Fiche de Mathématiques 9 - Séries de Fourier.

1 Séries trigonométriques

2 Coefficients de Fourier

3 Règles de convergence

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Correction :

1. Sur $[0, \pi/2]$, on a $f(x) = 4x^2 - \pi^2$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ avec $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(\pi/2) = 4\pi$. Sur $]\pi/2, \pi]$, on a $f(x) = 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2$ et cette relation est aussi valable pour $x = \pi/2$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, \pi]$ avec $f'_d(\pi/2) = 4\pi$ et $f'_g(\pi) = 0$. Par parité et périodicité, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et un dessin serait sûrement très convaincant) et f' est une fonction impaire, 2π-périodique avec
$$f'(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8\pi - 2x & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Puisque la fonction f est paire, les coefficients $b_n(f)$ sont nuls et
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(4t^2 - \pi^2)\cos(nt)dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(8t\pi - 3\pi^2 - 4t^2)\cos(nt)dt\right)$$
ce qui donne après quelques calculs pénibles
$$a_{2p}(f) = 0 \text{ et } a_{2p+1}(f) = \frac{32(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3},$$
ou plus simplement en exploitant la relation $b_n(f') = -na_n(f)$, ou $a_n(f'') = nb_n(f') = -n^2a_n(f)$ en considérant la pseudo-dérivée d'ordre 2 de f.
3. Puisque la fonction f est de classe C^1, elle est égale à sa somme de Fourier (Théorème de Dirichlet) et donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{32}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\cos((2n+1)x).$$
En évaluant pour $x = 0$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Correction :

1. $a_{2n}(f) = \dfrac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ et $a_{2n+1}(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier vers f. En $x = 0$, on obtient :
$$f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Exercice 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par
$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ f(x) = \exp(x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
2. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Correction :

1. $c_n(f) = \dfrac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} \dfrac{(-1)^n}{1-in}$.
2. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc la série de Fourier converge simplement vers la fonction $f^\star$ régularisée de f. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^\star(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} \exp(inx)$. Pour $x = 0$, on obtient $\dfrac{\pi}{\mathrm{sh}(\pi)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in}$. Or,
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2+1}.$$
Par suite
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{\mathrm{sh}(\pi)}\right).$$
De même avec $x = \pi$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}(1 + \pi \coth(\pi))$.

Exercice 4 Soient $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par
$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.
3. En déduire enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction :

1. $b_n(f) = 0$ pour $n > 1$ et $a_n(f) = (-1)^{n-1} \dfrac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite
$$f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)} \cos(nx).$$
2. Pour $x = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}\right)$ et pour $x = \pi$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1 - \alpha\pi \mathrm{cotan}(\alpha\pi)}{2\alpha^2}.$$
3. Il y a convergence normale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ pour $\alpha \in [0, 1/2]$ donc quand $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.
Quand $x \to 0$, $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3}x + \circ(x)$ donc $\dfrac{1 - \alpha\pi \mathrm{cotan}(\alpha\pi)}{2\alpha^2} \underset{\alpha\to 0}{\to} \dfrac{\pi^2}{6}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$.

Correction :

1. $b_n(f) = 0$ pour $n > 1$ et $a_n(f) = (-1)^n \dfrac{2\alpha \operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite,
$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \operatorname{sh}(\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)} \cos(nx).$$
2. Pour $x = 0$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\operatorname{sh}(\alpha\pi)} - 1\right)$$
et pour $x = \pi$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\alpha\pi \coth(\alpha\pi) - 1}{2\alpha^2}.$$

