FD - EXERCICES SUR LES SERIES DE FOURIER

Dans les exercices suivants les fonctions considérées se trouvent dans l'espace vectoriel E des fonctions $2\pi-$périodiques pour lesquelles il existe une subdivision de l'intervalle $[\,0,\,2\pi\,]$

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 2\pi$$

telle que f soit continue sur chaque intervalle $]\,a_i,\,a_{i+1}\,[$ et admette une limite à gauche et à droite finie en tout point a_i. Nous dirons qu'une telle fonction est continue par morceaux.

Un élément de E sera défini par sa valeur sur un intervalle de longueur 2π (sauf éventuelement en un nombre fini de points).

CALCULS DE COEFFICIENTS DE FOURIER

La série de Fourier d'un élément f de E sera notée $[f]$.

Lorsque f est à valeurs réelles, les coefficients réels (ou trigonométriques) sont définis par les formules

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,,$$

et dans ce cas

$$[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))\,.$$

Lorsque f est à valeurs complexes, les coefficients complexes (ou exponentiels) sont définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,,$$

et dans ce cas

$$[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}\,.$$

Alors, lorsque f est à valeurs réelles, si $n \geq 0$,

$$a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}\,c_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = -2\,\mathrm{Im}\,c_n(f)\,,$$

et inversement,

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\,(a_n(f) - ib_n(f)) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\,(a_n(f) + ib_n(f))\,.$$

FD 2

(On remarquera que les intégrales peuvent être prises sur n'importe quel intervalle de longueur 2π).

On cherche les coefficients de Fourier de la fonction et on en déduit la somme de certaines séries,
– par la convergence ponctuelle, en un point où la fonction f est continue et admet des dérivées à gauche et à droite,
– ou par la formule de Bessel-Parceval.

$$\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx\,,$$

ou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx\,.$$

Exercice 1 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos^3 x\,.$$

Il suffit d'écrire

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

pour obtenir

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\,.$$

On a donc

$$a_1(f) = \frac{3}{4} \quad , \quad a_3(f) = \frac{1}{4}\,,$$

et tous les autres coefficients de Fourier sont nuls.

Exercice 2 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f qui vaut 1 sur $]\,0, \pi\,[$ et -1 sur $]\,-\pi, 0\,[$.

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

La fonction f est impaire donc $a_n(f)$ est nul. On a

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n}\,.$$

Donc $b_{2k}(f)$ est nul, et

$$b_{2k+1}(f) = \frac{4}{(2k+1)\pi}\,,$$

d'où la série de Fourier

$$[f] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\,.$$

Alors, en $\pi/2$, où f est dérivable, on a

$$f(\pi/2) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Avec la formule de Bessel-Parceval

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx = 2\,,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Exercice 3 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f telle que, sur $[-\pi,\,\pi\,]$,

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

La fonction f est impaire donc $a_n(f)$ est nul. On a, en intégrant plusieurs fois par parties,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 x - x^3)\,\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}(\pi^2 x - x^3) + \frac{\sin(nx)}{n^2}(\pi^2 - 3x^2) - \frac{\cos(nx)}{n^3}\,6x + \frac{\sin(nx)}{n^4}\,6\right]_0^{\pi} \\
&= 12\,\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\,.
\end{aligned}$$

FD 4

d'où la série de Fourier

$$[f] = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n^3}\,,$$

qui converge pour tout x réel. En particulier,

$$f(\pi/2) = \frac{3\pi^3}{8} = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi/2)}{n^3}\,.$$

Les termes de la somme sont nuls lorsque n est pair. Il reste

$$\frac{3\pi^3}{8} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\,.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

Avec la formule de Bessel-Parceval

$$\begin{aligned}
144\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^4x^2 - 2\pi^2x^4 + x^6)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi^4\frac{x^3}{3} - 2\pi^2\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi^6\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{16\pi^6}{105}\,.
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}\,.$$

Exercice 4 Soit a un nombre tel que $0 < a < \pi$. On définit deux éléments f_a et g_a de E par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [\,0,\,\pi - a\,] \\ 1 & \text{sur} \quad]\,\pi - a,\,\pi + a\,[\\ 0 & \text{sur} \quad [\,\pi + a,\,2\pi\,] \end{cases} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [\,-\pi,\,-a\,[\\ 1 & \text{sur} \quad [\,-a,\,a\,] \\ 0 & \text{sur} \quad]\,a,\,\pi\,] \end{cases} .$$

Vérifier que

$$g_a = 1 - f_{\pi - a}\,,$$

et calculer les coefficients de Fourier réels de ces fonctions.

En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(na)}{n} .$$

On a

$$f_{\pi-a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [\,0,\,a\,] \\ 1 & \text{sur} \quad]\,a,\,2\pi - a\,[\\ 0 & \text{sur} \quad [\,2\pi - a,\,2\pi\,] \end{cases} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad [\,0,\,a\,] \\ 0 & \text{sur} \quad]\,a,\,2\pi - a\,[\\ 1 & \text{sur} \quad [\,2\pi - a,\,2\pi\,] \end{cases} .$$

On a donc bien

$$f_{\pi-a} + g_a = 1\,.$$

Les fonctions f_a et g_a sont paires donc $b_n(f_a)$ et $b_n(g_a)$ sont nuls, et l'on a,

$$a_0(f_a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi-a}^{\pi} dx = \frac{2a}{\pi}\,,$$

et, si $n > 0$,

$$a_n(f_a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\;dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi-a}^{\pi} \cos(nx)\;dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin n(\pi - a)}{n} = 2(-1)^n \frac{\sin(na)}{n\pi}\,,$$

d'où les séries de Fourier

$$[f_a] = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(na)}{n}\;\cos(nx)\,,$$

et

$$[g_a] = 1 - [f_{\pi-a}] = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}\;\cos(nx)\,.$$

Avec la formule de Bessel-Parceval

$$\frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_a(x)^2 dx = \frac{2a}{\pi}\,,$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}\,.$$
En particulier, lorsque $a = \pi/2$, les termes de la somme sont nuls lorsque n est pair. On en déduit
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$
Par ailleurs, en 0, où g_a est dérivable, on a
$$g_a(0) = 1 = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}\,,$$
d'où
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}\,,$$
et en π, où g_a est également dérivable, on a
$$g_a(\pi) = 0 = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(na)}{n}\,,$$
d'où
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(na)}{n} = -\frac{a}{2}\,.$$

Exercice 5 Soit a un nombre tel que $0 < a \leq \pi/2$. Trouver les coefficients de Fourier réels de la fonction $2\pi-$périodique et impaire f_a telle que
$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad]\,0,\, 2a\,[\\ 0 & \text{sur} \quad [\,2a,\, \pi\,] \end{cases}\,.$$
En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}$.

La fonction f_a est impaire donc $a_n(f_a)$ est nul. On a,
$$b_n(f_a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2a} \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\, \frac{1 - \cos(2na)}{n} = \frac{4}{\pi}\, \frac{\sin^2(na)}{n}\,,$$
d'où
$$[f_a] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n}\ \sin(nx)\,.$$

La série converge en a, donc

$$f_a(a) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(na)}{n}\,,$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(na)}{n} = \frac{\pi}{4}\,.$$

En utilisant l'égalité de Bessel-Parceval

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(na)}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2a} 1\,dx = \frac{2a}{\pi}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(na)}{n^2} = \frac{a\pi}{8}\,.$$

Exercice 6 Trouver les coefficients de Fourier réels des fonctions $2\pi-$périodiques définies par

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{et} \quad g(x) = \sup(\sin x, 0)\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\,.$

La fonction f est paire, donc $b_n(f) = 0$. On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi} \quad \text{et} \quad a_1(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\;dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\;dx = 0\,,$$

et, si $n > 1$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)\;dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\;dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Le coefficient est nul si n est impair. Alors

$$a_{2k}(f) = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{4k^2-1}\,,$$

d'où

$$[f] = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\,\cos(2kx)\,.$$

La série converge pour tout x. En particulier

$$f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

On a aussi

$$f(\pi/2) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\,(-1)^k\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,.$$

Et enfin, par l'égalité de Bessel-Parceval,

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = 1\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

Comme

$$g(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + \sin x)\,,$$

on obtient aussi

$$[g] = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\,\cos(2kx)\,.$$

Exercice 7 Trouver les coefficients de Fourier réels de la fonction $2\pi-$périodique

$$f(x) = |\sin^3 x|\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}$.

La fonction f est paire, donc $b_n(f)$ est nul. En partant de la relation

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

On obtient

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^3 x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (3\sin x - \sin(3x))\cos(nx)\,dx\,,$$

En transformant les produits en sommes,

$$a_n(f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi [3(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) - (\sin(n+3)x - \sin(n-3)x)]\,dx\,.$$

On constate que $a_1(f)$ et $a_3(f)$ sont nuls. Si n est différent de 1 et 3, on obtient

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{4\pi}\left(-3\left(\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right) + \left(\frac{\cos(n+3)\pi - 1}{n+3} - \frac{\cos(n-3)\pi - 1}{n-3}\right)\right) \\ &= \frac{12}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{n+1}}{(n^2-1)(n^2-9)}\,, \end{aligned}$$

donc $a_n(f) = 0$ si n est impair, et

$$a_{2k}(f) = \frac{24}{\pi}\,\frac{1}{(4k^2-1)(4k^2-9)}\,,$$

d'où la série de Fourier

$$[f] = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)(4k^2-9)}\cos(2kx)\,.$$

Cette série converge pour tout x et en particulier

$$f(0) = 0 = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)(4k^2-9)}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)} = -\frac{1}{18}\,.$$

En utilisant l'égalité de Bessel-Parceval, on trouve

$$\frac{32}{9\pi^2} + \frac{24^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2(4k^2-9)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^6 x\,dx\,.$$

En utilisant les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ qui vérifient la relation de récurrence

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}\,,$$

on trouve,

$$\int_0^\pi \sin^6 x\,dx = 2I_6 = 2\times\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2} = \frac{5\pi^2}{4608} - \frac{1}{162}\,.$$

Exercice 8 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f de E telle que, sur $]-\pi,\,\pi[$,

$$f(x) = x\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad,\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$

La fonction f est impaire donc $a_n(f)$ est nul. On a, si $n>0$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi \\ &= 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \end{aligned}$$

d'où la série de Fourier

$$[f] = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}\,,$$

qui converge en particulier pour $x=\pi/2$. On a

$$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\pi/2)}{n}\,.$$

Dans cette somme les termes de rang pair sont nuls d'où

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

En utilisant l'égalité de Bessel-Parceval, on obtient

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\,\pi^2\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Exercice 9 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f de E telle que, sur $[\,-\pi,\,\pi\,]$,

$$f(x)=|x|\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\quad,\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$

La fonction f est paire donc $b_n(f)$ est nul. On a,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi\,,$$

et, si $n>0$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}a_n(f)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\cos(nx)\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}\,.\end{aligned}$$

