-n\le k\le n} ika_k.e^{ikx} = \Delta_n * P$, où $\Delta_n = \sum_{-n\le k\le n} ik.e^{ikx} = D_n'$.

L'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = f$ s'écrit $(\Delta_n * \Delta_n - \omega^2 D_n) * y = f$, pour n assez grand.

Or $\Delta_n * \Delta_n - \omega^2 D_n = -\sum_{-n\le k\le n} (k^2+\omega^2)e^{ikx}$ est un inversible de $\mathcal{P}_n$ …

Exercice 4 : 1) Montrer que $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ admet des diviseurs de zéro $f, g \ne 0$ tels que $f * g = 0$.

2) Résoudre $f * f = f$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

3) On note $f^{[k]} = f * \dots * f$ (k fois). Soit $P(X) = a_0 + a_1.X + \dots + a_n.X^n$ un polynôme complexe.

Résoudre l'équation $P(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k.f^{[k]} = 0$, où $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

Solution :

1) Il suffit de prendre deux polynômes trigonométriques à supports disjoints.

2) On a $\forall n \in \mathbf{Z}\ c_n(f)^2 = c_n(f)$, donc $c_n(f) \in \{0, 1\}$. Comme $(c_n(f))$ est de carré sommable, seul un nombre fini de $c_n(f)$ peuvent être égaux à 1.

Finalement, $f * f = f$ ssi f est de la forme $f(x) = \sum_{n\in A} e^{inx}$, où A est une partie finie de $\mathbf{Z}$.

3) Plus généralement, on a $\forall n \in \mathbf{Z}\ c_n(P(f)) = P(c_n(f)) = 0$.

- Si $a_0 \ne 0$, aucune racine de P n'est nulle, et $(c_n(f))$ ne peut être de carré sommable : pas de solution.
- Si $a_0 = 0$, soit $Z(P) = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines de P.

Comme $(c_n(f))$ est de carré sommable, seul un nombre fini de $c_n(f)$ peuvent être égaux aux α_k.

En résumé $P(f) = 0$ ssi $f(x) = \sum_{n\in A} \lambda_n.e^{inx}$, où A est une partie finie de $\mathbf{Z}$ et $\lambda_n \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$

Exercice 5 : On munit $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ de la norme $\| f \|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} | f(t) |.dt$.

1) Montrer que $\| f \|_1 \le \| f \|_2 \le \| f \|_\infty$; conséquences ?

2) Montrer que $\| f * g \|_\infty \le \| f \|_1.\| g \|_\infty \le \| f \|_\infty.\| g \|_\infty$; conséquences ?

3) Montrer que $\| f * g \|_1 \leq \| f \|_1.\| g \|_1$; conséquences ?
4) Montrer que $\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_2.\| g \|_2$; conséquences ?

Solution : 1) Par Cauchy-Schwarz $\| f \|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} | f(t) |.dt = (| f | \mid 1) \leq \| f \|_2 . \| 1 \|_2 = \| f \|_2$.

Et $\| f \|_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{(2\pi)} |f|^2} \leq \| f \|_\infty$. Du coup, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique la convergence en moyenne.
Les réciproques sont fausses.

2) Pour tout x, $|(f * g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} | f(x-t) |.|g(t)|.dt \leq \| g \|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} | f(x-t) | = \| f \|_1.\| g \|_\infty$.

On conclut aussitôt. Du coup, si (f_n) tend vers f en moyenne, et (g_n) tend uniformément vers g, alors la suite $(f_n * g_n)$ tend uniformément vers $f * g$.
3) Procéder par intégrales doubles… Du coup, si (f_n) tend vers f et si (g_n) tend vers g en moyenne, alors la suite $(f_n * g_n)$ tend en moyenne vers $f * g$.

4) Pour tout x, $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} f(x-t).g(t).dt = (f_x \mid g)$, où $f_x : t \to \overline{f(x-t)}$.

