Séries de Fourier

Rappels de cours et exercices

Par

Osmanov Hamid Ibrahim[1] et Boudref Mohamed Ahmed[2]

[1]Université de Boumerdes, 3500, Algérie [2] Université de Béjaia, 0600, Algérie

2015

AVANT-PROPOS

Dans cet ouvrage auteurs se sont limités à un strict minimum dans leur exposé. Ce cours est articulé sur deux points : le rappel de cours et les exercices.
Concernant le cours les auteurs exposent la théorie des séries de Fourier, commençant par donner la notion des séries trigonométriques, puis les séries de Fourier pour des fonctions données dans divers formes d'intervalles ainsi que les séries de Fourier de Fourier complexes.
La deuxième partie est consacrée aux énoncés des exercices, ces derniers sont variés et divers suivant le plan du cours. Cette partie contient aussi les réponses aux exercices proposés et des corrigés détalés de certains exercices donnés à titre d'exemple.
Cet ouvrage est destiné aux étudiants des facultés de mathématiques et de physiques.

Les auteurs tiennent à exprimer leurs profondes reconnaissances à tous ceux qui ont donné du l'aide pour la préparation de ce livre.

Rappels de Cours : ***Séries de Fourier***

1. Développement d'une fonction donnée en une série trigonométrique :

Définition. On appelle série trigonométrique une série de la forme

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin x \qquad (01)$$

où $a_0, a_n, b_n \ (n=1,2,...)$ sont des constants.
On pose le problème suivant : trouver si cela possible, des coefficients $a_0, a_n, b_n \ (n=1,2,...)$ telles que la série (01) soit convergent et que sa somme soit égale à la fonction périodique donnée $f(x)$ de période 2π. La suite de fonctions

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \qquad (02)$$

est appelée système de fonctions trigonométriques .On peut démontrer que l'intégrale du produit de deux fonctions quelconques différentes de la famille (02) sur un intervalle arbitraire de longueur 2π est nulle. Cette propriété du système (02) est appelée habituellement propriété d'orthogonalité de la famille (02) sur l'intervalle indiqué. Calculons maintenant les intégrales du produit de deux fonctions de la famille (02) sur un intervalle quelconque dont la longueur est égale à 2π , par exemple $]a, a+2\pi[$. On a

$$\int_a^{a+2\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_a^{a+2\pi} = \frac{1}{k}(\sin(ka+2\pi k)-\sin ka) = 0 \qquad (03),$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx\Big|_a^{a+2\pi} = -\frac{1}{k}(\cos(ka+2\pi k)-\cos ka) = 0 \qquad (04).$$

Pour calculer les intégrales

$$\int_a^{a+2\pi} \sin kx \cos mx dx, \quad \int_a^{a+2\pi} \cos kx \cos mx dx, \quad \int_a^{a+2\pi} \sin kx \sin mx dx$$

nous utilisons les formules trigonométriques suivantes :

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}\left[\sin(k+m)x+\sin(k-m)x\right],$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-m)x-\cos(k+m)x\right],$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-m)x+\cos(k+m)x\right]$$

Ayant en vu des formules (03), (04) il est facile de démontrer que

$$\int_a^{a+2\pi} \sin kx \cos mx dx = 0, \quad \int_a^{a+2\pi} \sin kx \sin mx dx = 0, \quad \int_a^{a+2\pi} \cos kx \cos mx dx = 0 \text{ si } k \neq m \qquad (05).$$

On calcule maintenant les intégrales du carré des fonctions de la famille (02).
Pour la première de ces fonctions cette intégrale est égale à 2π. Calculons les autres.

On a

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2 kxdx = \int_a^{a+2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2k}\sin 2kx)\Big|_a^{a+2\pi} = \pi \qquad (06)$$

D'une manière analogue on démontre que

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2 kxdxdx = \pi \quad (k \geq 1) \quad (07).$$

En prenant $a = -\pi$, on trouve l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Supposons maintenant que une fonction $f(x)$ soit définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et égale sur cet intervalle à la somme de la série (01), c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (08).$$

Supposons que l'intégrale de la fonction du premier membre de cette égalité soit égale à la somme des intégrales des termes de la série (08). Ceci est possible si la série (08) est majorable sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Supposons que la série numérique

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$$

soit convergente.