Les termes de rang pair sont nuls, d'où la série de Fourier

$$[f]=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\,,$$

qui converge en particulier pour $x=0$. On a

$$f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

En utilisant l'égalité de Bessel-Parceval, on obtient

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\, \pi^2\,,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Exercice 10 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f de E telle que, sur $[\,-\pi,\,\pi\,]$,

$$f(x) = x^2\,.$$

En déduire les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

La fonction f est paire donc $b_n(f)$ est nul. On a,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}\,,$$

et, si $n > 0$, en intégrant plusieurs fois par parties,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + 2x\, \frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\, \frac{\sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi} \\ &= 4\, \frac{(-1)^n}{n^2}\,. \end{aligned}$$

d'où la série de Fourier

$$[f] = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}\,,$$

qui converge pour tout x réel. En particulier,

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,.$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,,$$

ainsi que,

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Avec la formule de Bessel-Parceval,

$$\frac{2}{9}\,\pi^4 + 16\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\,\pi^4 .$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

Exercice 11 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f de E impaire telle que, sur $]\,0,\,\pi\,[$,

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 .$$

En déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

La fonction f est impaire donc $a_n(f)$ est nul. On a, si $n > 0$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos(nx)}{n} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\frac{2\sin(nx)}{n^2} + \frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\,(1 - (-1)^n)\left(\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right) . \end{aligned}$$

Les termes de rang pair sont nuls, d'où la série de Fourier

$$[f] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{4(2k+1)} - \frac{2}{(2k+1)^3}\right)\sin(2k+1)x ,$$

qui converge en particulier pour $x=\pi/2$. On a

$$f(\pi/2)=0=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi^2}{4(2k+1)}-\frac{2}{(2k+1)^3}\right),$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3},$$

ce qui donne la relation voulue. En utilisant le fait que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4},$$

on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Exercice 12 Soit P un polynôme pair de degré 4 vérifiant les conditions

$$P'(\pi)=0\ ,\ P'''(\pi)=1\ ,\ \int_0^{\pi}P(x)\,dx=0\,.$$

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f de E qui coïncide avec P sur l'intervalle $[-\pi,\,\pi]$.

En déduire les sommes suivantes : $\quad S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\quad,\quad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\quad,\quad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}\,.$

Puisque f est paire, on a $b_n(f)=0$ et

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}P(x)\cos(nx)\,dx\,.$$

D'autre part, la troisième condition implique que $a_0(f)$ est nul. En intégrant par parties plusieurs fois de suite, on obtient, si $n\geq 1$,

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\left[P(x)\frac{\sin(nx)}{n}+P'(x)\frac{\cos(nx)}{n^2}-P''(x)\frac{\sin(nx)}{n^3}-P'''(x)\frac{\cos(nx)}{n^4}+P^{(4)}(x)\frac{\sin(nx)}{n^5}\right]_0^{\pi}.$$

Comme P est paire, les nombres $P'(0)$ et $P'''(0)$ sont nuls. Compte tenu des conditions posées sur P, il reste alors dans la somme précédente

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\,.$$

Comme f est continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point, elle est somme en tout point de sa série de Fourier, et donc, si x appartient à $[-\pi, \pi]$, on a

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx)\,.$$

En particulier, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = -\frac{\pi}{2}\,P(\pi) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{\pi}{2}\,P(0)\,.$$

Il reste à déterminer le polynôme P.

Puisque $P'(\pi)$, $P'(-\pi)$, $P'(0)$ sont nuls et que P' est de degré 3, on a nécessairement

$$P'(x) = \lambda x(x^2 - \pi^2)\,.$$

Alors

$$P''(x) = 3\lambda x^2 - \lambda\pi^2 \quad \text{et} \quad P'''(x) = 6\lambda x\,.$$

Comme $P'''(\pi)$ vaut 1, on en déduit que

$$\lambda = \frac{1}{6\pi}\,,$$

et donc

$$P(x) = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^2 x^2}{2}\right) + C\,.$$

On a alors

$$\int_0^{\pi} P(x)\,dx = \left[\frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\pi^2 x^3}{6}\right) + Cx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\left(-\frac{7\pi^5}{60}\right) + \pi C\,.$$

La nullité de cette intégrale signifie donc que

$$C = \frac{7\pi^3}{360}\,,$$

et donc que

$$P(x) = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^2 x^2}{2} + \frac{7\pi^4}{60}\right)\,.$$

On trouve donc

$$P(\pi) = -\frac{\pi^3}{45} \quad \text{et} \quad P(0) = \frac{7\pi^3}{360}\,,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}\,.$$

Pour calculer S_3 on utilise l'égalité de Bessel-Parceval, qui donne ici

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}P(x)^2dx\,.$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{36\pi^2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{\pi^2x^2}{2}+\frac{7\pi^4}{60}\right)^2dx\\
&= \frac{1}{72\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^8}{16}-\frac{\pi^2x^6}{4}+\frac{37\pi^4x^4}{120}-\frac{7\pi^6x^2}{60}+\frac{49\pi^8}{3600}\right)dx\\
&= \frac{\pi^8}{72}\left(\frac{1}{144}-\frac{1}{28}+\frac{37}{600}-\frac{7}{180}+\frac{49}{3600}\right)\\
&= \frac{\pi^8}{9450}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $\{a\in\mathbb{R}\mid |a|\neq 1\}\times\mathbb{R}$ par

$$f(a,x)=\ln(1-2a\cos x+a^2)\,.$$

Pour x fixé, trouver le développement en série entière de la dérivée partielle de f par rapport à a. En déduire la série de Fourier de la fonction qui à x associe $f(a,x)$ pour a fixé distinct de 1 et -1.

Si l'on dérive par rapport à a, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)=\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\,,$$

et en décomposant en éléments simples

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)=-\left(\frac{e^{ix}}{1-ae^{ix}}+\frac{e^{-ix}}{1-ae^{-ix}}\right)\,,$$

donc, si $|a|<1$,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)=-\left(e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}a^ne^{inx}+e^{-ix}\sum_{n=0}^{\infty}a^ne^{-inx}\right)=-2\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(n+1)x=-2\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\cos(nx)\,.$$

La série précédente étant de rayon de convergence au moins 1, on obtient en intégrant par rapport à a, puisque $f(0,x)$ est nul,

$$f(a,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos(nx)\,.$$

Mais
$$\left|\frac{a^n}{n}\cos(nx)\right| \leq \frac{|a|^n}{n},$$
et la convergence de cette série est normale si $|a| < 1$. On obtient dans ce cas la série de Fourier de la fonction qui à x associe $f(a,x)$ pour a fixé.

Si maintenant $|a| > 1$, on écrit
$$f(a,x) = 2\ln|a| + f(1/a,x) = 2\ln|a| - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{-n}}{n}\cos(nx).$$

Exercice 14 Soit a un nombre réel non nul. Calculer les coefficients de Fourier réels des fonctions de E définies ci-dessous.
$$f_a(x) = e^{ax} \text{ sur } [\,0,\,2\pi\,[\,,$$
$$g_a(x) = e^{ax} \text{ sur } [\,0,\,\pi\,[\text{ et paire},$$
$$h_a(x) = e^{ax} \text{ sur }]\,0,\,\pi\,[\text{ et impaire}.$$

Il est plus facile de calculer les intégrales en passant par les nombres complexes.
$$\int_0^{2\pi} e^{ax}(\cos(nx) + i\sin(nx))\,dx = \int_0^{2\pi} e^{ax}e^{inx}dx = \left[\frac{e^{(a+in)x}}{a+in}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2a\pi}-1}{a+in} = \frac{e^{2a\pi}-1}{a^2+n^2}(a-in).$$
Alors
$$a_n(f_a) = \frac{a}{\pi}\frac{e^{2a\pi}-1}{a^2+n^2} \quad \text{et} \quad b_n(f_a) = -\frac{n}{\pi}\frac{e^{2a\pi}-1}{a^2+n^2},$$
et
$$[f_a] = \frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos(nx) - n\sin(nx)}{a^2+n^2}\right).$$
De même,
$$\int_0^{\pi} e^{ax}(\cos(nx) + i\sin(nx))\,dx = \int_0^{\pi} e^{ax}e^{inx}dx = \left[\frac{e^{(a+in)x}}{a+in}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a+in} = \frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}(a-in).$$
Comme la fonction g_a est paire, on a $b_n(g_a) = 0$, et
$$a_n(g_a) = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2},$$

et

$$[g_a] = \frac{2a}{\pi}\left(\frac{e^{a\pi}-1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos(nx)\right).$$

Comme la fonction h_a est impaire, on a $a_n(h_a) = 0$, et

$$b_n(h_a) = -\frac{2n}{\pi}\,\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2},$$

et

$$[h_a] = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n((-1)^n e^{a\pi}-1)}{a^2+n^2}\sin(nx).$$

Exercice 15 Soit a un nombre réel. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction définie sur $[-\pi,\pi[$ par

$$f_a(x) = e^{iax}.$$

En déduire, si a n'est pas entier, les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-a)^2}+\frac{1}{(n-a)^2}\right).$$

Si a est entier la série de Fourier se limite à

$$[f_a] = e^{iax}.$$

Supposons donc que a n'est pas entier. On a

$$c_n(f_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)x}dx.$$

$$c_n(f_a) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(-1)^n\,\frac{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}{i(a-n)} = \frac{1}{\pi}(-1)^n\,\frac{\sin(a\pi)}{a-n},$$

et

$$[f_a] = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}e^{inx}.$$

Si $x=0$, la série de Fourier converge et

$$\begin{aligned}
f_a(0) = 1 &= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}\\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}\right)\\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}\right),$$

et finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)} + \frac{1}{a}\right),$$

D'autre part, d'après la formule de Bessel-Parceval,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2(a-n)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1\,.$$

On a donc

$$1 = \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{a^2}\right),$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{(a+n)^2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} - \frac{1}{a^2},$$

et finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{(a+n)^2}\right) = \frac{2}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{(a+n)^2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} + \frac{1}{a^2}\,.$$

Exercice 16 Soit a un nombre réel et f la fonction de E qui est telle que, sur $[-\pi,\,\pi\,]$,

$$f(x) = \cos(ax)\,.$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier réels de f.

b) En déduire que si t n'est pas un multiple entier de π, on a

$$\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,.$$

a) La fonction f est paire, continue et admet en tout point une dérivée à gauche et à droite. Elle sera donc somme de sa série de Fourier. Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(ax)\,dx = \frac{2\sin(a\pi)}{a\pi},$$

et, si $n > 0$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(ax)\cos(nx)\,dx\,.$$

En transformant le produit de cosinus en somme,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n} + \frac{\sin(a-n)x}{a-n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \\ &= \frac{2a(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)}\,. \end{aligned}$$

Alors, pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)} \cos(nx)\,.$$

En particulier, si $x = \pi$,

$$f(\pi) = \cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)}\,,$$

Si $t = a\pi$, on obtient alors, en divisant par $\sin(a\pi)$,

$$\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,.$$

Exercice 17 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\,.$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue par morceaux et $1-$ périodique. Trouver sa série de Fourier réelle, et en déduire que si p et q sont deux entiers naturels dont le PGCD vaut d, on a

$$\int_0^1 f(px)f(qx)\,dx = \frac{d^2}{12pq}\,.$$

On a

$$\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x) + 1\,,$$

donc

$$f(x+1) = x + 1 - \mathrm{E}(x+1) - \frac{1}{2} = x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2} = f(x)\,,$$

ce qui signifie que f est $1-$périodique.