Par Cauchy-Schwarz, $|(f * g)(x)| \leq \| f_x \|_2.\| g \|_2 = \| f \|_2.\| g \|_2$.
On conclut aussitôt. Du coup, si (f_n) tend vers f et si (g_n) tend vers g en moyenne quadratique, alors la suite $(f_n * g_n)$ tend uniformément vers $f * g$.

Exercice 6 : Constantes de Lebesgue.

1) Pour tout $n \geq 1$, calculer $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$; on convient que $D_0(x) = 1$.

2) On note $L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|D_n(x)|.dx$.

a) Montrer que $L_n \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{x}.dx$. En déduire $L_n \to +\infty$.

b) De $L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{x}.dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(n+\frac{1}{2})x|.(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}).dx$, déduire : $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$.

3) Soient f réglée 2π-périodique $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ $S_n(f)(x) = O(\ln n)$.

Solution : 1) $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ si $t \neq 2k\pi$, $2n + 1$ si $t = 2k\pi$.

2) a) $L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(x)|.dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{\sin(x/2)}.dx \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{x}.dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin u|}{u}.du \to +\infty$

car on sait bien que $\frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable.

b) Tout d'abord, $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(n+\frac{1}{2})x|.(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}).dx = O(1)$,

car de la forme $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(n+\frac{1}{2})x|.h(x).dx$, où h est une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Reste à montrer que $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})x\right|}{x}.dx \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n$: découpe à la Chasles et encadrement.

3) Rappelons (ex. 1) que $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t).D_n(t).dt$.

Donc $|S_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|.dx = 2\,L_n\,\|f\|_\infty = O(\ln n)$, en vertu de la question 2.b).

<u>Remarque</u> : Arnaudiès-Fraysse (ex. 22, p. 144) affirment même que $S_n(f)(x) = o(\ln n)$.

<u>Exercice 7</u> : <u>opérateurs de translation</u>. [3]

Soit a réel. A toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ on associe $\tau_a f : x \to f(x-a)$.

1) Montrer que τ_a est un endomorphisme continu pour chacune des normes $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$, $\|f\|_2$. Quelles sont ses normes subordonnées ?

2) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ fixée. Montrer que $a \to \tau_a f$ est continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ pour chacune des trois normes.

3) Exprimer la série de Fourier de $\tau_a f$ à l'aide de celle de f.

4) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, H = Vect ($\tau_a f$; $a \in \mathbf{R}$).

Montrer que si l'un des coefficients de Fourier $c_n(f)$ est nul, H n'est pas dense dans $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_\infty)$.

Etudier les convergences simple et uniforme de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{-\frac{2k\pi}{n}} f\right)$.

Montrer que si $\forall n \in \mathbf{Z}$ $c_n(f) \neq 0$, H est dense dans $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\,.\,\|_\infty)$.

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 2000, RMS n° 356]

1) Il est clair que τ_a est un endomorphisme continu de norme triple 1 pour chacune des trois normes.

2) L'application $a \to \tau_a f$ est continue de $\mathbf{R}$ dans $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|\,.\,\|_\infty)$. Cela découle de l'uniforme continuité de f. Les deux autres continuités en découlent.

3) Si $f(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).e^{inx}$, $(\tau_a f)(x) = f(x-a) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).e^{-ina}.e^{inx}$.

4) a) Si $c_n(f) = 0$, alors $c_n(\tau_a f) = 0$ pour tout a, donc H est inclus dans l'hyperplan { g ; $c_n(g) = 0$ }, hyperplan qui est fermé. H ne saurait être dense.

b) $g_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{-\frac{2k\pi}{n}} f(x) = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n}) \to \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t).dt = c_0(f)$ par sommes de Riemann.

Donc la suite (g_n) converge simplement vers $c_0(f).e_0$.
L'uniforme continuité de f permet de montrer que la convergence est uniforme.

c) Supposons $\forall n \in \mathbf{Z}$ $c_n(f) \neq 0$. Alors $e_0 \in \overline{H}$.