Dans ce cas la série (08) est majorée par la série numérique convergente sur $]-\pi, \pi[$.

D'où d'après le théorème de Weierstrass, on peut intégrer terme à terme la série (08) sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$. On obtient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx).$$

En tenant compte les formules (03) et (04)
on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0.\pi \text{ et } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (09).$$

Pour calculer les coefficients a_k, b_k multiplions les deux parties de (IV.08) respectivement par $\cos nx$ et $\sin nx$, puis intégrons terme à terme les séries obtenues.(Intégration terme à terme est justifié, car les fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$ sont bornées). Alors on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kxdx)$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kxdx).$$

En vertu des égalités (03), (04), (05), (06), (07) d'où on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \pi a_n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \pi b_n.$$

De cette façon nous avons déterminé les coefficients a_n, b_n par les formules suivantes :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (10), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (11).$$

Définition. Les coefficients définies par les formules (09), (10), (11) sont appelés coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ et la série (08) formée avec ces coefficients est la série de Fourier de $f(x)$.

L'opération du développement de la fonction donnée $f(x)$ en série de Fourier s'appelle analyse harmonique.

Notons que si la fonction $f(x)$ est absolument intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$, alors les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ existent et on peut écrire le développement formel suivant $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx+b_k \sin kx\right)$.

Retournons maintenant au problème posé au début de ce paragraphe : Quelle sont les propriétés que doit posséder la fonction $f(x)$ pour que sa série de Fourier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de la fonction aux points considérés ? Pour montrer que la série de Fourier de la fonction $f(x)$ converge et sa somme est égale à $f(x)$, il faut imposer certaines restrictions sur la fonction $f(x)$. On supposera tout d'abord que la fonction $f(x)$ soit continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, soit possède dans ce segment un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. En outre, on suppose que le segment $[-\pi,\pi]$ peut être divisé en un nombre finie des parties, telles que $f(x)$ soit monotone dans chacune de ces parties (en d'autre terme $f(x)$ est monotone par morceaux sur $[-\pi,\pi]$). Dans ces conditions envisagées, on dit que la fonction $f(x)$ vérifie la condition de Dirichlet sur le segment $[-\pi,\pi]$.

Théorème 1. (Théorème de Dirichlet). Si la fonction f définie sur le segment $[-\pi,\pi]$, satisfait sur ce segment aux conditions de Dirichlet, alors la série de Fourier de cette fonction converge sur tout segment $[-\pi,\pi]$ et la somme de cette série est :

1) $f(x)$ en tout point de continuité de f située à l'intérieur du segment,

2) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en tout point de discontinuité,

3) $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2}$ aux extrémités du segment, où $f(-\pi+0)$ est la limite à droite au point $x=-\pi$, $f(\pi-0)$ est la limite à gauche au point $x=\pi$.

Théorème 2. Soit f une fonction bornée périodique de période 2π n'ayant que des discontinuités de première espèce .Alors si f a en chaque point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, sa série de Fourier est partout convergente et a pour somme $f(x)$ en tout point de continuité et $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en tout point de discontinuité de f.

Théorème 3. 1) Sur chaque intervalle contenu dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$, où la fonction f vérifie les conditions de Dirichlet et est continu, la série de Fourier de f converge uniformément vers $f(x)$.

2) Si la fonction f vérifiant les conditions de Dirichlet est contenue sur tout l'intervalle $]-\pi,\pi[$ et si $f(-\pi+0)=f(\pi-0)$, alors la série de Fourier de f converge uniformément pour toutes les valeurs de x.

Notons que les termes de la série (08) sont des fonctions périodiques de période 2π. Pour cette raison si la série converge sur le segment $[-\pi,\pi]$, elle converge également pour toutes les valeurs réelles de x et la somme de la série reprend périodiquement , avec la période 2π, les valeurs qu'elle avait sur le segment $[-\pi,\pi]$.Ainsi si nous considérons la série de Fourier à l'extérieur du segment $[-\pi,\pi]$, nous devons supposer que la fonction f prolongée de ce segment est périodique , avec la période 2π.

2. Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

Il résulte de la définition des fonctions paires et impaires que si $h(x)$ est paire, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} h(x)dx \text{ et si } h(x) \text{ est impaire, alors } \int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0.$$

Soit $f(x)$ est une fonction paire sur $[-\pi,\pi]$. Alors $f(x)\sin nx$ est impaire, $f(x)\cos x$ est paire sur ce segment. D'où il découle que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0.$$

Donc la série de Fourier d'une fonction paire $f(x)$ sur $[-\pi,\pi]$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Lorsque $f(x)$ est une fonction impaire sur $[-\pi,\pi]$, alors on obtient

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Alors la série d'une fonction $f(x)$ impaire sur $[-\pi,\pi]$ s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx.$$

Considérons quelques exemples.

Exemple 1. Soit une fonction périodique $f(x)$ de période 2π,

définie comme suit : $f(x) = x,\ -\pi \le x \le \pi.$

Notons que la fonction donnée vérifie la condition du théorème de Dirichlet. Calculons les coefficients de Fourier de cette fonction. Puisque les fonctions $f(x)$ et $f(x)\cos nx$ sont des fonctions impaires, alors les coefficients $a_0 = 0, a_n = 0.$

Pour les coefficients b_n on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Donc on trouve la série de Fourier de la fonction donnée sous forme suivante.

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + \ldots\right).$$

Cette égalité est vraie partout sauf aux points de discontinuité $\pm\pi.$

Il est facile de voir qu'aux points de discontinuité $x = \pm\pi$ la somme de la série est égale à zéro.

Ainsi on peut écrire $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \begin{cases} x & \text{si } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{si } \quad x = \pm\pi. \end{cases}$

Exemple 2. Développer en série de Fourier la fonction définie par

$$f(x) = chx, -\pi \le x \le \pi$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = chx$.

On a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} chxdx = \frac{2shx}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2sh\pi}{\pi}. \qquad \int_0^{\pi} chx\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} chxd(\sin nx) = \frac{chx\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} shx\sin nxdx$$

=

$$= \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} shxd(\cos nx) = \frac{shx\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} chx\cos nxdx = \frac{(-1)^n sh\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} chx\cos nxdx.$$

D'où il vient que

$$\int_0^{\pi} chx\cos nxdx = \frac{(-1)^n sh\pi}{n^2+1}. \text{ Alors } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} chx\cos nxdx = \frac{2(-1)^n sh\pi}{\pi(n^2+1)}, n \in N.$$

Comme la fonction donnée est paire, alors $b_n = 0, n \in N.$ D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de la fonction f converge sur le segment $[-\pi, \pi]$ vers la fonction $f(x) = chx$. Alors on a

$$chx = \frac{sh\pi}{\pi}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+n^2}\cos nx), \quad -\pi \le x \le \pi.$$

3. Développement sur l'intervalle $]0,\pi[$:

Soit une fonction $f(x)$ arbitraire définie sur l'intervalle $]0,\pi[$. On peut développer cette fonction sur l'intervalle $]0,\pi[$ en série de la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, ne comportant que des cosinus, et une série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ ne comportant que des sinus. Pour cela, dans le premier cas les coefficients sont calculés par les formules (10) et dans le deuxième cas par les formules (11). A l'intérieur de l'intervalle $]0,\pi[$ les deux séries possèdent la même somme, qui est égale à $f(x)$ aux points de continuité et à $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ aux points de discontinuité de première espèce. Mais hors de l'intervalle $]0,\pi[$ elles représentent deux fonctions complètement différentes.

Sur l'intervalle $]-\pi,0[$ la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ représente une fonction obtenue par le prolongement pair de f et

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, représente respectivement une autre fonction obtenue par le prolongement impair de f, de $]0,\pi[$ sur $]-\pi,0[$.

De cette façon, pour le développement en cosinus $f(-0) = f(0),\ f(-\pi+0) = f(\pi-0)$ et pour le développement en sinus $f(-0) = -f(0),\ f(-\pi+0) = -f(\pi-0).$

Exemple 1. Développer la fonction $f(x) = x$, en cosinus sur l'intervalle $]0,\pi[$.

On prolonge la fonction $f(x)$ d'une façon paire sur $]-\pi,0[$ et puis hors de l'intervalle de $]-\pi,\pi[$ .La fonction prolongée vérifie la condition du théorème 2.

