

# Exercices corrigés sur les séries de Fourier

## 1 Énoncés

**Exercice 1** Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \pi - |x|$  sur  $]-\pi, \pi]$ . La série converge-t-elle vers  $f$  ?

**Exercice 2** Calculer la série de Fourier, sous forme trigonométrique, de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2$  sur  $[0, 2\pi[$ . La série converge-t-elle vers  $f$  ?

**Exercice 3** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

- (1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ .
- (2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de  $f$ .
- (3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

**Exercice 4** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = e^x$  pour tout  $x \in ]-\pi, \pi]$ .

- (1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction  $f$ .
- (2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de  $f$ .
- (3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

**Exercice 5** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

- (1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ .
- (2) Étudier la convergence de la série de Fourier de  $f$ .
- (3) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

**Exercice 6** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique continûment différentiable, et soit  $\alpha$  un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Trouver une solution  $2\pi$ -périodique de cette équation en écrivant  $x(t)$  et  $f(t)$  sous la forme de séries de Fourier trigonométrique. Appliquer ce résultat au cas où  $\alpha = 1$  et

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

**Exercice 7 (Théorème de Féjer)** On note  $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $2\pi$ -périodiques. On définit le produit de convolution de deux fonctions  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  par

$$(f_1 \circledast f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y)f_2(y) dy.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx}.$$

(1) Montrer que

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ k & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(2) Montrer que  $\varphi_k$  satisfait les propriétés suivantes :

(a) pour tout  $k$ ,  $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = 1$ ;

(b) pour tout  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ ,  $(2\pi)^{-1} \int_{|x| \in [\varepsilon, \pi]} \varphi_k(x) dx \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

En déduire que, si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , alors  $f \circledast \varphi_k$  converge vers  $f$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

(3) Calculer  $f \circledast \varphi_k$ . Conclure.

## 2 Solutions

**Solution de l'exercice 1** Il est facile de voir que la fonction  $f$  est paire, de sorte que les coefficients  $b_n$  sont tous nuls, et que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = 2 \int_0^\pi \cos(nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) & \text{si } n \neq 0, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)t).$$

Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de Dirichlet montre que la série converge vers  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}$ .

**Solution de l'exercice 2** La fonction  $f$  n'est ni paire ni impaire. Calculons ses coefficients de Fourier trigonométriques. D'une part,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

et d'autre part, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ \left[ t \left( -\frac{\cos(nt)}{n^2} \right) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{2\pi}{n^2} + \left[ \frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -t^2 \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t \frac{\cos(nt)}{n} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{4\pi^2}{n} + \left[ 2t \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n^2} dt \right\} \\ &= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right).$$

La fonction  $f$  satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série  $SF(f)$  converge en tout  $t$  vers

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2\pi^2 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

### Solution de l'exercice 3

(1) La fonction  $f$  étant impaire,  $a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \geq 1$ ,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier trigonométrique de  $f$  est donc donnée par

$$SF(f)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)t).$$

(2) La fonction  $f$  satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série  $SF(f)$  converge en tout  $t$  vers

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = f(t).$$

La convergence ne peut être uniforme car la limite  $f$  n'est pas continue.

(3) Pour  $t = \pi/2$ , on a :

$$\sin((2k+1)t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque  $f$  est impaire, l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ensuite, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2}{3 \cdot 8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

### Solution de l'exercice 4

(1) On a :

$$\begin{aligned}
 c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1-in} \right) \\
 &= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}.
 \end{aligned}$$

(2) On vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites. Il s'ensuit que

$$SF(f)(t) = c_0(f) + \sum_{n \geq 1} (c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int})$$

converge vers  $f(t)$  si  $t \in ]-\pi, \pi[$  et vers  $(f(\pi+) + f(\pi-))/2 = \text{ch } \pi$  si  $t = \pi$ . Autrement dit,

$$\frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{int} = \begin{cases} e^t & \text{si } t \in ]-\pi, \pi[ \\ \text{ch } \pi & \text{si } t = \pi. \end{cases}$$

La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

(3) Pour  $t = 0$ , on obtient :

$$1 = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\text{sh } \pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\text{sh } \pi} + 1 \right).$$

Pour  $t = \pi$ , on obtient :

$$\text{ch } \pi = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\text{th } \pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\text{th } \pi} + 1 \right).$$

**Solution de l'exercice 5 :**

(1) On remarque que  $f$  est paire, de sorte que  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n$ . Par ailleurs,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dy = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny + n\pi) dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny) dy \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{4}{n^2} (-1)^n \pi \\ &= \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

où l'on a effectué deux intégrations par parties. La série de Fourier de  $f$  s'écrit donc

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

(2) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $SF(f)(x) = f(x)$ .