Soit $p \in \mathbf{Z}$. Appliquant ce qui précède à $g = f.e_{-p}$, on a $c_0(g) = c_p(f)$ et

La suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{-\frac{2k\pi}{n}} g\right)$ converge uniformément vers $c_p(f).e_0$.

Du coup, e_p étant bornée, $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_p.\tau_{-\frac{2k\pi}{n}} g\right)$ converge uniformément vers $c_p(f).e_p$.

Or il est facile de voir que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_p.\tau_{-\frac{2k\pi}{n}} g$ est élément de H.

Par suite, tous les monômes e_p sont éléments de $\overline{H}$.

Leurs combinaisons linéaires également, et par Weierstrass trigonométrique, $\overline{H} = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

[3] *Jeune homme, ressentez-vous l'effet de cette translation ?*

Exercice 8 : Soit E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Si $f \in$ E, on pose Tf : $x \to \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{2} + \pi) \right)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Déterminer les coefficients de Fourier de Tf en fonction de ceux de f.
c) Déterminer le noyau de T.
d) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| = 1$. Déterminer les $f \in$ E tels que T $f = \lambda f$.
e) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda| \leq 1$. Déterminer les $f \in$ E tels que T $f = \lambda f$. L'espace propre associé à λ est-il de dimension finie ?

Solution : [Oral Centrale PC 2010, RMS n° 1007]

Exercice 9 : Soit $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{\gamma}{\pi} \notin \mathbf{Q}$. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$:

$$\mathrm{Lim}_{\,n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x).dx .$$

Solution : [Oral X 1989, RMS n° 101]
On pense à des sommes de Riemann, mais ce ne sont pas des sommes de Riemann. C'est plutôt un problème d'équirépartition, de nature probabiliste.
L'idée est simple : démontrer le résultat par étapes, d'abord pour $f(x) = e^{ipx}$ ($p \in \mathbf{Z}$), puis pour f polynôme trigonométrique, puis pour f continue par Weierstrass trigonométrique.

Exercice 10 : 1) Montrer que (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) est un système libre du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.
2) Soient f et $g \in$ C($\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$) de période 1, α et β deux réels tels que $(1, \alpha, \beta)$ est $\mathbf{Q}$-libre.
Montrer que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha)g(n\beta) = \int_0^1 f \int_0^1 g$.
2) Soient α et β réels tels que $(1, \alpha, \beta)$ est $\mathbf{Q}$-libre. Montrer que $\{ (n\alpha - [n\alpha], n\beta - [n\beta]), n \in \mathbf{N} \}$ est dense dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Solution : [Oral Mines MP 2010, RMS n° 509].
Même idée que dans l'exercice précédent. $f(x) = e^{2i\pi px}$ et $g(x) = e^{2i\pi qx}$.

Exercice 11 : Soient $E_0 = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, E_1 l'espace des $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ 2π-périodiques.
Si $f \in E_1$, soit $\Phi(f) : x \to \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}.dt$.

1) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$.

2) Si $f \in E_1$, exprimer les coefficients de Fourier $c_n(\Phi(f))$ en fonction de $c_n(f)$ et de $\alpha_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}.dt$.

3) Montrer que $\exists K > 0 \ \ \forall f \in E_1 \ \ \| \Phi(f) \|_2 \leq K \| f \|_2$. Que peut-on en déduire pour Φ ?
4) Φ est-elle injective ? surjective ?

Solution : [Oral Centrale PC 2010, RMS n° 1004]

0) Heuristiquement, après pliage : $\Phi(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(x+t)}{t}.dt$, de sorte que

$\Phi(f) = f * \phi$, où $\phi(t) = \frac{2\pi}{t}$ sur $]-\pi, \pi[- \{0\}$. Tout revient à calculer les coefficients de Fourier de ϕ.