La fonction f est continue sur $[\,0,\,1\,[$, puique la fonction partie entière possède cette propriété.

Soit n entier positif. Si x appartient à $]\,n,\,n+1\,[$, alors $-x$ appartient à $]\,-n-1,\,-n\,[$ et

$$\mathrm{E}(-x) = -n - 1 = -\,\mathrm{E}(x) - 1\,,$$

donc

$$f(-x) = -x - \mathrm{E}(-x) - \frac{1}{2} = -\left(x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\right) = -f(x)\,,$$

et f est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Il en résulte que la série de Fourier de f est de la forme

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(2\pi n x)\,,$$

avec

$$b_n(f) = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin(2\pi n x)\,dx\,.$$

En intégrant par parties

$$b_n(f) = 2\left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\,,$$

d'où la série de Fourier de f

$$[f] = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}\,.$$

Cette série converge simplement vers $f(x)$ en tout point non entier.

Soit p un entier strictement positif. On a donc, pour tout x tel que px ne soit pas entier

$$f_p(x) = f(px) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n p x)}{n}\,.$$

Il en résulte que

$$b_m(f_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ ne divise pas } m \\ -\dfrac{p}{m\pi} & \text{si } p \text{ divise } m \end{cases} .$$

Or, d'après la formule de Bessel-Parceval,

$$\int_0^1 f(px)f(qx)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} b_m(f_p)b_m(f_q)\,.$$

Les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquels p et q divisent m, donc, si Δ est le PPCM des nombres p et q, pour les nombres m de la forme $k\Delta$ avec k entier. Alors

$$\int_0^1 f(px)f(qx)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k\Delta}(f_p)b_{k\Delta}(f_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{pq}{k^2\Delta^2\pi^2} = \frac{pq}{2\Delta^2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

Finalement

$$\int_0^1 f(px)f(qx)\,dx = \frac{pq}{12\Delta^2}\,,$$

mais puisque $d\Delta = pq$, on a aussi

$$\int_0^1 f(px)f(qx)\,dx = \frac{d^2}{12pq}\,.$$

EXERCICES THEORIQUES

Exercice 18 a) Soit f une fonction de E à valeurs réelles continue sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' continue sur $]0, 2\pi[$. Montrer que la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme celle de f.

b) Etudier le cas de la fonction f de E telle que $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$.

a) Si $n > 0$, on a

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx\,,$$

et en intégrant par parties

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\left(\Big[f(x)\cos(nx)\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} nf(x)\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(f(2\pi) - f(0)\right) + nb_n(f)\,,$$

et puisque f est continue en 0, on a, en raison de la périodicité $f(0) = f(2\pi)$, donc

$$a_n(f') = nb_n(f)\,.$$

Par un calcul analogue, on trouve

$$b_n(f') = -na_n(f)\,.$$

Par ailleurs

$$a_0(f') = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\,(f(2\pi) - f(0)) = 0\,.$$

La série de Fourier de f' est donc

$$[f'] = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n(f)\cos(nx) - na_n(f)\sin(nx))\,,$$

et c'est la dérivée terme à terme de celle de f

$$[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))\,.$$

b) Cherchons les coefficients de Fourier de la fonction f. On a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi\,,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) = 0\,,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) = -\frac{2}{n}\,.$$

On a donc

$$[f] = \pi - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\,,$$

dont la dérivée terme à terme vaut

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nx)\,.$$

La fonction f est dérivable sauf aux points de la forme $2k\pi$ avec k entier, et dans ce cas la fonction f' vaut 1. La série de Fourier de f' vaut alors 1 et n'est pas la dérivée terme à terme de f.

Exercice 19 Soit f un élément de E à valeurs réelles, nul sur l'intervalle $]-\pi,\, 0\,[$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2\,,$$

et que, si la fonction f est somme de sa série de Fourier sur $]\,0,\,\pi\,[$, on a, dans cet intervalle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx)\,.$$

Introduisons la fonction impaire g qui coïncide avec f sur $]\,0,\,\pi\,[$. On a

$$b_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 2b_n(f)\,.$$

Par ailleurs

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx = 2\int_0^{\pi} g(x)^2 dx = 2\int_0^{\pi} f(x)^2 dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx\,.$$

Alors, d'après l'égalité de Bessel-Parceval,

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx\,,$$

et

$$4\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx\,.$$

On en déduit donc

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2\,,$$

d'où l'égalité proposée.

Si la série de Fourier de f converge sur $]\,0,\,\pi\,[$, comme elle converge également sur $]-\pi,\, 0\,[$ on a donc, si x appartient à $]\,0,\,\pi\,[$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

et

$$f(-x) = 0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) - b_n(f)\sin(nx))\,.$$

On en déduit que les séries de termes généraux $(a_n(f)\cos(nx))$ et $(b_n(f)\sin(nx))$ convergent et que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(nx) = 0\,,$$

d'où la seconde égalité.

Exercice 20 Soit f une fonction de E à valeurs complexes continue sur $\mathbb{R}$, admettant une dérivée continue par morceaux. On suppose que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0\,.$$

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

Quand a-t-on égalité ?

En utilisant l'égalité de Bessel-Parceval, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2\,,$$

mais,

$$c_n(f') = inc_n(f)\,,$$

donc, si n n'est pas nul,

$$|c_n(f')| = |n||c_n(f)| \geq |c_n(f)|\,.$$

Par ailleurs

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad c_0(f') = 0\,.$$

On obtient donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n(f)|^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2\,,$$

d'où l'inégalité voulue.

La différence

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n(f)|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|c'_n(f)|^2 - |c_n(f)|^2)$$

ne peut être nulle que si, pour tout n, la différence $|c_n(f')|^2 - |c_n(f)|^2$ est nulle, c'est-à-dire

$$|n||c_n(f)| = |c_n(f')| = |c_n(f)|\,.$$

Ceci a lieu si et seulement si $c_n(f)$ est nul lorsque $n \neq \pm 1$. Donc l'égalité a lieu lorsque

$$f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}\,.$$

Exercice 21 Soit f une fonction de E à valeurs réelles. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f, ceux des fonctions g et h définies par

$$g(x) = f(x)\cos x \quad \text{et} \quad h(x) = f(x)\sin x\,.$$

Si $n = 0$, on a

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = a_1(f) \quad \text{et} \quad a_0(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = b_1(f)\,.$$

Si $n = 1$, on obtient

$$a_1(h) = b_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,b_2(f)\,,$$

Si $n \geq 1$, on a successivement

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)\,dx = \frac{1}{2}(a_{n+1}(f)+a_{n-1}(f))\,,$$

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x)\,dx = \frac{1}{2}(a_{n-1}(f)-a_{n+1}(f))\,,$$

et si $n \geq 2$,

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x)\,dx = \frac{1}{2}(b_{n+1}(f)+b_{n-1}(f))\,,$$

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)\,dx = \frac{1}{2}(b_{n+1}(f)-b_{n-1}(f))\,.$$

Exercice 22 a) Soit f une fonction $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\check{f}(x) = f(-x)\,.$$

Déterminer les coefficients de Fourier réels de $\check{f}$ en fonction de ceux de f.

b) Soit f une fonction $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}\,.$$

Déterminer les coefficients de Fourier complexes de $\bar{f}$ en fonction de ceux de f.

c) Montrer les propriétés suivantes.

(i) Si $a_n(f) = 0$ pour tout n, alors f est impaire ;
(ii) Si $b_n(f) = 0$ pour tout n, alors f est paire ;
(iii) Si $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ pour tout n, alors f est réelle.

a) On a, en effectuant le changement de variable $t = -x$,

$$a_n(\check{f}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = a_n(f)\,,$$

et

$$b_n(\check{f}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = -b_n(f)\,.$$

b) On a

$$c_n(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-inx}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx} = \overline{c_{-n}(f)}\,.$$

c) (i) Pour tout entier n, on a

$$a_n(f+\check{f}) = 2a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f+\check{f}) = 0\,.$$

Donc, si $a_n(f)$ est nul pour tout n, tous les coefficients de Fourier de $f+\check{f}$ sont nuls. Comme la fonction est continue, on en déduit qu'elle est nulle et donc que

$$\check{f} = -f\,,$$

c'est-à-dire que f est impaire.

(ii) Pour tout entier n, on a

$$a_n(f-\check{f})=0 \quad \text{et} \quad b_n(f-\check{f})=2b_n(f)\,.$$

Donc, si $b_n(f)$ est nul pour tout n, tous les coefficients de Fourier de $f-\check{f}$ sont nuls. Comme la fonction est continue, on en déduit qu'elle est nulle et donc que

$$\check{f}=f\,,$$

c'est-à-dire que f est paire.

(iii) Pour tout entier n on a

$$c_n(f-\bar{f})=c_n(f)-\overline{c_{-n}(f)}\,.$$

Donc, si (iii) a lieu, tous les coefficients de Fourier de $f-\bar{f}$ sont nuls. Comme la fonction est continue, on en déduit qu'elle est nulle et donc que

$$\bar{f}=f\,,$$

c'est-à-dire que f est réelle.

Exercice 23 Soit f une fonction $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ et $k-$lipschitzienne, à valeurs complexes. Pour $h>0$ on définit une fonction g_h en posant

$$g_h(x)=f(x+h)-f(x-h)\,.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier $c_n(g_h)$ en fonction des coefficients de Fourier de f.

b) Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\sin(nh)\,c_n(f)|^2\leq k^2h^2\,.$$

c) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1}|c_n(f)|^2\leq\frac{k^2\pi^2}{2^{2p+1}}\,.$$

d) En déduire que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<+\infty$, puis que f est la somme de sa série de Fourier.

