Corrigé de l'exercice 8 sur les séries de Fourier

Exercice 8 (Le phénoméne de Gibbs)
Soit f 2π-périodique impaire, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0, \pi[\\ 0 & si\ x = k\pi \end{cases}$$

1. Expliciter la série de Fourier de f. Prouver qu'elle converge simplement vers f.
2. Soit S_n la $(2n-1)^{eme}$ somme partielle de la série de Fourier de f,

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

   Démontrer que S_n est dérivable, avec, pour tout x

$$S_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\sin 2nx}{\sin x} & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \\ (-1)^q \dfrac{4n}{\pi} & \text{pour } x = q\pi. \end{cases}$$

   En déduire que S_n présente $(2n-1)$ extrema locaux sur l'intervalle $[0, \pi]$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, qu'on notera a_n et qu'il est atteint en $x = \dfrac{\pi}{2n}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi[$ $S_n(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ (en convenant que, pour $t = 0$ la valeur de $\sin(2nt)/\sin t$ est $2n$). En déduire que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(2n) \sin \frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t$$

   (en convenant que, pour $t = 0$ la valeur de $\sin(t)/(2n \sin(\frac{t}{2n}))$ est 1).
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
5. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 1.85193\ldots$$

   et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.1789\ldots$

Solution

1. La fonction f est impaire. Sa restriction à chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ se prolonge en la fonction constante $t \mapsto (-1)^k$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Explicitons les coefficients a_n et b_n de sa série Fourier trigonométrique. Puisque f est impaire les a_n sont tous nuls. Calculons b_n pour $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}[(-1)^n - 1].$$

   Il en résulte $b_{2n} = 0$ et $b_{2n-1} = 4/(\pi/(2n-1))$. La série de Fourier de f est donc

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

   Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$, par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est simplement convergente, et sa somme S satisfait

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{Z}\pi \end{cases}$$

   Puisque $f(k\pi) = 0$, dans tous les cas $S(x) = f(x)$, autrement dit f coïncide avec la somme de sa série de Fourier.

2. $S_n(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ donne $S_n'(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$. Explicitons cette somme.

   (a) Pour $x = q\pi$, les entiers $(2k-1)q$ sont tous de la parité de q, et donc $\cos((2k-1)q\pi) = (-1)^q$. Il en résulte $S_n'(q\pi) = (-1)^q 4n/\pi$, et en particulier, lorsque $q = 0$, $S_n'(0) = 4n/\pi$.

   (b) Pour $x \neq k\pi$, en notant $z = e^{ix}$, (qui est différent de ± 1) on a

$$\begin{aligned} S_n'(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re} z(1 + z^2 + \cdots + z^{2n-2}) \\ &= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left[z\left(\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}\right)\right] = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{2inx}-1}{e^{ix}-e^{-ix}}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}. \end{aligned}$$

   Puisque $S(0) = -S(\pi) = 4n/\pi \neq 0$, les 0 de S_n' appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ sont les $k\pi/(2n)$ avec $k = 1, 2, \ldots (2n-1)$. Le premier extremum de S_n est atteint en $\pi/(2n)$, c'est un maximum car $\sin(2nx)$ est positif sur $[0, \pi/(2n)]$ et change de signe au passage en $\pi/(2n)$.

3. Puisque $S_n(0)$ est nul, et S_n de classe $\mathcal{C}^1$, on a pour tout x
$$S(x) = S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S_n'(u)\,\mathrm{d}u.$$
En particulier $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} S_n'(u)\,\mathrm{d}u$ et, en écrivant $u = t/(2n)$,
$$a_n = \int_0^\pi \frac{1}{2n} S_n'\left(\frac{t}{2n}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t,$$
car, par la question 2 on a $\dfrac{1}{2n}S_n'\left(\dfrac{t}{2n}\right) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}$ pour tout $t \in [0,\pi]$ en convenant que pour $t = 0$ on a $\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}} = 1$.

4. Démontrons que $\left(\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\right)_n$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \in [0,\pi]$.

   Pour $0 < t \le \pi$ on écrit
$$\left|\frac{\sin t}{2n\sin\dfrac{t}{2n}} - \frac{\sin t}{t}\right| = \left|\frac{\sin t}{t}\right|\left|\frac{\dfrac{t}{2n} - \sin\dfrac{t}{2n}}{\sin\dfrac{t}{2n}}\right| \le \left|\frac{\dfrac{t}{2n} - \sin\dfrac{t}{2n}}{\sin\dfrac{t}{2n}}\right|\cdot \qquad (1)$$
   La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction sin sur l'intervalle $[0,x]$ donne $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{6}\cos(\theta x)$ avec $0 < \theta < 1$. Il en résulte
$$\forall t \in [0,\pi], \qquad \left|\frac{t}{2n} - \sin\frac{t}{2n}\right| \le \left|\frac{t^3}{48n^3}\right|. \qquad (2)$$
   Sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ la fonction sinus est concave. Le graphe de sa restriction à $[0,\pi/2]$ est donc « au dessus » du graphe de la droite d'équation $y = 2x/\pi$ reliant les points $(0,0$ et $(\pi/2, \sin\pi/2)$. C'est à dire que l'on a
$$\forall t \in [0,\pi/2], \qquad \sin t \ge \frac{2t}{\pi}$$
   et donc
$$\forall n \ge 1,\ \forall t \in [0,\pi], \qquad \sin\frac{t}{2n} \ge \frac{t}{\pi n}\cdot$$
   Avec (1) et (2) on en déduit pour $n \ge 1$ et $t \in]0,\pi]$,
$$\left|\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}} - \frac{\sin t}{t}\right| \le \frac{t^3/(48n^3)}{t/(n\pi)} = \frac{\pi t^2}{48n^2} \le \frac{\pi^3}{48n},$$

et cette majoration est encore vérifiée lorsque $t = 0$ car dans ce cas le terme gauche est $1 - 1 = 0$. Ceci prouve la convergence uniforme de $\dfrac{\sin t}{2n \sin \frac{t}{2n}}$ vers $\dfrac{\sin t}{t}$ sur $[0, \pi]$. On peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin t}{2n \sin \frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin t}{2n \sin \frac{t}{2n}} \right) \mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. On part de

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui donne immédiatement, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

La somme de cette série entière de rayon de convergence infini, est donc le prolongement par continuité en 0 de $\sin t/t$. La convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$, en particulier sur l'intervalle $[0, \pi]$, et on peut écrire

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}. \qquad (3)$$

Notons $u_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)^2}\pi^2 \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2} \leq \frac{\pi^2}{25} \leq 1.$$

Pour $n = 0$ on vérifie immédiatement que $u_1/u_0 = \pi^2/18 \leq 1$. La suite (u_n) est donc décroissante et le théorème des séries alternées s'applique à la série (3). Les sommes partielles successives sont alternativement des valeurs approchées par excès et par défaut de la somme de cette série. Le calcul des premières sommes partielles donne

$$\sum_{n=0}^{5} (-1)^n u_n = 1.851902\ldots \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{6} (-1)^n u_n = 1.851938\ldots$$

puis l'encadrement $1.85190 < \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t < 1.85194$. Avec la question 4 on en déduit

$$1.1789 < \frac{2}{\pi} 1.85190 < \lim a_n < \frac{2}{\pi} 1.85194 < 1.1790,$$

et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1.1789\ldots$.