Et l'on trouve, conformément aux propriétés générales des convolées :

$$\Phi(f)(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).c_n(\phi).e^{inx} = \sum_{n\in Z} c_n(f).(2i\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}.dt).e^{inx} = \sum_{n\in Z} c_n(f).(2i.Si(n\pi)).e^{inx}.$$

Cette approche fournit le résultat juste, mais <u>n'est pas satisfaisante</u>, car ϕ n'est pas réglée, ni même intégrable, sur tout segment. La convolée $f * \phi$ est définie parce que $f \in E_1$, ce qui reste à montrer.

1) <u>Un peu de rigueur, b…</u> !

Pour $t \in\ ]0, \pi]$, écrivons : $\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} f'(u).du = \int_{-1}^{+1} f'(x+st).ds$, de sorte que :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}.dt = \int_0^{\pi} (\int_{-1}^{+1} f'(x+st).ds).dt = \iint_{[0,\pi]\times[-1,1]} f'(x+st).ds.dt.$$

Le théorème de continuité des intégrales doubles à paramètres sur les pavés montre que $\Phi(f)$ est définie et continue. Elle est de plus 2π-périodique. Enfin, Φ est linéaire.

<u>Autre approche, plus terre à terre</u>.

Fixons x ; $\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t} = \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} + \dfrac{f(x)-f(x-t)}{t} \to 2 f'(x)$ quand $t \to 0+$.

De sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}.dt$ est faussement impropre en 0.

En vertu du théorème des accroissements finis, $\left|\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| \leq 2 \| f' \|_\infty$.

Le théorème de continuité des intégrales impropres à paramètres s'applique (nous sommes sur un intervalle borné), et montre que $\Phi(f)$ est continue.

2) <u>Série de Fourier de $\Phi(f)$</u>.

$$c_n(\Phi(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} e^{-inx}\Big(\iint_{[0,\pi]\times[-1,1]} f'(x+st).ds.dt\Big).dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iiint_{[-\pi,\pi]\times[0,\pi]\times[-1,1]} e^{-inx} f'(x+st).dx.ds.dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{[0,\pi]\times[-1,1]}\Big(\int_{(2\pi)} e^{-inx} f'(x+st).dx\Big).ds.dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{[0,\pi]\times[-1,1]} e^{inst}\Big(\int_{(2\pi)} e^{-in(x+st)} f'(x+st).dx\Big).ds.dt$$

Or le changement de variable $x + st = u$ donne :

$$\int_{(2\pi)} e^{-in(x+st)} f'(x+st).dx = \int_{(2\pi)} e^{-inu} f'(u).du = 2\pi\, c_n(f') = 2\pi\, in\, c_n(f).$$

Par conséquent, $c_n(\Phi(f)) = in\, c_n(f) \displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[-1,1]} e^{inst}\, ds.dt$. Si $n = 0$, $c_0(\Phi(f)) = 0$; sinon :

$$in\iint_{[0,\pi]\times[-1,1]} e^{inst}\, ds.dt = \int_0^{\pi}(\int_{-1}^{+1} ine^{inst}.ds).dt = \int_0^{\pi}(\int_{-1}^{+1} ine^{inst}.ds).dt = \int_0^{\pi}\frac{2i\sin(nt)}{t}.dt = 2i\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}.dt$$

$$\boxed{\text{Conclusion : }\quad \Phi(f)(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).(2i\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}.dt).e^{inx} = \sum_{n\in Z} c_n(f).(2i.Si(n\pi)).e^{inx}.}$$

3) <u>Montrons que</u> $\exists K > 0\ \ \forall f \in E_1\ \ \| \Phi(f) \|_2 \leq K \| f \|_2$.

Par Parseval : $\| \Phi(f) \|_2^{\,2} = 4 \displaystyle\sum_{n\in Z} |c_n(f)|^2.Si(n\pi)^2 \leq 4 M^2 \sum_{n\in Z} |c_n(f)|^2 = 4 M^2 \| f \|_2^{\,2}$.

Donc $\| \Phi(f) \|_2 \leq 2 M \| f \|_2$, où $M = \sup_n | Si(n\pi) |$.