Remarquons tout d'abord que f et g_h sont continues.

a) On a

$$\begin{aligned}c_n(g_h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t+h)-f(t-h))e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+h)e^{-int}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-h))e^{-int}dt\,.\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable dans les deux intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} c_n(g_h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(u)e^{-in(u-h)}du - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)e^{-in(u+h)}du \\ &= \frac{e^{inh}}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(u)e^{-inu}du - \frac{e^{-inh}}{2\pi}\int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)e^{-inu}du\,. \end{aligned}$$

Mais en raison de la périodicité des fonctions intégrées, on a

$$\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(u)e^{-inu}du = \int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(u)e^{-inu}du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du = 2\pi\, c_n(f)\,,$$

d'où

$$c_n(g_h) = (e^{inh} - e^{-inh})c_n(f) = 2i\sin(nh)\, c_n(f)\,.$$

b) Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)\, c_n(f)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_h)|^2\,,$$

et, en raison de l'égalité de Bessel-Parceval,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_h)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(x)|^2 dx\,,$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)\, c_n(f)|^2 = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(x)|^2 dx\,,$$

Mais, puisque f est $k-$lipschitzienne,

$$|g_h(x)| = |f(x+h) - f(x-h)| \leq k\,|(x+h) - (x-h)| = 2kh\,,$$

d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)\, c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4k^2h^2 dx = k^2h^2\,.$$

c) Prenons comme valeur de h le nombre $\pi/2^{p+1}$. Lorsque $|n|$ est compris entre 2^{p-1} et $2^p - 1$, on a

$$\frac{\pi}{4} \leq |n|h \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{p+1}} \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(|n|h) \leq 1\,.$$

Alors
$$2\sin^2(|n|h) = 2\sin^2(nh) \geq 1\,,$$
et
$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)|^2 \leq 2\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} \sin^2(nh)|c_n(f)|^2 \leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin^2(nh)|c_n(f)|^2 \leq 2k^2h^2 = \frac{k^2\pi^2}{2^{2p+1}}\,.$$

d) En utilisant l'inégalité de Schwarz, on a
$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)| \times 1 \leq \left(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} 1\right)^{1/2}\,.$$
Or
$$\left(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{k\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2^p}\,,$$
et, puisqu'il y a 2^p termes dans la somme,
$$\left(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} 1\right)^{1/2} = \sqrt{2}^{\,p}\,.$$
Finalement
$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)| \leq \frac{k\pi}{\sqrt{2}^{\,p+1}}\,.$$
La série de terme général $\frac{k\pi}{\sqrt{2}^{\,p+1}}$ converge et, si l'on pose,
$$S_p = \sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p-1} |c_n(f)|\,,$$
on en déduit que la série de terme général S_p converge également, mais
$$\sum_{p=1}^{\infty} S_p = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|\,.$$
Il en résulte bien que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\,.$$
Cette condition suffit pour que f soit la somme de sa série de Fourier. En effet, si l'on pose
$$u_n(x) = c_n(f)e^{inx}\,,$$
la série (sur $\mathbb{Z}$) de terme général u_n converge normalement sur $[\,-\pi,\,\pi\,]$ et sa somme est une fonction F continue qui a les mêmes coefficients de Fourier que f. La fonction $F-f$ possède alors des coefficients

de Fourier tous nuls, ce qui montre, d'après l'égalité de Bessel-Parceval, que l'intégrale de $|F - f|^2$ sur une période est nulle, donc que $F - f$ est nulle.

Exercice 24 Soit λ dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x}}{2\operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

a) Montre que f_λ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2\pi^2 - 4\lambda^2}.$$

b) Soit a dans $]-1, 1[$ et φ la fonction 2π−périodique nulle en $-\pi$ et $+\pi$ telle que, sur $]-\pi, \pi[$,

$$\varphi(x) = \sin(ax).$$

Déterminer les coefficients de Fourier de φ et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\cos\lambda}.$$

a) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$2\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2} \sim e^{\pi x/2},$$

donc, si l'on pose,

$$g_\lambda(x) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right)x\right),$$

on a

$$f_\lambda(x) \sim g_\lambda(x).$$

Comme $\lambda - \pi/2$ est strictement négatif, la fonction g_λ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc f_λ également.

De même en $-\infty$,

$$2\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2} \sim e^{-\pi x/2},$$

donc, si l'on pose,

$$h_\lambda(x) = \exp\left(\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right)x\right),$$

on a

$$f_\lambda(x) \sim h_\lambda(x).$$

Comme $\lambda + \pi/2$ est strictement positif, la fonction h_λ est intégrable au voisinage de $-\infty$, donc f_λ également.

Il en résulte bien que f_λ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Notons
$$\Phi^+(\lambda) = \int_0^\infty f_\lambda(x)\,dx \quad \text{et} \quad \Phi^-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 f_\lambda(x)\,dx\,.$$
En effectuant le changement de variable $u = -x$, on obtient
$$\Phi^+(\lambda) = \int_{-\infty}^0 f_\lambda(-u)\,du = \int_{-\infty}^0 f_{-\lambda}(u)\,du = \Phi^-(-\lambda)\,,$$
et donc
$$\int_{-\infty}^\infty f_\lambda(x)\,dx = \Phi^+(\lambda) + \Phi^-(\lambda) = \Phi^+(\lambda) + \Phi^+(-\lambda)\,.$$
Calculons alors
$$\Phi^+(\lambda) = \int_0^\infty f_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}}{e^{x\pi/2} + e^{-x\pi/2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{(\lambda-\pi/2)x}}{1 + e^{-x\pi}}\,dx\,.$$
En effectuant le changement de variable $u = e^{-x\pi/2}$, on a
$$du = -\frac{\pi}{2}\,e^{-x\pi/2}dx\,,$$
et
$$e^{\lambda x} = (e^{-x\pi/2})^{-2\lambda/\pi} = u^{-2\lambda/\pi}\,.$$
Par ailleurs u varie de 1 à 0, lorsque x varie de 0 à $+\infty$, d'où
$$\Phi^+(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{-2\lambda/\pi}}{1+u^2}\,du\,.$$
Si $0 \leq u < 1$, on a
$$\frac{u^{-2\lambda/\pi}}{1+u^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n u^{-2\lambda/\pi+2n}\,.$$
Comme la série est alternée, on a
$$\left|\frac{u^{-2\lambda/\pi}}{1+u^2} - \sum_{n=0}^k (-1)^n u^{-2\lambda/\pi+2n}\right| \leq u^{-2\lambda/\pi+2(k+1)}\,,$$

donc

$$\int_0^1 \left| \frac{u^{-2\lambda/\pi}}{1+u^2} - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n u^{-2\lambda/\pi+2n} \right| du \le \int_0^1 u^{-2\lambda/\pi+2(k+1)}\, du = \frac{1}{2k+3-2\lambda/\pi}\,.$$

Il en résulte que cette expression tend vers 0 quand k tend vers l'infini et donc que

$$\Phi^+(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n u^{-2\lambda/\pi+2n} du = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1-2\lambda/\pi} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi - 2\lambda}\,.$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\, dx = \Phi^+(\lambda) + \Phi^+(-\lambda) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi - 2\lambda} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi + 2\lambda} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2\pi^2 - 4\lambda^2}\,.$$

b) La fonction φ étant impaire, on a $a_n(\varphi) = 0$, et

$$b_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(ax)\sin(nx)\, dx\,.$$

En transformant le produit de sinus en somme, on obtient

$$\begin{aligned} b_n(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} - \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2n(-1)^n \sin(a\pi)}{a^2 - n^2}\,. \end{aligned}$$

Comme la fonction φ est dérivable en $\pi/2$, elle est somme de sa série de Fourier en ce point, d'où

$$\varphi(\pi/2) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p(\varphi) \sin(p\pi/2)\,.$$

Dans cette somme, seuls les termes de rang impair ne sont pas nuls. En posant $p = 2n+1$, on obtient alors

$$\sin(a\pi/2) = \varphi(\pi/2) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(\varphi)(-1)^n = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n (2n+1)\sin(a\pi)}{(2n+1)^2 - a^2}\,.$$

Choisissons maintenant $a = 2\lambda/\pi$ qui appartient bien à l'intervalle $\,]-1,\,1\,[$. On obtient

$$\sin\lambda = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n (2n+1)\sin(2\lambda)}{(2n+1)^2 - 4\lambda^2/\pi^2} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)\sin\lambda\cos\lambda}{(2n+1)^2\pi^2 - 4\lambda^2}\,.$$

Finalement

$$\frac{1}{\cos\lambda} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2\pi^2 - 4\lambda^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx\,.$$

Exercice 25 Pour tout entier $k > 0$, soit f_k la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$f_k(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^k\,.$$

a) Calculer le coefficient de Fourier $c_0(f_k)$.

b) Si $n > 0$, trouver une relation de récurrence entre $c_n(f_k)$ et $c_n(f_{k-1})$, et en déduire

$$c_n(f_k) = -\frac{k!}{(2i\pi n)^{k+1}} \sum_{s=1}^{k} \frac{(2i\pi n)^s}{s!}\,. \tag{1}$$

Que vaut $c_n(f_k)$ si n est négatif ?

c) Montrer que si x est positif

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{x^s}{s!} \leq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,e^x\,.$$

En déduire que

$$|c_n(f_k)| \leq \frac{e^{2\pi|n|}}{k+1}\,.$$

a) On a

$$c_0(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\,.$$

b) En intégrant par parties, si $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
c_n(f_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\int_0^{2\pi} x^k e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{k+1}}\left(\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\,x^k\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} kx^{k-1}\,\frac{e^{-inx}}{in}\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{2in\pi} + \frac{k}{(2\pi)^{k+1}in}\int_0^{2\pi} x^{k-1}e^{-inx}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Donc, si $k \geq 2$,

$$c_n(f_k) = -\frac{1}{2in\pi} + \frac{k}{2in\pi}\, c_n(f_{k-1})\,.$$

Par ailleurs

$$c_n(f_1) = -\frac{1}{2in\pi} + \frac{1}{(2\pi)^2 in} \int_0^{2\pi} e^{-ix}\, dx = -\frac{1}{2in\pi}\,,$$

ce qui donne la formule (1) à l'ordre 1. On démontre alors cette formule par récurrence sur k. Supposons la formule vraie à l'ordre k. Alors

$$\begin{aligned} c_n(f_{k+1}) &= -\frac{1}{2in\pi} + \frac{k+1}{2in\pi}\, c_n(f_k) \\ &= -\frac{1}{2in\pi} - \frac{k+1}{2in\pi}\, \frac{k!}{(2i\pi n)^{k+1}} \sum_{s=1}^{k} \frac{(2i\pi n)^s}{s!} \\ &= -\frac{1}{2in\pi} - \frac{(k+1)!}{(2i\pi n)^{k+2}} \sum_{s=1}^{k} \frac{(2i\pi n)^s}{s!} \\ &= -\frac{(k+1)!}{(2i\pi n)^{k+2}} \sum_{s=1}^{k+1} \frac{(2i\pi n)^s}{s!}\,, \end{aligned}$$

ce qui donne la formule à l'ordre $k+1$. Elle est donc vraie quel que soit $k \geq 1$.