4 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro

Exercice 6 On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de Dirichlet, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité a de f, on ait :
$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$
Soient $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$ définie par $g(x) = f(x+a)$ où a est un réel fixé. Exprimer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.
Correction : Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\exp(-int)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\exp(-in(x-a))dx = \exp(ina)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)dx = \exp(ina)c_n(f).
\end{aligned}$$
Il en résulte que :
$$\begin{aligned}
a_n(g) &= c_{-n}(g) + c_n(g) = \exp(-ina)c_{-n}(f) + \exp(ina)c_n(f) \\
&= \exp(-ina)\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} + \exp(ina)\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\
&= \frac{\exp(ina) + \exp(-ina)}{2}a_n(f) + \frac{\exp(ina) - \exp(-ina)}{2i}b_n(f) \\
&= \cos(na)a_n(f) + \sin(na)b_n(f)
\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}
b_n(g) &= i(c_n(g) - c_{-n}(g)) = i(\exp(ina)c_n(f) - \exp(-ina)c_{-n}(f)) \\
&= i\left(\exp(ina)\frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} - \exp(-ina)\frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\right) \\
&= \frac{\exp(ina) + \exp(-ina)}{2}b_n(f) - \frac{\exp(ina) - \exp(-ina)}{2i}a_n(f) \\
&= \cos(na)b_n(f) - \sin(na)a_n(f),
\end{aligned}$$
ce qui peut aussi se vérifier avec :
$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(n(x-a))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\cos(na)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx + \sin(na)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \\
&= \cos(na)a_n(f) + \sin(na)b_n(f)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(n(x-a))dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\cos(na)\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx - \sin(na)\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right) \\ &= \cos(na)b_n(f) - \sin(na)a_n(f). \end{aligned}$$

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^\star,\ c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}.$$

Correction : Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il existe alors une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 2\pi$$

telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge par continuité en fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^\star$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\exp(-int)dt$$

et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\exp(-int)dt &= \left[i\frac{f(t)\exp(-int)}{n}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\exp(-int)dt \\ &= i\frac{f(a_{k+1}^-)\exp(-ina_{k+1}) - f(a_k^+)\exp(-ina_k)}{n} - \frac{i}{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\exp(-int)dt. \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors $f(a_k^-) = f(a_k^+) = f(a_k)$ pour tout k compris entre 0 et p et :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}(f(a_{k+1})\exp(-ina_{k+1}) - f(a_k)\exp(-ina_k)) - \frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\exp(-int)dt \\ &= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)\exp(-int)dt \end{aligned}$$

puisque f est 2π-périodique et $c_n(f) = \dfrac{c_n(f')}{in}$. Il en résulte que :

$$\left\{\begin{aligned} a_n(f) &= c_{-n}(f) + c_n(f) = \frac{c_n(f') - c_{-n}(f')}{in} = -\frac{b_n(f')}{n} \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{c_{-n}(f') + c_n(f')}{n} = \frac{a_n(f')}{n} \end{aligned}\right. .$$

Remarque 4.1 Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)dt = 0$$

puisque f est 2π-périodique. Donc la relation $c_n(f') = inc_n(f)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5 Problèmes d'approximation

Exercice 8 Montrer que pour tout entier naturel n les fonctions :

$$t \mapsto (\cos(t))^n \text{ et } t \mapsto (\sin(t))^n$$

sont des polynômes trigonométriques.
Corection :
Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. On note $P = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la forme :

$$P : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Montrons maintenant le résultat par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. En supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}(\cos(t))^{n+1} &= (\cos(t))^n \cos(t) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \cos(t) \\ &= a_0 \cos(t) + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kt) \cos(t) + b_k \sin(kt) \cos(t))\end{aligned}$$

avec :

$$\cos(kt) \cos(t) = \frac{\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

et :

$$\sin(kt) \cos(t) = \frac{\sin((k+1)t) + \sin((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

pour $k \geq 1$, ce qui entraîne $(\cos(t))^{n+1} \in \mathcal{P}$.
On procède de même pour $(\sin(t))^n$.
On peut aussi utiliser les exponentielles complexes et la formule du binôme pour écrire :

$$(\cos(t))^n = \frac{(\exp(it) + \exp(-it))^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \exp(ikt) \exp(-i(n-k)t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \exp(i(2k-n)t)$$

et :

$$(\cos(t))^n = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \exp(i(2k-n)t) \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} \cos((2k-n)t) \in \mathcal{P}_n.$$