Rappelons que la fonction $Si(x)$ a une limite en $+\infty$, qui vaut d'ailleurs $\pi/2$; elle est donc bornée. On en déduit que Φ est continue pour la convergence en moyenne quadratique.

4) <u>Φ n'est ni injective, ni surjective</u>.

Φ n'est pas injective, car $f = 1$ a pour image 0. Elle n'est pas surjective, car $\Phi(f)$ vérifie $c_0(\Phi(f)) = 0$. On pourrait chercher ses éléments propres…

Remarque finale : On a, pour tout x et tout t ∈]0, π] $\dfrac{f(x+t)-f(x-t)}{t} = \sum_{n\in Z} c_n(f).2i.\dfrac{\sin(nt)}{t}.e^{inx}$

avec convergence normale en x. Si l'on intègre terme à terme en t cette égalité, on retrouve formellement le résultat de 2), mais je ne vois pas comment rendre cette idée juste.

Exercice 12 : un opérateur intégral.

Soit f une fonction réglée 2π-périodique de **R** dans **C**.

On note $F(x) = \int_0^x f(t).dt - c_0(f).x = \int_0^x f(t).dt - \dfrac{a_0(f)}{2}x$.

1) Montrer que F est continue 2π-périodique et que P : $f \to$ F est linéaire.
2) Exprimer à l'aide de celle de f la série de Fourier exponentielle et trigonométrique de F.
3) On note T la fonction 2π-périodique définie par $T(t) = \dfrac{\pi-t}{2}$ sur]0, 2π[.

Développer T en série de Fourier. Comparer F à $f * T$.

4) A quelle condition $x \to \int_0^x f(t).dt$ est-elle 2π-périodique ? Conséquence et remarques ?

Solution :

1) La fonction $F(x) = \int_0^x f(t).dt - c_0(f).x = \int_0^x [f(t)-c_0(f)].dt$ est continue, dérivable à gauche et à droite en tout point, et 2π-périodique.

L'application P : $f \to$ F est linéaire et joue le rôle d'une primitivation.

2) Formellement, $F(x) \sim \sum_{k\neq 0} c_k(f).\dfrac{e^{ikx}-1}{ik} = -\sum_{k\neq 0}\dfrac{c_k(f)}{ik} + \sum_{k\neq 0}\dfrac{c_k(f)}{ik}e^{ikx}$.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}[-b_n(f).\frac{\cos(nx)}{n} + a_n(f).\frac{\sin(nx)}{n}]$$

Le calcul des $c_k(F)$ ($k \neq 0$) se fait par intégration par parties généralisée.

De même, on trouve : $c_0(F) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t).f(t).dt = -\sum_{k\neq 0}\dfrac{c_k(f)}{ik} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n(f)}{n}$.

3) Nous avons déjà développé T en série de Fourier : $T(x) \sim \sum_{k\neq 0}\dfrac{e^{ikx}}{2ik} = \sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(nx)}{n}$.

D'une part : $(f * T)(x) = \dfrac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t).f(x-t).dt = \dots = \dfrac{\pi-x}{2}.c_0(f) + \dfrac{1}{4\pi}\int_{x-2\pi}^x u.f(u).du$.

D'autre part : $(f * T)(x) \sim \sum_{k\neq 0}\dfrac{c_k(f)}{2ik}.e^{ikx} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[-b_n(f).\dfrac{\cos(nx)}{n} + a_n(f).\dfrac{\sin(nx)}{n}]$

C'est une fonction continue, et si f est C^k, elle est C^{k+1}, et $(f * T)'(x) = -\dfrac{1}{2}.c_0(f) + \dfrac{1}{2}.f(x)$.

De plus, par convergence normale :

$$(f * T)(x) = \sum_{k\neq 0}\frac{c_k(f)}{2ik}.e^{ikx} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[-b_n(f).\frac{\cos(nx)}{n} + a_n(f).\frac{\sin(nx)}{n}]$$

En conclusion : $F(x) = 2[(f * T)(x) - (f * T)(0)]$.