Puisque la fonction f_k est réelle, on aura

$$c_n(f_k) = \overline{c_{-n}(f_k)}\,.$$

c) En mettant le premier terme de la somme en facteur, on obtient

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{x^s}{s!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{s!}\, x^{s-(k+1)}\,.$$

Mais le coefficient binomial $\binom{s}{k+1}$ est plus grand que 1, donc

$$\frac{s!}{(k+1)!(s-(k+1))!} \geq 1\,,$$

et par suite

$$\frac{(k+1)!}{s!} \leq \frac{1}{(s-(k+1))!}\,.$$

Alors

$$\sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{x^s}{s!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{x^{s-(k+1)}}{(s-(k+1)!} \leq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\, e^x\,.$$

Maintenant

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{(2in\pi)^s}{s!} = e^{2in\pi} - 1 - \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{(2in\pi)^s}{s!} = -\sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{(2in\pi)^s}{s!}\,,$$

et donc

$$\left|\sum_{s=1}^{k}\frac{(2in\pi)^s}{s!}\right| = \left|\sum_{s=k+1}^{\infty}\frac{(2in\pi)^s}{s!}\right| \leq \sum_{s=k+1}^{\infty}\frac{(2n\pi)^s}{s!} \leq \frac{(2n\pi)^{k+1}}{(k+1)!}\,e^{2n\pi}\,,$$

d'où, si $n > 0$,

$$|c_n(f_k)| \leq \frac{e^{2n\pi}}{k+1}\,.$$

Par ailleurs

$$|c_0(f_k)| = \frac{1}{k+1}\,,$$

et, si $n > 0$,

$$|c_n(f_k)| = |c_{-n}(f_k)| \leq \frac{e^{-2n\pi}}{k+1}\,.$$

On a donc, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$,

$$|c_n(f_k)| \leq \frac{e^{2|n|\pi}}{k+1}\,.$$

Exercice 26 Soit f un élément de E. Pour tout entier p on pose

$$f_p(x) = f(px)\,.$$

a) Déterminer les coefficients de Fourier complexes $c_n(f_p)$ de f_p en fonction de ceux de f lorsque p divise n.

b) Lorsque p ne divise pas n, montrer que $c_n(f_p)$ est nul
(i) en utilisant l'égalité de Bessel-Parceval ;
(ii) par un calcul direct.

a) On a, par changement de variable $u = px$,

$$c_n(f_p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(px)e^{-inx}dx = \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2p\pi} f(u)e^{-inu/p}dx\,.$$

Si p divise n, alors la fonction qui à u associe $f(u)e^{-inu/p}$ est $2\pi-$périodique et

$$c_n(f_p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu/p}du = c_{n/p}(f)\,.$$

b) (i) D'après la formule de Bessel-Parceval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(px)|^2dx\,.$$

et en changeant de variable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2p\pi} \int_0^{2p\pi} |f(u)|^2 du\,,$$

puis, en utilisnt la périodicité de f,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(u)|^2 du\,,$$

et enfin, de nouveau d'après la formule de Bessel-Parceval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2\,.$$

Mais

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=kp} |c_n(f_p)|^2 + \sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2\,.$$

Il en résulte que

$$\sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2 = 0\,.$$

Donc $c_n(f_p)$ est nul lorsque p ne divise pas n.

(ii) En effectuant le changement de variable $u = t + 2\pi$, on obtient

$$c_n(f_p) = \frac{1}{2p\pi} \int_0^{2p\pi} f(u)e^{-inu/p} du = \frac{e^{-2in\pi/p}}{2p\pi} \int_{-2\pi}^{2(p-1)\pi} f(t)e^{-int/p} dt = e^{-2in\pi/p} c_n(f_p)\,,$$

car la fonction qui à t associe $f(t)e^{-int/p}$ est $2p\pi-$périodique. Si p ne divise pas n, alors $e^{-2in\pi/p}$ est différent de 1 et $c_n(f_p)$ est nul.

Exercice 27 Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et à coefficients réels. Soit r tel que $0 < r < R$. Trouver les coefficients de Fourier complexes de la fonction f_r définie par

$$f_r(x) = S(re^{ix})\,,$$

puis les coefficients réels de $\operatorname{Re} f_r$ et de $\operatorname{Im} f_r$.

Application. Soir r dans $[\,0,\,1\,[$. Trouver les coefficients de Fourier réels de la fonction g_r définie par

$$g_r(x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}\,.$$

FD 38

On a

$$f_r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n e^{inx}\,,$$

et cette série converge uniformément en x puisque la série entière converge uniformément sur le disque de centre 0 et de rayon r. On peut donc permuter intégrale et série ce qui donne

$$c_n(f_r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k e^{ikx}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\alpha_k r^k e^{i(k-n)x}dx\,.$$

On a donc

$$c_n(f_r)=\left\{\begin{array}{cl}\alpha_n r^n & \text{si } n\geq 0\\ 0 & \text{si } n<0\end{array}\right.\,.$$

De même, pour

$$\operatorname{Re} f_r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^n\cos nx\,,$$

on obtient

$$a_n(\operatorname{Re} f_r)=\left\{\begin{array}{cl}\alpha_n r^n & \text{si } n\geq 0\\ 2\alpha_0 & \text{si } n=0\end{array}\right.\quad \text{et}\quad b_n(\operatorname{Re} f_r)=0\,.$$

Enfin, pour

$$\operatorname{Im} f_r(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n r^n\sin nx\,,$$

on obtient

$$b_n(\operatorname{Im} f_r)=\alpha_n r^n\quad \text{et}\quad a_n(\operatorname{Im} f_r)=0\,.$$

Application

On remarque que

$$g_r(x)=\operatorname{Re}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}=\operatorname{Re}(S(re^{ix}))\,,$$

où

$$R(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+\frac{2z}{1-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n\,,$$

est une série entière de rayon 1. Donc, si $n\geq 0$,

$$a_n(g_r)=2r^n\quad \text{et}\quad b_n(g_r)=0\,.$$

Exercice 28 Soit les séries entières à coefficients réels

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \text{et} \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

de rayons respectifs R et R' non nuls. On pose

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n\,.$$

Montrer que si $-R<u<R$ et $-R'<v<R'$, on a

$$h(uv)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(ue^{it})g(ve^{-it})dt\,.$$

En déduire, que si x est un nombre réel,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{(x+1)\cos t}\cos((x-1)\sin t)\,dt\,.$$

Posons

$$f_u(t)=f(ue^{it}) \quad \text{et} \quad g_v(t)=f(ve^{it})\,.$$

On obtient deux fonctions $2\pi-$périodiques continues sur $\mathbb{R}$ et, si $n\geq 0$, du fait de la convergence normale des séries, on a

$$c_n(f_u)=a_nu^n \quad \text{et} \quad c_n(g_v)=b_nv^n\,.$$

Alors, d'après la formule de Bessel-Parceval

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(ue^{it})\overline{g(ve^{it})}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(f_u)\overline{c_n(g_v)}\,.$$

Mais

$$\overline{g(ve^{it})}=g(ve^{-it}) \quad \text{et} \quad \overline{c_n(g_v)}=c_n(g_v)\,,$$

d'où le résultat.

Si l'on part de

$$f(x)=g(x)=e^x\,,$$

avec $u=x$ et $v=1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{xe^{it}}e^{e^{-it}}dt\,.$$

Or

$$e^{xe^{it}}e^{e^{-it}} = e^{x(\cos t+i\sin t)+(\cos t-i\sin t)} = e^{(x+1)\cos t+i(x-1)\sin t} = e^{(x+1)\cos t}(\cos((x-1)\sin t)+i\sin(x-1)\sin t))\,.$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(x+1)\cos t}\cos((x-1)\sin t)\,dt\,,$$

car

$$\int_0^{2\pi} e^{(x+1)\cos t}\sin((x-1)\sin t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(x+1)\cos t}\sin((x-1)\sin t)\,dt$$

est nulle comme intégrale d'une fonction impaire.

CONVOLUTION

Le produit de convolution $f\star g$ de deux fonctions f et g de E est défini par

$$f\star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt\,.$$

et l'on a

$$c_n(f\star g) = c_n(f)c_n(g)\,.$$

Exercice 29 1) Montrer que le produit de convolution de deux éléments de E est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\|f\star g\|_\infty \leq \|f\|_\infty\,\|g\|_\infty\,.$$

2) Dans l'ensemble E, montrer que le produit de convolution est une loi associative et commutative. Calculer $f\star 1$. Existe-t-il un élément neutre pour cette loi ?

3) Soit e_n la fonction qui à x associe e^{inx}. Calculer $e_p\star e_q$. Qu'en déduit-on pour l'anneau $(E,+,\star)$?

4) On pose

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\,.$$

Montrer que

$$\|f\star g\|_2 \leq \|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

1) La produit de convolution étant linéaire par rapport à chaque variable, il suffit de démontrer la propriété lorsque, dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, la fonction g est une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$, qui admet une limite finie à droite en a et à gauche en b, et nulle en dehors de $[a, b]$. La fonction g se prolonge donc en une fonction continue sur $[a, b]$ et est uniformément continue sur cet intervalle.

On a alors

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(x-t)g(t)\,dt\,.$$

On remarque que les éléments de E sont bornés. Il existe donc deux constantes F et G telles que, pour tout x réel,

$$|f(x)| \leq F \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq G\,.$$

Soit x et y dans $\mathbb{R}$ tels que

$$0 < y - x < b - a \leq 2\pi\,.$$

On a donc

$$x - b < y - b < x - a < y - a \quad \text{et} \quad 0 < (x-a) - (y-b) < b - a \leq 2\pi\,.$$

Evaluons la différence $2\pi(f \star g(x) - f \star g(y))$. On a

$$2\pi(f \star g(x) - f \star g(y)) = \int_a^b f(x-t)g(t)\,dt - \int_a^b f(y-t)g(t)\,dt\,,$$

et, en effectuant un changement de variable dans chaque intégrale,

$$\begin{aligned} 2\pi(f \star g(x) - f \star g(y)) &= \int_{x-b}^{x-a} f(t)g(x-t)\,dt - \int_{y-b}^{y-a} f(t)g(y-t)\,dt \\ &= \int_{x-b}^{y-b} f(t)g(x-t)\,dt + \int_{y-b}^{x-a} f(t)(g(x-t) - g(y-t))\,dt - \int_{x-a}^{y-a} f(t)g(y-t)\,dt\,. \end{aligned}$$

En majorant les fonction $|f|$ et $|g|$ on obtient alors

$$|f \star g(x) - f \star g(y)| \leq \frac{FG}{\pi}|y-x| + \frac{F}{2\pi} \int_{y-b}^{x-a} |g(x-t) - g(y-t)|\,dt\,.$$

Lorsque t décrit l'intervalle $[y-b, x-a]$, les nombres $x-t$ et $y-t$ appartiennent à $[a, b]$. Alors, comme g est uniformément continue sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|u-v| < \alpha$ implique

$$|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{2F}\,.$$

En particulier, si $|x-y|<\alpha$, on a

$$|g(x-t)-g(y-t)|<\frac{\varepsilon}{2F}\,,$$

d'où

$$|f\star g(x)-f\star g(y)|\leq\frac{FG}{\pi}\,|y-x|+\frac{F}{2\pi}\int\limits_{y-b}^{x-a}\frac{\varepsilon}{2F}\,dt\,,$$

ce qui donne

$$|f\star g(x)-f\star g(y)|\leq\frac{FG}{\pi}\,|y-x|+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ce résultat reste vraie si l'on permute les rôles de x et de y, donc, si l'on prend x et y tels que

$$|x-y|<\inf\left(\alpha,\frac{\varepsilon\pi}{2FG},b-a\right)\,,$$

on a

$$|f\star g(x)-f\star g(y)|\leq\varepsilon\,,$$

ce qui prouve la continuité de $f\star g$.

Enfin, on majore simplement

$$|f\star g(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x-t)g(t)|\,dt\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|\,f\,\|_\infty\,\|\,g\,\|_\infty\,dt=\|\,f\,\|_\infty\,\|\,g\,\|_\infty\,,$$

d'où

$$\|\,f\star g\,\|_\infty\leq\|\,f\,\|_\infty\,\|\,g\,\|_\infty\,.$$

2) On remarque tout d'abord que l'on peut intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur 2π. Puisque f est $2\pi-$périodique, on a

$$f\star g(x+2\pi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x+2\pi-t)g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\,dt=f\star g(x)\,,$$

donc $f\star g$ est $2\pi-$périodique.