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$
2. Montrer que pour tous réels a, b, t, on a :
$$|a \cos(t) + b \sin(t)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$
3. Montrer que :
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

Correction :

1. Dans le cas où $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \; a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$$
et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace des suites réelles de carré sommable nous dit que :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sqrt{a_n(f')^2 + b_n(f')^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f')^2 + b_n(f')^2)}\end{aligned}$$
ce qui donne, compte tenu de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ et de l'égalité de Parseval (voir dernière section) appliquée à la fonction $f' \in \mathcal{D}$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}$$

(on rappelle que $a_0(f') = 0$).

2. Si $a^2 + b^2 = 0$, c'est évident, sinon il existe un réel θ tel que :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta) \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\theta)$$
(puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$) et :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(t) = \cos(\theta)\cos(t) + \sin(\theta)\sin(t) = \cos(\theta - t) \in [-1, 1].$$
On peut aussi écrire que :
$$a\cos(t) + b\sin(t) = a\frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} + b\frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \frac{a - ib}{2}\exp(it) + \frac{a + ib}{2}\exp(-it)$$
et :
$$|a\cos(t) + b\sin(t)| \leq \left|\frac{a - ib}{2}\right| + \left|\frac{a + ib}{2}\right| \leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Comme $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :
$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{a_0(f)}{2}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2 dt}\end{aligned}$$
c'est-à-dire que :
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2 dt}.$$

6 Un exemple d'espace préhilbertien

Exercice 10 Montrer que la série trigonométrique $\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.

Correction : Le théorème d'Abel nous assure la convergence de la série trigonométrique pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ cette série est nulle. Si cette série est la série de Fourier d'une fonction $f \in D$, cela signifie que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et le théorème de Bessel nous dit que la série $\sum(b_n(f))^2 = \sum_n \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui n'est pas vrai. On peut en fait remplacer la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par n'importe quelle suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum_n u_n^2 = +\infty$.

7 Théorème de Parseval

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f.
3. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Correction :

1. f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nt)dt + \int_0^{\pi}(1)\sin(nt)dt = 2\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}$ donc $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$ (on a utilisé : $\displaystyle\int_0^T = \int_0^{2\pi} = \int_x^{x+T} = \int_{-\pi}^{\pi}$ en posant $x = -\pi$).
On en déduit que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \dfrac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x)$.
2. D'après le théorème de Dirichlet, la fonction f étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$, ou encore
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x) = f(x).$$
Si $x_0 \neq k\pi$ (x_0 n'est pas un point de discontinuité), $S(x) = f(x)$, et si $x_0 = k\pi$ (x_0 est un point de dicontinuité), étant donné que $f(x^+) = f(\pi^+) = \displaystyle\lim_{x\to\pi^+} f(x) = 1$ et $f(x^-) = f(\pi^-) = \displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -1$, $S(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = 0$.
3. La convergence simple de la série de Fourier vers $f(x)$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ (qui n'est pas un point de discontinuité) donne :
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}{(2p+1)\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$
L'égalité de Parseval donne $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{16}{(2p+1)^2\pi^2} = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2dt = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ existe et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique, paire, telle que $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = x$.
1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Correction :
1. Puisque f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$. Ensuite,
- $a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \underset{\text{Chasles}}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{0}(-t)dt + \int_0^{\pi}(t)dt\right) \underset{\text{parité}}{=} \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.
- Pour $n \geq 1$: $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{t}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \frac{2}{n^2\pi}[\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}$.
  Donc, $a_{2k}(f) = 0, \forall k \geq 1$ et $a_{2k+1}(f) = \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, \forall k \geq 0$.
  Par suite, $S_n(x) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p(f)\cos(px) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.
2. f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc d'après le théorème de Dirichlet, $S(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ c'est-à-dire
$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = f(x).$$

3. Pour $x=0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
   Par la formule de Parseval :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2dt=2a_0(f)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k+1}(f)^2=\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$
   Or $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ existe et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. De même, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 13 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant $f(t)=\dfrac{\pi-t}{2}$ sur $]0,\pi]$.