Ainsi l'on voit que l'opérateur P est un opérateur de convolution.

Exercice 13 : Soit $h > 0$. A toute $f \in E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ on associe la fonction $f_h(x) = \dfrac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t).dt$.

Montrer que T : $f \to f_h$ est un endomorphisme de E. Valeurs propres ?

Solution : [Oral Centrale 2006, RMS n° 741]
1) On a : $f_h(x) = \dfrac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t).dt = \dfrac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+t).dt$,
donc T(f) est élément de E (et même de classe C^1), et T est linéaire.
Remarque : T est un opérateur de lissage ou de régularisation.
Si f est réglée, T(f) est continue, si f est C^k, T(f) est C^{k+1}.

Au demeurant, si $0 < h < \pi$, T(f) = $f * d_h$, avec les notations de l'ex. 1.

2) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(T(f)) = \dfrac{\sin(nh)}{nh} c_n(f)$, avec la convention $c_0(T(f)) = c_0(f)$.

Donc $f(x) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).e^{inx}$ implique $T(f) \sim \sum_{n\in Z} c_n(f).\dfrac{\sin(nh)}{nh} e^{inx}$.
Comme T(f) est C^1, il y a convergence normale.

3) On en déduit aisément que les valeurs propres de T sont 1 et les $\dfrac{\sin(nh)}{nh}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 14 : Soit E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, muni de $\| f \| = \dfrac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} |f|$.

A toute $f \in$ E on associe $T(f) : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t}.f(x+t).dt$.
1) Montrer que T est un endomorphisme continu de E.
2) T est-il inversible ?
3) Valeurs propres et vecteurs propres de T ?

Solution : [Oral Mines 2006, RMS n° 497]
1) Pour tout réel x, la fonction continue $t \to f(x + t).\exp(-t)$ est intégrable, car f est bornée.
Notons F = T(f). F est 2π-périodique et continue par convergence dominée. Et T est linéaire.

Notons que $$F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}.f(u).du \qquad (1)$$

Cette formule montre que F est de classe C^1 et est solution de l'équation différentielle :
$$F'(x) - F(x) + f(x) = 0 \qquad (2).$$
F est l'unique solution périodique (et même bornée) de cette équation différentielle.

De plus $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-t}.f(x+t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-2n\pi-s}.f(x+s).ds = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-s}.f(x+s).ds$.

$$= \frac{2\pi}{1-e^{-2\pi}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} e^{v}.f(x-v).dv = \frac{2\pi}{1-e^{-2\pi}}\,(f * h)(x) \qquad (3),$$

où h est la fonction 2π-périodique définie par $h(x) = \exp(x)$ sur $]-2\pi, 0]$.

Ainsi T est un opérateur de convolution et $\| T(f) \|_1 \le \dfrac{2\pi}{1-e^{-2\pi}} \| f \|_1.\| h \|_1$.

2) T est injectif, mais n'est pas surjectif.
Il est injectif, car F = 0 implique $f = 0$ en vertu de (2). Il n'est pas surjectif, car F est de classe C^1 .
3) Les éléments propres de T peuvent être trouvés par deux moyens.
Soit (λ, f) un couple d'éléments propres.
Alors $\lambda \neq 0$, et $\lambda.(f'(x) - f(x)) + f(x) = 0$. D'où $f(x) = C.\exp(\dfrac{\lambda-1}{\lambda}x)$.

Mais f est 2π-périodique, et cela impose $\lambda = \dfrac{1}{1-in}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ainsi, les éléments propres sont les $(\lambda, f) = (\dfrac{1}{1-in}, C.e^{inx})$, $n \in \mathbf{Z}$.
Autre solution : comme T est un opérateur de convolution, développer h en série de Fourier, etc.