En effectuant le changement de variable $u=x-t$, on obtient

$$f\star g(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-2\pi}^{x}f(u)g(x-u)\,du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(u)g(x-u)\,du=g\star f(x)\,,$$

et la loi est commutative.

Ensuite

$$\begin{aligned}
f\star(g\star h)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, g\star h(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u-t)h(t)\, dt\right) du \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u-t)h(t)\, dtdu \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u-t)\, du\right) h(t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $s=u-t$ dans l'intégrale en du, on obtient

$$\begin{aligned}
f\star(g\star h)(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x-t-s)g(s)\, ds\right) h(t)\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t-s)g(s)\, ds\right) h(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f((x-t)-s)g(s)\, ds\right) h(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\star g(x-t)h(t)\, dt \\
&= (f\star g)\star h\,,
\end{aligned}$$

et la loi est associative.

On a

$$f\star 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt\,,$$

ce qui donne une fonction constante. En particulier $1\star 1 = 1$.

S'il existait un élément neutre e, on aurait en particulier pour la fonction $e_n : x\mapsto e^{inx}$

$$e\star e_n = e_n\,,$$

et donc, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$c_n(e) = c_n(e)c_n(e_n) = c_n(e\star e_n) = c_n(e_n) = 1\,.$$

Mais la suite $(c_n(e))_{n\geq 0}$ devrait converger vers 0, d'où une contradiction.

3) On a

$$e_p \star e_q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ip(x-t)}e^{iqt}dt = \frac{1}{2\pi}e^{ipx}\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t}dt\,.$$

Donc, si $p \neq q$, on obtient

$$e_p \star e_q(x) = 0\,.$$

On en déduit en particulier que l'anneau $(E, +, \star)$ n'est pas intègre.

Par contre, si $p = q$,

$$e_p \star e_p(x) = e_p(x)\,.$$

4) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f\star g(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x-t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2dt\right)^{1/2},$$

donc

$$|f\star g(x)| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

En intégrant sur $[0,\,2\pi]$, il vient

$$\int_0^{2\pi}|f\star g(x)|^2dx \leq \|f\|_2^2\,\|g\|_2^2\int_0^{2\pi}dx = 2\pi\,\|f\|_2^2\,\|g\|_2^2\,,$$

d'où

$$\|f\star g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f\star g(x)|^2dx \leq \|f\|_2^2\,\|g\|_2^2\,,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 30 1) Pour tout entier n relatif non nul, montrer que l'application $\mathscr{H}_n$ qui à une fonction f associe la fonction définie par

$$\mathscr{H}_n(f)(x) = f(nx)$$

est un endomorphisme de E.

2) Montrer que

$$\mathscr{H}_n(f) \star \mathscr{H}_n(g) = \mathscr{H}_n(f \star g)\,.$$

3) Etudier la parité de $f \star g$ suivant celles de f et g.

4) Soit f et g deux éléments de E vérifiant

$$\mathscr{H}_{-1}(f) = \varepsilon f + \alpha \quad \text{et} \quad \mathscr{H}_{-1}(g) = \eta g + \beta\,,$$

où $\varepsilon^2 = \eta^2 = 1$ et α et β sont des constantes. Que peut-on dire de $\mathscr{H}_{-1}(f \star g)$?

1) On a

$$\mathscr{H}_n(f)(x + 2\pi) = f(nx + 2n\pi) = f(nx) = \mathscr{H}_n(f)\,,$$

donc $\mathscr{H}_n$ est $2\pi-$périodique, et par composition cela reste une fonction continue par morceaux. Donc $\mathscr{H}_n$ est un endomorphisme de E.

2) On a

$$\mathscr{H}_n(f) \star \mathscr{H}_n(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(nx - nt) g(nt)\, dt\,.$$

En effectuant le changement de variable $u = nt$, on obtient

$$\mathscr{H}_n(f) \star \mathscr{H}_n(g)(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} f(nx - u) g(u)\, du$$

et en raison de la périodicité

$$\mathscr{H}_n(f) \star \mathscr{H}_n(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(nx - u) g(u)\, du = f \star g(nx)\,,$$

d'où

$$\mathscr{H}_n(f) \star \mathscr{H}_n(g) = \mathscr{H}_n(f \star g)\,.$$

3) En appliquant ce qui précède à $n = -1$, on obtient

$$\mathscr{H}_{-1}(f) \star \mathscr{H}_{-1}(g) = \mathscr{H}_{-1}(f \star g)\,.$$

Si f et g ont la même parité

$$\mathscr{H}_{-1}(f) \star \mathscr{H}_{-1}(g) = f \star g\,,$$

donc
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=f\star g\,,$$
et $f\star g$ est paire.

Si f et g sont de parités différantes
$$\mathscr{H}_{-1}(f)\star\mathscr{H}_{-1}(g)=-f\star g\,,$$
donc
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=-f\star g\,,$$
et $f\star g$ est impaire.

4) On a
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=\mathscr{H}_{-1}(f)\star\mathscr{H}_{-1}(g)=(\varepsilon f+\alpha)\star(\eta g+\beta)\,,$$
d'où, en développant,
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=\varepsilon\eta f\star g+\varepsilon\beta f\star 1++\alpha\eta g\star 1+\alpha\beta 1\star 1\,.$$
Mais $f\star 1$, $g\star 1$ et $1\star 1$ sont des fonctions constantes. Il existe donc une constante A telle que
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=\varepsilon\eta f\star g+A\,.$$
Alors, si $\varepsilon=\eta$
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=f\star g+A\,.$$
En particulier, en 0,
$$f\star g(0)=\mathscr{H}_{-1}(f\star g)(0)=f\star g(0)+A\,,$$
et A est nulle. Il en résulte que $f\star g$ est paire.

Si maintenant $\varepsilon=-\eta$, on a cette fois
$$\mathscr{H}_{-1}(f\star g)=-f\star g+A\,.$$
La courbe représentative de $f\star g$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0,A/2)$.

Exercice 31 Pour tout entier $n\geq 1$, soit φ_n la fonction de E, qui vaut n sur $\,]-\pi/n,\,\pi/n\,[$ et 0 sur $\,[-\pi,\,-\pi/n\,]\cup[\,\pi/n,\,\pi\,]$. Soit f dans E. Montrer que si f est continue en x alors
$$\lim_{n\to\infty}f\star\varphi_n(x)=f(x)\,.$$

On remarque que
$$f(x) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} f(x)\,dt\,.$$

Par ailleurs
$$f \star \varphi_n(x) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} f(x-t)\,dt\,.$$

Alors
$$f \star \varphi_n(x) - f(x) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} (f(x-t) - f(x))\,dt\,.$$

Comme f est continue en x, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que $|u - x| < \alpha$ implique
$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Si l'on prend $n > \pi/\alpha$, on a alors, pour tout t de $[-\pi/n,\, \pi/n]$,
$$|(x-t) - x| = |t| \leq \frac{\pi}{n} < \alpha\,,$$

et donc
$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Alors
$$|f \star \varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} |f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \varepsilon\,.$$

Il en résulte bien que
$$\lim_{n\to\infty} f \star \varphi_n(x) = f(x)\,.$$

Exercice 32 Déterminer le produit de convolution $f \star g$ lorsque f et g sont une des fonctions sinus ou cosinus.

1) Si f et g sont la fonction cosinus

$$\begin{aligned}
f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-t)\cos t\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(x-2t)+\cos x)\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\sin(x-2t)}{2}+t\cos x\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{\cos x}{2}\,.
\end{aligned}$$

2) Si f et g sont la fonction sinus

$$\begin{aligned}
f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x-t)\sin t\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(x-2t)-\cos x)\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\sin(x-2t)}{2}-t\cos x\right]_0^{2\pi}\\
&= -\frac{\cos x}{2}\,.
\end{aligned}$$

3) Si f et la fonction sinus et g la fonction cosinus

$$\begin{aligned}
f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x-t)\cos t\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(x-2t)+\sin x)\,dt\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\cos(x-2t)}{2}+t\sin x\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{\sin x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 33 Déterminer le produit de convolution $f\star g$ lorsque f est la fonction cosinus ou la fonction sinus, et $g(x)=x$ sur $\left]-\pi,\,\pi\right[$.

1) Si f est la fonction cosinus, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-t)\cos t\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\Big[(x-t)\sin t\Big]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[(x-t)\sin t-\cos t\Big]_{-\pi}^{\pi}=0\,. \end{aligned}$$

2) Si f est la fonction sinus, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-t)\sin t\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\Big[-(x-t)\cos t\Big]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[-(x-t)\cos t-\sin t\Big]_{-\pi}^{\pi}=-1\,. \end{aligned}$$

Exercice 34 1) Soit f et g deux éléments de E, et a et b deux nombres réels. Soit F et G définies par

$$F(x)=f(x+a)\quad\text{et}\quad G(x)=g(x+b)\,.$$

Déterminer $F\star G$ en fonction de $f\star g$. Que se passe-t-il si $a=-b$? si $a=b=\pi$?

2) Soit a un nombre réel tel que $0<a<\pi/2$. Soit f_a la fonction paire de E et g_a la fonction impaire de E qui valent 1 sur $]\,0,\,a\,[$ et 0 sur $[\,a,\,\pi\,]$. Déterminer en fonction de $f_a\star f_a$ les produits $g_{2a}\star g_{2a}$, $f_{2a}\star g_{2a}$ et $f_{2a}\star f_{2a}$.

1) On a

$$F\star G(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+a-t)g(t+b)\,dt\,,$$

et, en faisant le changement de variable $u=t+b$,

$$F\star G(x)=\frac{1}{2\pi}\int_b^{2\pi+b}f(x+a+b-u)g(u)\,du\,,$$

Mais en intégrant sur une autre période,

$$F \star G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+a+b-u)g(u)\,du = f \star g(x+a+b)\,.$$

En particulier, si $a = -b$

$$F \star G = f \star g\,,$$

et si $a = b = \pi$,

$$F \star G(x) = f \star g(x + 2\pi)\,,$$

donc, en raison de la périodicité,

$$F \star G = f \star g\,.$$

2) On peut écrire, pour toute valeur de x sauf un nombre fini de points par période,

$$f_{2a}(x) = f_a(x-a) + f_a(x+a) \quad \text{et} \quad g_{2a}(x) = f_a(x-a) - f_a(x+a)\,.$$

Posons

$$\varphi_a(x) = f_a(x-a) \quad \text{et} \quad \psi_a(x) = f_a(x+a)\,.$$

Alors,

$$g_{2a} \star g_{2a} = (\varphi_a - \psi_a) \star (\varphi_a - \psi_a) = \varphi_a \star \varphi_a + \psi_a \star \psi_a - 2\varphi_a \star \psi_a\,,$$

et d'après 1),

$$g_{2a} \star g_{2a}(x) = f_a \star f_a(x-2a) + f_a \star f_a(x+2a) - 2f_a \star f_a(x)\,.$$

De même

$$f_{2a} \star f_{2a}(x) = f_a \star f_a(x-2a) + f_a \star f_a(x+2a) + 2f_a \star f_a(x)\,.$$

Enfin

$$f_{2a} \star g_{2a} = (\varphi_a + \psi_a) \star (\varphi_a - \psi_a) = \varphi_a \star \varphi_a - \psi_a \star \psi_a\,,$$

donc

$$f_{2a} \star g_{2a}(x) = f_a \star f_a(x-2a) - f_a \star f_a(x+2a)\,.$$

Exercice 35 Soit a tel que $0 < a < \pi$ et f la fonction paire de E qui vaut 1 sur l'intervalle $[\,0,\, a\,]$ et qui est nulle sur $]\,a,\, \pi\,]$. Déterminer $f \star f$.