Donc on a

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx \text{ , où , } a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kxdx=\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}0 \quad si & k \text{ pair}\\ -\dfrac{4}{\pi k^2} \quad si & k \text{ impair}\end{cases}.$$

D'où $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+...+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+...).$

Sur l'intervalle $]-\pi,0[$ la somme de la série située dans le second membre est égale à $(-x)$, donc sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ elle coïncide avec la valeur absolue $|x|$:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+...+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+...),-\pi<x<\pi.$$

Exemple 2. Développer la fonction $f(x)=x^2$ en sinus sur l'intervalle $]0,\pi[$.

On prolonge la fonction $f(x)$ d'une façon impaire sur $]-\pi,0[$ et puis hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

La fonction prolongée vérifie la condition du théorème 2. Alors on a

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin kxdx=\frac{2}{\pi}(-\frac{x^2}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{\pi}x\cos kxdx)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^k}{k}+\frac{2}{k}(\frac{x}{k}\sin x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx)\right]=$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}\pi}{k}+\frac{4}{\pi k^2}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}=\frac{2(-1)^{k+1}\pi}{k}.\frac{4((-1)^k-1)}{\pi k^3}.$$

Ainsi on obtient

$$x^2=2\pi(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+...)-\frac{8}{\pi}(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+...),\ 0<x<\pi.$$

La somme de la série obtenue sur l'intervalle $]-\pi,0[$ est égale à $-x^2$, aux points $\pm\pi$ à zéro.

4. Série de Fourier des fonctions de période $2l$.

Dans le pratique on demande très souvent de développer une fonction donnée $f(x)$ périodique de période $2l$ définie dans un intervalle $]-l,l[$ en série trigonométrique de cosinus et de sinus. Ce problème se ramène au problème considéré par un changement de variable. Faisons le changement de variable par la formule $x=\frac{l}{\pi}t.$ Il est facile de voir que la fonction $g(t)=f(\frac{l}{\pi}t)$ est une fonction périodique de période 2π et on peut la développer en série de Fourier sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Alors

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)dt\ ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\cos ntdt\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\frac{l}{\pi}t)\sin ntdt\ .$$

On pose $x=\frac{l}{\pi}t$. D'où on trouve $t=\frac{\pi}{l}x$ et $dt=\frac{\pi}{l}dx,$ où $-l\le x\le l.$

Par conséquent on obtient

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\ \ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx\ ,b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}xdx\,.$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ sera sous forme suivante :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x).$$

Notons que le théorème de Dirichlet reste vrai également pour l'intervalle $]-l,l[$.

Si la fonction $f(x)$ est paire, alors

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx\,, b_n = 0, n \in N\ ,$$

et si la fonction $f(x)$ est impaire, alors

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ n\in N^*, a_n = 0, n\in N$$

Exemple. Développer en série de Fourier la fonction périodique de période $2l$ définie sur le segment $[-l,l]$ par l'égalité $f(x)=|x|$. Puisque la fonction donnée est paire, on a

$$b_k = 0,\ a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l xdx = l, a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos k\frac{\pi}{l}xdx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos kxdx =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2}(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx) = \frac{2l}{\pi^2}(0+\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi}) = \frac{2l((-1)^k-1)}{\pi^2k^2} = = \begin{cases} 0 & si\ \ k\ \text{pair} \\ -\dfrac{4l}{\pi^2k^2} & si\ \ k\ \text{impair.}\end{cases}$$

Alors

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}(\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + ... + \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x}{(2k+1)^2} + ...), -l<x<l\,.$$

Aux points $x = \pm\ l$ la somme de la série est $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

A l'extérieur du segment $[-\ l,l]$ la somme de la série, en vertu de la périodicité de f , s'obtient de ses valeurs aux points du segment $[-l,l]$.

5. Série de Fourier sous forme complexe.

Soit la série de Fourier de la fonction périodique $f(x)$ de période 2π,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

En appliquant les formules d'Euler

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\ \text{ et }\ \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

on trouve:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}) =$$

$= \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \dfrac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx})$. Posons $\dfrac{a_0}{2} = c_0, \dfrac{a_n-ib_n}{2} = c_n, \dfrac{a_n+ib_n}{2} = c_{-n}$.