Exercice 15 : Soit E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Pour $f \in$ E, et tout $r \in\,]0, 1[$, on définit $\Phi(f)$ par :

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}.f(t).dt .$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de E. Valeurs et vecteurs propres ?

Solution : Notons $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2} = \displaystyle\sum_{n\in Z} r^{|n|}.e^{inx}$.

$\Phi : f \to P_r * f$ est linéaire, et continue car $\|\Phi(f)\|_\infty \le \|P_r\|_1 . \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$.
De surcroît, $\Phi(1) = 1$, donc $|||\,\Phi\,||| = 1$.

Valeurs et vecteurs propres.
Soit (λ, f) un couple d'éléments propres de Φ : $f \ne 0$ et $\Phi(f) = \lambda.f$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(\Phi(f)) = c_n(P_r * f) = c_n(P_r).c_n(f) = r^{|n|}.c_n(f) = \lambda.c_n(f)$.
Si $\lambda \notin \{ r^{|n|} ; n \in \mathbf{Z} \} = \{ r^n ; n \in \mathbf{N} \}$, tous les $c_n(f)$ sont nuls, donc f est nulle : impossible.
Donc $\lambda \in \{ r^n ; n \in \mathbf{N} \}$. Si $\lambda = 1$, on trouve $c_n(f) = 0$ pour $n \ne 0$, donc f est constante.
Si $\lambda = r^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $c_k(f) = 0$ pour $k \ne \pm n$, donc $f(x) = a.e^{inx} + b.e^{-inx} = c.\cos(nx) + d.\sin(nx)$.

Conclusion : Les valeurs propres de Φ sont les $\lambda = r^n$, $n \in \mathbf{N}$.
Si $\lambda = 1$, Ker($\Phi -$ I) est la droite formée des constantes.
Si $\lambda = r^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, Ker($\Phi - \lambda$.I) = Vect(e^{inx}, e^{-inx}) = Vect($\cos(nx)$, $\sin(nx)$).

Exercice 16 : Soit E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pour $f \in$ E, on définit $\Phi(f)$ par :

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \sin(x-t).f(t).dt .$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de E. Valeurs et vecteurs propres ?

Solution :
On peut donner une solution directe de cet exercice, car $\Phi(f)$ est combinaison linéaire de sin et cos, et Φ est un endomorphisme de rang 2 de E…
Mais on peut aussi passer par séries de Fourier.

$$\Phi(f)(x) = (\sin * f)(x) = \frac{1}{2i}(\,c_1(f).e^{ix} - c_{-1}(f).e^{-ix}\,).$$

Ker Φ est le sous-espace de codimension 2 de E défini par $c_1(f) = c_{-1}(f) = 0$.
Il y a deux valeurs propres non nulles : $\pm \frac{1}{2i}$. Les espaces propres associés sont des droites.

$$\Phi(f) = \pm\frac{1}{2i} \quad \Leftrightarrow \quad f = A\,e^{\pm ix} .$$

Exercice 17 : Soit E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Pour $f \in$ E, on définit $\Phi(f)$ par :

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \left|\sin\frac{x-t}{2}\right|.f(t).dt .$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de E. Valeurs et vecteurs propres ?

Solution : [Oraux Mines 2002 RMS n° 255, Mines 2005 RMS n° 495, Centrale 2009 RMS, n° 792]

1) On a $\Phi(f) = S * f$, où $S(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$. Développons S en série de Fourier.

Il vient $S(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{1-4n^2}$. Il y a convergence normale.

2) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(\Phi(f)) = c_n(S).c_n(f) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}c_n(f)$.

Soit alors (λ, f) un couple d'éléments propres de Φ : $\forall n \in \mathbf{Z}$ $\lambda.c_n(f) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}c_n(f)$.

Comme f est non nulle, l'un des $c_n(f)$ est non nul, donc $\lambda = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$.

Réciproquement, si $\lambda = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$, $c_k(f) = 0$ pour $k \neq \pm n$.