(3) D'après la question précédente,

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

**Solution de l'exercice 6 :** On écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

et, en dérivant terme à terme,

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt).$$

On a alors

$$x'(t) + \alpha x(t) = \frac{\alpha A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(nB_n + \alpha A_n) \cos nt + (\alpha B_n - nA_n) \sin nt].$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha A_0, \\ a_n = nB_n + \alpha A_n, \\ b_n = \alpha B_n - nA_n, \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{\alpha}, \\ A_n = \frac{\alpha a_n - nb_n}{n^2 + \alpha^2}, \\ B_n = \frac{na_n + \alpha b_n}{n^2 + \alpha^2}. \end{cases}$$

La fonction  $f$  proposée est continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Calculons ses coefficients de Fourier. On a :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[-\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction  $f - a_0(f)/2$  est impaire, de sorte que  $a_n(f) = 0$  pour  $n \geq 1$ . Enfin,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[-\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] \sin nt dt \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt + \frac{\pi}{2} \int_\pi^{2\pi} \sin nt dt \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi} I_1 + \frac{\pi}{2} I_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt dt \\ &= \left[-\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\cos nt}{n} dt \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} \int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos nt dt \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} \left(\left[\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n} dt\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n^2} \left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n^3} (1 - (-1)^n) \\ &= (1 - (-1)^n) \left[\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right] \end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi} \sin nt dt = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{n} (1 - (-1)^n).$$

Donc

$$b_n(f) = \frac{-4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}.$$

On obtient  $A_0 = \pi^2/2$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_{2k} = B_{2k} = 0$ ,

$$\begin{aligned} A_{2k-1} &= \frac{8}{\pi(2k-1)^2((2k-1)^2+1)} \\ \text{et } B_{2k-1} &= \frac{-8}{\pi(2k-1)^3((2k-1)^2+1)}. \end{aligned}$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction  $x(t)$  continûment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui est solution de l'équation différentielle donnée.

**Solution de l'exercice 7 :**

(1) Il est facile de voir que, pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et tout  $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{m=-l}^l e^{imx} = \sum_{m=0}^l e^{imx} + \sum_{m=0}^l e^{-imx} - 1 = \frac{\cos lx - \cos(l+1)x}{1 - \cos x},$$

de sorte que

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx} = \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x}.$$

La valeur de  $\varphi_k$  en tout  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$  s'obtient aisément par un argument de continuité, ou par un calcul direct.

(2) Comme  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx$  est nulle pour  $m \neq 0$  et vaut  $2\pi$  pour  $m = 0$ , nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = 1.$$

Fixons maintenant  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ , et posons  $K_\varepsilon := 2(1 - \cos \varepsilon)^{-1}$ . Il est clair que, pour tout  $x \in [-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \left| \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} \right| \leq \frac{K_\varepsilon}{k}.$$

Donc, pour  $k$  suffisamment grand,  $|\varphi_k(x)| \leq \varepsilon$ , de sorte que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{|x| \in [\varepsilon, \pi]} \varphi_k(x) dx \right| \leq \varepsilon,$$

et le point (b) s'ensuit. Puisque  $f$  est continue et  $2\pi$ -périodique, elle est uniformément continue. Etant donné  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $\eta \in ]0, \pi[$  tel que

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad |y' - y| < \eta \implies |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} & 2\pi |(f \otimes \varphi_k - f)(x)| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) \varphi_k(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$



où

$$I_1 := \int_{|y| < \eta} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) \, dy \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$I_2 := \int_{|y| \in [\eta, \pi]} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) \, dy \leq 2 \|f\|_\infty \cdot \int_{|y| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(y) \, dy.$$

La propriété (b) montre que

$$2 \|f\|_\infty \int_{|y| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(y) \, dy \leq \varepsilon/2$$

pour  $k$  suffisamment grand, et le résultat s'ensuit.

(3) Nous avons :

$$\begin{aligned} (f \circledast \varphi_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \varphi_k(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{imy} \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y') e^{-imy'} \, dy', \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable  $y' = x - y$ . En notant  $c_m(f)$  le coefficient de Fourier complexe de  $f$  d'ordre  $m$  et  $S_l(f)(x)$  la somme partielle d'ordre  $l$  de la série de Fourier de  $f$ , c'est à dire,

$$c_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-imy} \, dy \quad \text{et} \quad S_l(f)(x) := \sum_{m=-l}^l c_m(f) e^{imx},$$

nous voyons que

$$(f \circledast \varphi_k)(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l c_m(f) e^{imx} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} S_l(f)(x).$$

Nous avons donc montré le théorème de Féjér : si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , la série de Fourier de  $f$  converge uniformément vers  $f$  au sens de Césaro.