On remarque que, en raison de la périodicité, la fonction f vaut 1 sur $[\,2\pi - a,\, 2\pi + a\,]$ et 0 sur $]\,a,\, 2\pi - a\,[$.

La fonction $f \star f$ est paire. Cherchons sa valeur si $0 \leq x \leq \pi$. On a donc

$$f \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt\,.$$

On distingue deux cas.

1) $\boxed{0 < a \leq \pi/2}$

Si x appartient à $[\,0,\,2a\,]$, on a

$$-a \leq x - a \leq a \leq x + a \leq 3a \leq 2\pi - a\,,$$

et donc

$$f \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-a}^{a} dt = \frac{1}{2\pi}\,(2a - x)\,.$$

Si x appartient à $[\,2a,\,\pi\,]$, on a

$$a \leq x - a \leq x + a \leq \pi + a \leq 2\pi - a\,,$$

et donc

$$f \star f(x) = 0\,.$$

2) $\boxed{\pi/2 \leq a < \pi}$

Dans ce cas $2\pi - 2a \leq 2a$.

Si x appartient à $[\,0,\,2\pi - 2a\,]$, on a

$$-a \leq x - a \leq a \leq x + a < 2\pi - a\,,$$

et donc, comme dans 1),

$$f \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-a}^{a} dt = \frac{1}{2\pi}\,(2a - x)\,.$$

Si x appartient à $[\,2\pi - 2a,\,\pi\,]$, on a

$$-a \leq x - a \leq a \leq 2\pi - a \leq x + a \leq 2\pi\,,$$

et donc

$$f \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x-a}^{a} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi-a}^{x+a} dt = \frac{1}{2\pi}\,((2a - x) + (x + 2a - 2\pi)) = \frac{1}{2\pi}\,(4a - 2\pi)\,.$$

Exercice 36 Soit f la fonction de E, qui vaut 1 sur $]\,0,\,\pi\,[$ et 0 sur $]\,-\pi,\,0\,[$. Déterminer $f \star f$, puis $f \star f \star f$.

FD 52

Si g est une fonction de E, on a

$$g\star f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(x-t)\,dt\,,$$

et en changeant de variable

$$g\star f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x} g(u)\,du=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{0} g(u)\,du+\int_0^x g(u)\,du\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{\pi} g(u)\,du+\int_\pi^x g(u)\,du\right)\,.$$

1) Prenons $g=f$.

Si x appartient à $]\,0,\,\pi\,[$ alors

$$-\pi<x-\pi<0<x<\pi\,,$$

et

$$f\star f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^x f(u)\,du=\frac{x}{2\pi}\,.$$

Si x appartient à $]\,\pi,\,2\pi\,[$ alors

$$0<x-\pi<\pi<x<2\pi\,,$$

et

$$f\star f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{\pi} f(u)\,du=\frac{2\pi-x}{2\pi}\,.$$

Donc, sur $]\,-\pi,\,0\,[$, on a

$$f(x)=-\frac{x}{2\pi}$$

On remarque que la fonction $f\star f$ est paire.

2) Prenons ensuite $g=f\star f$.

Si x appartient à $]\,0,\,\pi\,[$ alors

$$-\pi<x-\pi<0<x<\pi\,,$$

et

$$\begin{aligned}
f\star f\star f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{0} f\star f(u)\,du + \int_{0}^{x} f\star f(u)\,du\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{0} \frac{-u}{2\pi}\,du + \int_{0}^{x} \frac{u}{2\pi}\,du\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(-\Big[u^2\Big]_{x-\pi}^{0} + \Big[u^2\Big]_{0}^{x}\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left((x-\pi)^2 + x^2\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(2x^2 - 2\pi x + \pi^2\right).
\end{aligned}$$

Si x appartient à $]\,\pi,\, 2\pi\,[$ alors

$$0 < x - \pi < \pi < x < 2\pi\,,$$

et

$$\begin{aligned}
f\star f\star f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{\pi} f\star f(u)\,du + \int_{\pi}^{x} f\star f(u)\,du\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{x-\pi}^{\pi} \frac{u}{2\pi}\,du + \int_{\pi}^{x} \frac{2\pi-u}{2\pi}\,du\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(\Big[u^2\Big]_{x-\pi}^{\pi} - \Big[(2\pi-u)^2\Big]_{\pi}^{x}\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(\pi^2 - (x-\pi)^2 - (2\pi-x)^2 + \pi^2\right)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(-2x^2 + 6\pi x - 3\pi^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 37 Soit f et g deux éléments de E. Montrer que si x appartient à $[\,0,\,\pi\,]$, on a

$$2\pi f\star g(x) = \int_{x-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt + \int_{\pi}^{x+\pi} f(x-t)g(t-2\pi)\,dt\,.$$

Déterminer $f\star f$ et $f\star g$ lorsque

$$f(x) = x \text{ sur }]-\pi,\,\pi\,[\quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad]\,0,\,\pi\,[\\ -1 & \text{sur} \quad]-\pi,\,0\,[\end{cases}$$

FD 54

Comme la fonction qui à t associe $f(x-t)g(t)$ est $2\pi-$périodique l'intégrale sur une période ne dépend pas de la période choisie donc

$$\begin{aligned} f\star g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)g(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{x+\pi} f(x-t)g(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Alors, comme g est $2\pi-$périodique, on a aussi

$$f\star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{x+\pi} f(x-t)g(t-2\pi)\,dt\,,$$

ce qui donne la formule voulue.

Si x appartient à $[\,0,\,\pi\,]$ et t à $[\,x-\pi,\,\pi\,]$, alors $x-t$ appartient à $[\,x-\pi,\,\pi\,]$ qui est inclus dans $[\,-\pi,\,\pi\,]$, donc

$$f(x-t)f(t) = (x-t)t \quad \text{et} \quad f(x-t)g(t) = (x-t)\,\mathrm{sign}(t)\,.$$

Si x appartient à $[\,0,\,\pi\,]$ et t à $[\,\pi,\,x+\pi\,]$, alors $x-t$ et $t-2\pi$ appartiennent à $[\,-\pi,\,x-\pi\,]$ qui est inclus dans $[\,-\pi,\,0\,]$ donc

$$f(x-t)f(t-2\pi) = (x-t)(t-2\pi) \quad \text{et} \quad f(x-t)g(t-2\pi) = -(x-t)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} 2\pi f\star f(x) &= \int_{x-\pi}^{\pi} (x-t)t\,dt + \int_{\pi}^{x+\pi} (x-t)(t-2\pi)\,dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} (x-t)t\,dt - 2\pi\int_{\pi}^{x+\pi} (x-t)\,dt\,. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = x-t$,

$$2\pi f\star f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x-u)\,du - 2\pi\int_{-\pi}^{x-\pi} u\,dt\,.$$

Puis, en raison de la parité

$$\begin{aligned} 2\pi f\star f(x) &= -2\int_{0}^{\pi} u^2\,du - \pi\int_{-\pi}^{x-\pi} 2u\,dt \\ &= -2\,\frac{\pi^3}{3} - \pi\,\left((x-\pi)^2-\pi^2\right) \\ &= -2\,\frac{\pi^3}{3} - \pi x^2 + 2\pi^2 x\,. \end{aligned}$$

Comme f est impaire, alors $f\star f$ est paire, et l'on a sur $[-\pi,\,\pi]$,

$$f\star f(x) = -\frac{x^2}{2} + \pi|x| - \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
2\pi f\star g(x) &= \int\limits_{x-\pi}^{0} (t-x)\,dt + \int\limits_{0}^{\pi} (x-t)\,dt + \int\limits_{\pi}^{x+\pi} (t-x)\,dt \\
&= \left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_{x-\pi}^{0} - \left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_{0}^{\pi} + \left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_{\pi}^{x+\pi} \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(\pi-x)^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{(\pi-x)^2}{2} \\
&= x^2 - (\pi-x)^2
\end{aligned}$$

$$f\star g(x) = \frac{1}{2\pi}\,(2\pi x - \pi^2) = x - \frac{\pi}{2}\,.$$

Mais, comme f et g sont impaires, la fonction $f\star g$ est paire et finalement, sur $[-\pi,\,\pi]$

$$f\star g(x) = |x| - \frac{\pi}{2}\quad.$$

Exercice 38 Soit P un polynôme non constant. Si f est une fonction de E, on note $P(f)$ la fonction obtenue en remplaçant, lorsque $k\geq 1$, le monôme X^k par le produit de convolution de k fonctions $f\star\cdots\star f$. Déterminer les fonctions f telles que

$$P(f) = 0\,.$$

En particulier quelles sont les solutions de l'équation

$$x\star x = x\,.$$

En raison de la relation

$$c_n(f\star g) = c_n(f)c_n(g)$$

on a donc, si $n\geq 1$,

$$c_n(f^n) = c_n(f)^n\,.$$

Par ailleurs pour la fonction constante 1,

$$c_0(1) = 1 \quad\text{et}\quad c_n(1) = 0 \text{ si } n\geq 1\,.$$

De plus les applications c_n sont linéaires. On obtient alors

$$0 = c_0(P(f)) = P(c_0(f))\,,$$

donc $c_0(f)$ est racine de P. Mais on a aussi, si $n \geq 1$,

$$0 = c_n(P(f)) = c_n((P - P(0))(f)) = (P - P(0))(c_n(f))\,.$$

Si $n \geq 1$, tous les coefficients $c_n(f)$ sont racines du polynôme $P - P(0)$. Ils ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs non nulles. Mais les suites $(c_n(f))_{n\geq 0}$ et $(c_{-n}(f))_{n\geq 0}$ convergent vers zéro. Elles sont donc stationnaires et il n'y a qu'un nombre fini de coefficients $c_n(f)$ qui ne sont pas nuls.

Alors, f est de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e^{ikx}\,,$$

où λ_0 est racine de P et les autres λ_k sont racines de $P - P(0)$ (et peuvent donc être nulles).

Inversement, si f est de la forme précédente, on obtient

$$c_0(P(f)) = P(c_0(f)) = 0\,,$$

car $c_0(f)$ est racine de P, mais aussi

$$c_n(P(f)) = (P - P(0))(c_n(f)) = 0\,,$$

et la fonction $P(f)$ a tous ses coefficients de Fourier nuls. Comme c'est une fonction continue, on en déduit que $P(f)$ est nulle.

Si l'on prend le polynôme $P(X) = X^2 - X$ qui n'a que 1 comme racine non nulle, alors

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} e^{in_k x}\,,$$

où les nombres $n_1, \ldots, n_k$ sont dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 39 Soit f et g deux fonctions réelles de E. Calculer les coefficient de Fourier réels de $f \star g$ en fonction de ceux de f et de g. Que se passe-t-il si f et g ont une parité ?