En vertu de la caractérisation des polynômes trigonométriques donnée au § 2:

Conclusion : $\text{Sp}\,\Phi = \left\{ \lambda_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} \;;\; n \in \mathbf{N} \right\}$.

$\text{Ker}(\Phi - \lambda_0.I) = \text{Vect}(1)$ et $\text{Ker}(\Phi - \lambda_n.I) = \text{Vect}(\cos(nx), \sin(nx))$.

Remarque : On peut résoudre cet exercice sans passer par les séries de Fourier, en calculant $\Phi(f)$ sur $[0, 2\pi]$ par découpe à la Chasles.

Exercice 18 : Soit λ réel, a complexe, $|a| < 1$. Trouver les fonctions f continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que $(\forall x)$ $f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \frac{f(x-t)}{1-ae^{it}}.dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$.

Solution : [Oral Mines 2004, Planche 134]

Exercice 19 : Soient $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $g \in E$ fixée. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) = f * g$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E, continu pour $\| f \|_\infty$ et $\| f \|_1$.
2) Cns pour que Φ soit injectif, surjectif ?
3) Valeurs et vecteurs propres ?

Solution : [Oral Centrale 2004, RMS n° 90]

1) est facile : voir exercices antérieurs.

2) Φ n'est jamais surjectif, car nous avons vu dans un exercice antérieur que $f * g$ est non seulement continue, mais somme d'une série trigonométrique normalement convergente. Or ce n'est pas toujours le cas d'un élément de E.

Je dis que Φ est injectif si et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(g) \neq 0$.

En effet, $\Phi(f) = 0 \iff \forall n \in \mathbf{Z}$ $c_n(g).c_n(f) = 0$

Notons alors $A = \{ n \in \mathbf{Z} \;;\; c_n(g) \neq 0 \}$; $\Phi(f) = 0 \iff \forall n \in A$ $c_n(f) = 0$

Du coup, Φ est injectif ssi $A = \mathbf{Z}$.

3) généralise des exercices antérieurs.

Exercice 20 : Soit E l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Si f et g sont éléments de E, on pose : $h(x) = \frac{a_0(f).a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f).a_n(g).\cos(nx)$.

1) Définition, continuité de h ? 2) h est-elle la somme de sa série de Fourier ?

3) Montrer que $\| h \|_\infty \leq 2 \| f \|_\infty \| g \|_\infty$.

4) Pour f fixée, soit $T : f \to h$. Soit λ une valeur prorpe non nulle de T. Montrer que l'ensemble des n tels que $a_n(f) = \lambda$, resp. $b_n(f) = \lambda$, est un ensemble fini. Qu'en déduire sur l'espace prorpe associé ?

Solution : [Oral Mines 1996, RMS n° 261, Oral Mines 1997, RMS n° 242.]

1) et 2) En vertu de Parseval, les suites ($a_n(f)$) et ($a_n(g)$) sont de carré sommable, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f).a_n(g)$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f).a_n(g).\cos(nx)$ converge normalement, et h est élément de E. De plus, la série trigonométrique définissant h est la série de Fourier de h.

3) Utiliser Cauchy-Schwarz et Parseval.

$$| h(x) | \leq \left| \frac{a_0(f).a_0(g)}{2} \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f).a_n(g)| \leq \ldots$$

<u>Remarque</u> : on peut démontrer que $h = 2\,(f * g)$. Pour cela, il suffit de montrer qu'elles ont mêmes coefficients de Fourier exponentiels, ce qui repose sur la parité des fonctions. Et cela fournit une autre preuve de 3).

4) Comme la suite ($a_n(f)$) tend vers 0, les ensembles cherchés sont finis,

<u>Exercice 21</u> : Soient E = $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ($a_n$) une suite sommable à termes > 0. Soit $f \in$ E.

On pose : $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = \frac{1}{a_n}\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t).dt$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction φ. Classe de φ ? Exprimer ses coefficients de Fourier à l'aide de ceux de f.

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 1995, RMS n° 368]

____