TD4

Exercice 1. Développer en série de Fourier les fonctions T-périodiques suivantes:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 1 \quad \text{pour } 0 < x < T/2, \\ -1 \text{ pour } T/2 < x < T, \end{cases} \\
f(x) &= \begin{cases} 1 \text{ pour } -\tau/2 < x < \tau/2, \\ 0 \text{ pour } \tau/2 < x < T - \tau/2, \end{cases} \\
f(x) &= |x| \text{ pour } -T/2 < x < T/2, \\
f(x) &= x \text{ pour } 0 < x < T, \\
f(x) &= x^2 \text{ pour } -T/2 < x < T/2.
\end{aligned}
$$

Exercice 2. Démontrer l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Indication: utiliser l'égalité de Parseval pour la fonction $f(x) = x$, $0 < x < 2$, développée en série de cosinus.

Exercice 3. Considérons la fonction $f(x)$ de période 2 définie par

$$f(x) = x \qquad \text{pour } -1 < x \leq 1.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier.
2. En utilisant l'identité de Parseval pour cette série, calculer la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction

1. Considérons par exemple la première fonction,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < t < T/2, \\ -1 & \text{pour } T/2 < t < T, \end{cases}$$

et calculons ses coefficients de Fourier:

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt,$$

où $\omega = 2\pi/T$. Nous avons

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-in\omega t} dt + \int_{T/2}^{T} (-1) \cdot e^{-in\omega t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \left(\left. \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right|_0^{T/2} - \left. \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right|_{T/2}^{T} \right) = \frac{-e^{in\omega T/2} + 1 - e^{in\omega T/2} + e^{in\omega T}}{in\omega T}.$$

Comme $\omega T = 2\pi$ et $e^{i\pi n} = (-1)^n$, on obtient

$$c_n(f) = \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{i\pi n} & \text{pour } n = 2k+1, \\ 0 & \text{pour } n = 2k. \end{cases}$$

Donc la série de Fourier de f s'écrit sous la forme

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} \, e^{in\omega t} = \left(\begin{array}{c} \text{c'est déjà une reponse acceptable,} \\ \text{mais on va la simplifier encore un peu} \end{array} \right) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{i\pi(2k+1)} \, e^{i(2k+1)\omega t} = (\text{vérifiez!}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2k+1)} \left(e^{i(2k+1)\omega t} - e^{-i(2k+1)\omega t} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\omega t.$$

2. Nous considérons ici une fonction $f(t)$ de période $T = 4$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \le t \le 2, \\ -t & \text{pour } -2 \le t \le 0. \end{cases}$$

Calculons ses coefficients de Fourier:

$$c_n(f) = (\text{comme } T = 4 \text{ et alors } \omega = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(t) e^{-in\pi t/2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 t e^{-in\pi t/2} dt + \int_{-2}^{0} (-t) \cdot e^{-in\pi t/2} dt \right) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 n^2} \left[1 - (-1)^n \right] & \text{pour } n \neq 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

En particulier,

$$c_n(f) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} & \text{pour } n = 2k+1, \\ 0 & \text{pour } n = 2k, k \neq 0, \\ 1 & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

L'égalité de Parseval s'écrit sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt. \tag{1}$$

Dans notre cas, la partie gauche de (1) est donnée par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} = 1 + \frac{32}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Dans la partie droite de (1), on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

Comparaison des deux permet d'écrire

$$\frac{32}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{3} \implies S_{impaires} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

La somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ peut être exprimée en fonction de $S_{impaires}$: en transformant

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4} + S_{impaires} = \frac{S}{16} + S_{impaires},$$

on trouve

$$\frac{15}{16}S = S_{impaires} \implies S = \frac{16}{15}S_{impaires} = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$