1. Justifier que f est développable en série de Fourier et former ce développement.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

<u>*Correction*</u> :

1. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier. $a_n(f)=0$ et, par intégration par parties, $b_n(f)=\dfrac{1}{n}$. Le développement en série de Fourier de f s'écrit
$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}.$$
2. Pour $t=1$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\frac{\pi-1}{2}$.
3. Par la formule de Parseval on a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$ donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)^2}{4}dt=\frac{1}{6\pi}[-(\pi-t)^3]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14 Pour $\theta\in]0,\pi[$, calculer de deux manières la partie réelle de $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt$ afin d'en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}$.

<u>*Correction*</u> : D'une part $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt=\int_0^1\frac{\exp(i\theta)}{1-t\exp(i\theta)}dt=\int_0^1\frac{1}{\exp(-i\theta)-t}dt$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale.

• Ensuite,
$$\mathrm{Re}\int_0^1\frac{dt}{\exp(-i\theta)-t}=\mathrm{Re}\int_0^1\frac{\exp(-i\theta)-t}{|\exp(-i\theta)-t|^2}dt=\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t}{(\cos(\theta)-t)^2+\sin^2(\theta)}dt=-\ln(2\sin(\theta/2)).$$

• D'autre part $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{N}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt+\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt$

donc
$$\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt=\sum_{n=0}^{N}\frac{\exp(i(n+1)\theta)}{n+1}+\varepsilon_N$$
avec $\displaystyle|\varepsilon_N|=\left|\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}t^n\exp(i(n+1)\theta)dt\right|=\left|\int_0^1\frac{t^{N+1}\exp(i(N+2)\theta)}{1-t\exp(i\theta)}dt\right|\leq\int_0^1\frac{t^{N+1}}{m_\theta}dt=\frac{1}{m_\theta(N+2)}\underset{N\to 0}{\to}0$ où $m\theta=\min\{|1-t\exp(i\theta)|/t\in[0,1]\}>0$. Ainsi

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(i(n+1)\theta)}{n+1}$$

puis

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta)dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

et enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 15 α désigne un réel de l'intervalle $]0,\pi[$ et f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Étudier la série de Fourier de f ainsi que sa convergence.
2. Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$.
4. Justifier et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

Correction :

1. La fonction f est paire donc $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$. On obtient $a_0(f) = \dfrac{2\alpha}{\pi}$ et $a_n(f) = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. La série de Fourier est alors
$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)\cos(nt)}{n}.$$
En vertu du théorème de Dirichlet, celle-ci converge en tout point vers la régularisée de f car la fonction f est de classe C^1 par morceaux. Puisque la régularisée de f n'est pas continue, cette convergence ne peut pas être uniforme.
2. La régularisée de f prend respectivement les valeurs 1 et 1/2 en 0 et α.
3. Par la formule de Parseval, on obtient
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = 2a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2$$
On en déduit après calculs
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}.$$
4. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. En découpant l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2}dt$$
et donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\alpha} \left[\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin(n^2\alpha)}{(n\alpha)^2}\right]dt.$$
On a $\varphi'(t) = \dfrac{2\sin(t)}{t^3}(t\cos(t) - \sin(t))$. Puisque φ' est continue et puisque
$$t^{3/2}\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\to} 0 \text{ et } t^{3/2}\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0,$$

il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall t \in]0, +\infty[$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{M}{t^{3/2}}$ et en particulier

$$\forall t \in [n\alpha, (n+1)\alpha],\ |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\left|\int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2}\right) dt\right| \leq \int_0^\alpha t \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}} dt = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}} M$$

puis

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha+t)}{(n\alpha+t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} dt\right)\right| \leq M\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = C\sqrt{\alpha}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi - \alpha}{2} + \bigcirc(\sqrt{\alpha})$ et quand $\alpha \to 0^+$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

1. On note g la fonction 2π-périodique définie par $g(t) = \pi - t$ sur $[0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de g.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt.$$
3. Établir que l'identité est encore vraie pour f seulement continue par morceaux.