On part des relations

$$c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - ib_n)\,,$$

avec $b_0 = 0$.

On a alors

$$c_n(f\star g) = \frac{1}{4}\,(a_n(f)-ib_n(f))(a_n(g)-ib_n(g)) = \frac{1}{4}\,((a_n(f)a_n(g)-b_n(f)b_n(g))-i((a_n(g)b_n(f)+a_n(f)b_n(g)))\,.$$

Alors

$$a_n(f\star g) = \frac{1}{2}\,((a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g)) \quad \text{et} \quad b_n(f\star g) = \frac{1}{2}\,((a_n(g)b_n(f) + a_n(f)b_n(g))\,.$$

Lorsque f et g sont impaires, on a $a_n(f) = a_n(g) = 0$, d'où

$$a_n(f\star g) = -\frac{1}{2}\,b_n(f)b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(f\star g) = 0\,.$$

Lorsque f et g sont paires, on a $b_n(f) = b_n(g) = 0$, d'où

$$a_n(f\star g) = \frac{1}{2}\,a_n(f)a_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(f\star g) = 0\,.$$

Lorsque f est paire et g impaire, on a $b_n(f) = a_n(g) = 0$, d'où

$$a_n(f\star g) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f\star g) = \frac{1}{2}\,a_n(f)b_n(g)\,.$$

Les rôles s'inversent si f est impaire et g est paire.

Exercice 40 Soit f un élément de E dont les coefficients $c_n(f)$ ne s'annulent pas. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application qui à une fonction g de E associe $g\star f$.

Si l'on a

$$g\star f = \lambda g\,,$$

avec g non nulle, et λ complexe, on trouve, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$,

$$c_n(g)c_n(f) = \lambda c_n(g)\,.$$

Il existe un entier n_0 tel que $c_{n_0}(g)$ ne soit pas nul et donc

$$\lambda = c_{n_0}(f)\,.$$

Pour une telle valeur λ, l'ensemble

$$N_\lambda = \{n | c_n(f) = \lambda\}$$

est fini puisque les suites $(c_n(f))_{n\geq 0}$ et $(c_{-n}(f))_{n\geq 0}$ convergent vers 0. On a alors

$$g(x) = \sum_{n\in N_\lambda} \alpha_n e^{inx}\,.$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Lorsqu'une fonction f de E continue admet une dérivée f' sauf en un nombre fini de points par période, qui se trouve elle-même dans E, alors

$$c_n(f') = (in)c_n(f)\,.$$

Exercice 41 Soit g un élément de E. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\alpha f'' + \beta f' + \gamma f = g\,.$$

Chercher les solutions de cette équation de classe C^1 dont la dérivée seconde existe et soit dans E.

Application : on prend

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad]\,0,\,\pi\,[\\ -1 & \text{sur} \quad]\,-\pi,\,0\,[\end{cases}$$

et on considère l'équation différentielle

$$f'' - f' = g\,.$$

Trouver les coefficients de Fourier de la solution f nulle en 0. Déterminer explicitement f en résolvant l'équation dans $]\,0,\,\pi\,[$ et $]\,-\pi,\,0\,[$. Cette fonction est-elle impaire ?

En calculant les coefficients de Fourier, on obtient

$$c_n(g) = \alpha c_n(f'') + \beta c_n(f') + \gamma c_n(f) = (\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma)c_n(f)\,.$$

Si l'équation

$$-\alpha n^2 + \beta in + \gamma = 0$$

n'a pas de racine entière, on a alors

$$c_n(f) = \frac{c_n(g)}{\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma}\,,$$

et dans ce cas, l'équation différentielle a donc au plus une solution.

Si l'équation

$$-\alpha n^2 + \beta in + \gamma = 0$$

a une racine entière n_0, l'équation différentielle n'a pas de solution si $c_{n_0}(g)$ est non nul. Dans le cas où $c_{n_0}(g)$ est nul, l'équation différentielle aura une infinité de solutions s'il en existe au moins une puisque, si f_0 est solution, alors les fonctions définies par

$$f(x) = f_0(x) + Ae^{in_0x}\,,$$

le seront aussi.

Dans le cas où il peut exister une solution, posons

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n(g)}{\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma}\, e^{inx}\,,$$

avec la convention que $\dfrac{c_n(g)}{\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma}$ est nul lorsque $c_n(g)$ est nul.

Comme la suite $(c_n(g))$ converge vers 0 en $\pm\infty$, elle est bornée par une constante M, et

$$\left|\frac{c_n(g)}{\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma}\right| \leq \frac{M}{|\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma|} \sim \frac{M}{\alpha n^2}\,.$$

La série définissant f_0 est donc normalement convergente et f_0 est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Soit alors $h_1 = g - \gamma f_0$. On a

$$c_n(h_1) = c_n(g) - \gamma c_n(f_0) = c_n(g)\,\frac{\alpha(in)^2 + \beta(in)}{\alpha(in)^2 + \beta(in) + \gamma} = (\alpha(in)^2 + \beta(in))c_n(f_0)\,.$$

Comme $c_0(h_1)$ est nul, et que h_1 est dans E, on définit h_2 en posant

$$h_2(x) = \int_0^x h_1(t)\,dt\,.$$

Alors h_2 est dans E et continue et, lorsque n n'est pas nul,

$$c_n(h_2) = (\alpha(in) + \beta)c_n(f_0)\,.$$

Soit alors k_2 définie par

$$k_2 = h_2 - \beta f_0 - c_0(h_2 - \beta f_0)\,.$$

On a, pour tout entier n

$$c_n(k_2) = \alpha(in)c_n(f_0)\,,$$

et k_2 est dans E et continue. Alors en posant

$$h_3(x) = \int_0^x k_2(t)\,dt$$

on définit un élément de E continu tel que, pour tout n non nul,

$$c_n(h_3) = \alpha c_n(f_0)\,.$$

Il en résulte que

$$h_3 = \alpha f_0 + C$$

où C est une constante. Alors

$$h_3' = k_2 = \alpha f_0'$$

donc f est de classe C^1, puis

$$h_2 - \beta f - c_0(h_2 - \beta f) = \alpha f_0'$$

et en dérivant de nouveau

$$h_2' - \beta f_0' = \alpha f_0'' ,$$

c'est-à-dire

$$g - \gamma f_0 - \beta f_0' = \alpha f_0'' ,$$

ce qui prouve que f_0'' existe dans E et que

$$\alpha f_0'' + \beta f_0' + \gamma f_0 = g .$$

La fonction f_0 est donc bien solution de l'équation différentielle.

Si l'équation $\alpha(in)^2 + \beta in + \gamma = 0$ n'a pas de racine entière, c'est la seule solution.

Si l'équation $\alpha(in)^2+\beta in+\gamma = 0$ a une racine entière n_0 telle que $c_{n_0}(g)$ soit nul, l'équation différentielle a pour solutions les fonctions f définies par

$$f(x) = f_0(x) + Ae^{in_0x}$$

où A est une constante.

Si l'équation $\alpha(in)^2+\beta in+\gamma = 0$ a deux racines entières n_1 et n_2 telles que $c_{n_i}(g)$ soient nuls, l'équation différentielle a pour solutions les fonctions f définies par

$$f(x) = f_0(x) + Ae^{in_1x} + Be^{in_2x} ,$$

où A et B sont des constantes.

Application

On cherche les coefficients de Fourier de g. On a

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi e^{-int}dt - \int_{-\pi}^0 e^{-int}dt\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{in} .$$

Les coefficients de rang pair sont nuls et pour les coefficients de rang impair

$$c_{2k+1}(g) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{i(2k+1)} .$$

Alors

$$c_n(f'' - f') = ((in)^2 - in)c_n(f) = c_n(g) ,$$

et donc, si $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{c_n(g)}{(in)^2 - in} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{in}\,\frac{1}{-n^2 - in} = \frac{1-(-1)^n}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{1-in} = \frac{1-(-1)^n}{\pi}\,\frac{1+in}{n^2(n^2+1)}\,.$$

L'équation $(in)^2 - in = 0$ admet 0 comme seule solution entière et $c_n(0)$ est nul. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions f telles que

$$f(x) = A + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n(g)}{(in)^2 - in}\, e^{inx} = A + \frac{2}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1 + i(2k+1)}{(2k+1)^2((2k+1)^2+1)}\, e^{i(2k+1)x}\,.$$

Si l'on revient aux coefficients réels,

$$f(x) = A + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2((2k+1)^2+1)} - \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)((2k+1)^2+1)} \right)\,.$$

Cette fonction est définie par une série normalement convergente, ainsi que la série dérivée. On retrouve bien qu'elle est de classe C^1. Mais comme les coefficients pairs ne sont pas nuls, la fonction n'est pas impaire. La solution qui est nulle en zéro est alors

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(2k+1)x - 1}{(2k+1)^2((2k+1)^2+1)} - \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)((2k+1)^2+1)} \right)\,.$$

Pour déterminer explicitement cette solution, résolvons l'équation différentielle.

Les solutions dans l'intervalle $]\,0,\,\pi\,[$ et nulles en zéro de l'équation

$$f'' - f' = 1$$

sont les fonctions f telles que

$$f(x) = -x + \lambda(1 - e^x)\,.$$

Les solutions dans l'intervalle $]\,-\pi,\,0\,[$ et nulles en zéro de l'équation

$$f'' - f' = -1$$

sont les fonctions f telles que

$$f(x) = x + \lambda'(1 - e^x)\,.$$

On a alors

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \lambda e^x & \text{sur} \quad]\,0,\,\pi\,[\\ \\ 1 - \lambda' e^x & \text{sur} \quad]\,-\pi,\,0\,[\end{cases}\,.$$

La fonction f cherchée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On doit donc avoir les trois relations suivantes

$$\begin{array}{llll} f'_+(0) = f'_-(0) & \text{donc} & (1) & -1 - \lambda = 1 - \lambda' \\ f_-(\pi) = f_+(-\pi) & \text{donc} & (2) & \lambda(1 - e^{\pi}) = \lambda'(1 - e^{-\pi}) \\ f'_-(\pi) = f'_+(-\pi) & \text{donc} & (3) & -1 - \lambda e^{\pi} = 1 - \lambda' e^{-\pi} \end{array}$$

On remarque que l'équation (2) est la différence des deux autres. Les relations (1) et (3) permettent de calculer λ et λ'. On obtient

$$\lambda' = 2 + \lambda = 2e^{\pi} + \lambda e^{2\pi}\,,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{2(1-e^{\pi})}{e^{2\pi}-1} = -\frac{2}{1+e^{\pi}} = -\frac{e^{-\pi/2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} = -1 + \operatorname{th}\frac{\pi}{2}\,,$$

puis

$$\lambda' = \lambda + 2 = 1 + \operatorname{th}\frac{\pi}{2}\,.$$

Finalement

$$f(x) = \begin{cases} -x - \left(1 - \operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}\right)(1-e^{x}) & \text{sur} \quad [\,0,\,\pi\,] \\ \\ x + \left(1 + \operatorname{th}\dfrac{\pi}{2}\right)(1-e^{x}) & \text{sur} \quad [\,-\pi,\,0\,] \end{cases} \,.$$