Correction :

1. En représentant la fonction g, on peut voit qu'à la valeur en 0 $[2\pi]$ près, cette fonction est impaire. Par suite $a_n(g) = 0$ et $b_n(g) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi (\pi - t)\sin(nt) dt = \dfrac{2}{n}$.
2. Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f est développable en série de Fourier et donc
$$\forall t \in [0, 2\pi],\ f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)).$$
De plus, il y a convergence normale de cette série de Fourier. On a alors
$$\forall t \in [0, 2\pi],\ (\pi - t)f(t) = a_0(f)(\pi - t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\pi - t)(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$
avec convergence normale de la série de fonctions sous-jacente. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$ cette série de fonctions continues et ainsi obtenir
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t)dt = \frac{a_0(f)}{2\pi}(\pi - t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n(f)}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)\cos(nt)dt + \frac{b_n(f)}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)\sin(nt)dt\right).$$
En reconnaissant les coefficients de Fourier de g déjà calculés
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n(f)}{n}.$$
3. Par polarisation
$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi}(f(t) + g(t))^2 dt - \int_0^{2\pi}(f(t) - g(t))^2 dt\right).$$

Exercice 17 Soit $t \in]-1, 1[$. Former le développement en série de Fourier de

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2} &= \frac{a}{t - \exp(ix)} + \frac{\overline{a}}{t - \exp(-ix)} \text{ (avec } a = \frac{\sin(x)}{\exp(ix) - \exp(-ix)} = \frac{1}{2i}\text{)} \\
&= \operatorname{Re}\left(i\exp(-ix)\frac{1}{1 - t\exp(-ix)}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin((n+1)x).
\end{aligned}$$

La fonction étudiée étant impaire, $a_n(f) = 0$. Par convergence normale obtenue via $|t| < 1$, on a $b_{n+1}(f) = t^n$. Ainsi l'écriture précédente est le développement en série de Fourier de la fonction étudiée.

Exercice 18 Former le développement en série de Fourier de $x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$.

Correction :

$\exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\exp(inx)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cos(nx)$. Il reste à justifier que ce développement correspond au développement en série de Fourier de la fonction. Puisque la fonction est paire, $b_n(f) = 0$. On a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cos(nx)dx.$$

Par convergence normale de la série de fonctions engagée,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n!}\cos(nx)dx = 2.$$

On a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\cos(mx)\cos(nx)dx.$$

Par convergence normale de la série de fonctions engagée,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m!}\cos(mx)\cos(nx)dx.$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = 0$ si $m \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \pi$ si $m = n \neq 0$. Ainsi $a_n(f) = \frac{1}{n!}$.
Finalement, l'écriture

$$\exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cos(nx)$$

est bien le développement en série de Fourier de la fonction considérée.

Exercice 19 Pour $|z| < 1$, calculer $\int_0^{\pi}\frac{1 - z\cos(t)}{1 - 2z\cos(t) + z^2}\cos(nt)dt$.

Correction :

$\frac{1 - z\cos(t)}{1 - 2z\cos(t) + z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \exp(it)z} + \frac{1}{1 - \exp(-it)z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\exp(int) + \exp(-int))z^n$ puis

$$\frac{1 - z\cos(t)}{1 - 2z\cos(t) + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nt)z^n$$

avec convergence normale sur $[0, \pi]$. Par suite,

$$\int_0^{\pi}\frac{1 - z\cos(t)}{1 - 2z\cos(t) + z^2}\cos(nt) = \frac{\pi}{2}z^n$$

compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $t \mapsto \cos(kt)$.

Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Séries entières.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap14.pdf