D'où il vient que

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx},$$

qui est forme complexe de la série de Fourier.
Déterminons les coefficients c_n et $c_{-n.}$ on a

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx-i\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$ Donc on a trouvé que

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \text{ et } c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx.$$

On peut regrouper les formules pour les coefficients c_0, c_n et c_{-n} dans la même formule de façon suivante,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\ (n=0,\pm1,\pm2,...).$$

Les coefficients c_n et c_{-n} sont des coefficients complexes de Fourier de la fonction $f(x)$.
Lorsque f est périodique de période $2l$, alors sa série de Fourier sous forme complexe s'écrit,

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}},\ \text{où}\ c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\frac{-i\pi nx}{l}}dx,\ (n=0,\pm1,\pm2,...).$$

6. Recherche de la somme de certaines séries trigonométriques.

Parfois on arrive à trouver la somme d'une série trigonométrique convergente, en la ramenant à une série entière.
Considérons le procédé suivant. Lorsque les séries trigonométriques

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx \quad (12)$$

convergent sur le segment $[-\pi,\pi]$, sauf peut être un nombre fini des points, alors dans cet ensemble des valeurs de x, la série suivante

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+i\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx=f(z) \quad (13),\ \text{où}\ z=e^{ix},\ \text{converge aussi.}$$

Puisque la série (13) converge dans certaine points de circonférence $|z|=1$, alors d'après le théorème de d'Abel elle converge à l'intérieur du cercle et sa somme

$$f(z)=f(e^{ix})=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n,\ z=e^{ix}$$

est une fonction analytique dans le cercle ouvert de rayon 1.
Si

$$u(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \ \text{et}\ v(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx,\ \text{alors}\quad f(x)=u(x)+iv(x)\quad (14).$$

Lorsque on arrive à trouver la fonction $f(x)$, alors d'après la formule (14) on trouve les sommes des séries (12).

Exemple. Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

Pour calculer la somme de cette série, nous allons examiner parallèlement et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$. Toutes les deux séries considérées convergent sur la droite réelle.

Alors nous avons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ avec } z = e^{ix}.$$

D'où on trouve que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. De cette façon nous avons trouvé que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x))$$

D'où il découle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

EXERCICES ENONCES

1) Développer la fonction $f(x)$ donnée en série de Fourier et indiquer le segment sur lequel la somme de la série de Fourier est égale à $f(x)$ et trouver la somme de la série au point donné x_0.

1) $f(x)=x,\ -\pi \le x \le \pi,\ x_0=\pi.$

2) $f(x)=\begin{cases}1 & si, 0\le x\le \pi \\ 0 & si, -\pi \le x<0\end{cases}$, $x_0=0$.

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & si,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\pi}{4} & si,\ -\pi \le x<0\end{cases}$, $x_0=0.$

4) $f(x)=\begin{cases}a & si,\ 0\le x\le \pi \\ -a & si, -\pi \le x<0\end{cases}$, $x_0=0$.

5) $f(x)=\pi+x,\ -\pi \le x \le \pi,\ x_0=\pi.$

6) $f(x)=|x|,\ -\pi \le x \le \pi,\ x_0=\pi.$

En déduire les sommes des séries numériques $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

7) $f(x)=\begin{cases}0 & si,\ -\pi \le x<0 \\ x & si,\ 0\le x\le \pi\end{cases}$, $x_0=-\pi.$

8) $f(x)=\begin{cases}-2x & si,\ -\pi \le x\le 0 \\ 3x & si,\ 0<x\le \pi\end{cases}$, $x_0=\pi.$

9) Développer en série de Fourier la fonction $f(x)=signx,\ -\pi<x<\pi$ et en utilisant le développement obtenu, trouver la somme de la série de Leibniz $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2) Développer la fonction $f(x)$ en série de Fourier dans le segment indiqué dont la longueur est la période de la fonction donnée.

1) $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l \\ \dfrac{A}{2} & x=l \\ 0, & l<x<2l\end{cases}$, sur l'intervalle $]0,2l[$.

2) $f(x)=|x|$, sur l'intervalle $]-1,1[$.

3) $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0 \\ bx, & 0\le x<\pi\end{cases}$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

4) $f(x)=\begin{cases}a, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ b, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

5) $f(x)=x+signx$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

6) $f(x)=\pi^2-x^2$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

7) $f(x)=x^3$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

8) $f(x)=e^{ax},\ a\ne 0,$ sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

9) $f(x)=e^{2|x|}$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

10) $f(x)=\sin ax,\ a\notin Z$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

11) $f(x)=x\sin x$, sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

12) $f(x)=x\cos x$, sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

13) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0 \\ \sin x, & 0\le x\le\pi \end{cases}$, sur le segment $[-\pi,\pi]$.

14) Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$ périodique de période 2, si $f(x)=x,\ x\in\,]1,3[$.

15) Développer en série de Fourier la fonction $f(x)=x^2, -1\le x\le 1$ prolongée périodiquement avec la période 2.

16) Développer en série de Fourier la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 3-x, & 2\le x<3 \end{cases}$$

prolongée périodiquement avec la période 3 sur la droite réelle.

17) Développer en série de Fourier la fonction $f(x)=\pi-2x,\ 0<x\le\pi$, en prolongeant sur $]-\pi,0[$: i) d'une façon paire , ii) d'une façon impaire.

18) Développer en série de Fourier la fonction $f(x)$ donnée sur le segment $[0,\pi]$, en prolongeant sur $[-\pi,0]$ d'une façon paire, où

1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$.

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x),\ 0\le x\le\pi$.

19) Développer la fonction $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ en série de Fourier ne comportant que des cosinus.

20) Développer la fonction $f(x)=\cos 2x\ ,0\le x\le\pi$ en série de Fourier ne comportant que des sinus.

21) Développer en série de Fourier ne comportant que des cosinus sur l'intervalle $]0,\pi[$, la fonction suivante,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}.$$

22) Développer en série de Fourier ne comportant que des sinus sur l'intervalle $]0,\pi[$, la fonction suivante,

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}.$$

23) Développer en série de Fourier ne comportant que des cosinus la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases},$$

sur le segment $[0,2]$.

24) Développement la fonction $f(x)=x^2$ en série de Fourier :

1) Sur le segment $[-\pi,\pi]$ suivant des cosinus.

2) Sur l'intervalle $]0,\pi[$ suivant des sinus.

3) Sur l'intervalle $]0,2\pi[$ suivant des sinus et des cosinus.

En utilisant ces développements, trouver les sommes des séries suivantes :

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\quad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

25) Développer la fonction $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$, $0\le x\le 1$ en série de Fourier

i) suivant des cosinus,
ii) suivant des sinus.

26) Développer en série de Fourier suivant des sinus la fonction $f(x)=x\sin x$, $0\le x\le \pi$.

27) Démontrer que

$$\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\ 0\le x\le \pi.$$

(Indication. Utiliser les résultats des exercices 19) et 24).

28) Développer en série de Fourier suivant des cosinus la fonction $f(x)=e^x$ sur l'intervalle $]0,\log 2[$.

29) Développer en série de Fourier suivant des sinus la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}.$$

30) Trouver la formule complexe de la série de Fourier de la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le \pi \\ -1, & \pi<x\le 2\pi \end{cases}.$$

31) Développer en série de Fourier sous forme complexe la fonction périodique de période 2π, $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$, $f(\pi)=ch\pi$.

32) Développer en série de Fourier sous forme complexe la fonction périodique de période 3,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & 1<x<3 \end{cases},\quad f(0)=f(1)=\frac{1}{2}.$$

33) Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x)=x$ sur $[0,\pi]$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver la série de Fourier de f.

III) En déduire les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

34) Soit la fonction impaire de période 2π définie par $f(x)=x$ sur $[0,\pi[$ et $f(\pi)=0$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver la série de Fourier de f.

III) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

35) Soit la fonction impaire de période 2π définie par $f(x)=x^2$ sur $[0,\pi[$ et $f(\pi)=0$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver le développement en série de Fourier de f.

III) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

36) Soit la fonction impaire de période 2π définie par $f(x)=x^3$ sur $[0,\pi]$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver le développement en série de Fourier de f.

37) 1) Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x)=\cos^3 x$ sur $[0,\pi]$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver le développement en série de Fourier de f.

2) Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x)=\left|\cos^3 x\right|$ sur $[0,\pi]$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver le développement en série de Fourier de f.

III) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$.

3) Soit la fonction impaire de période 2π définie par $f(x)=\cos^3 x$ sur $[0,\pi]$ et $f(0)=f(\pi)=0$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

II) Trouver le développement en série de Fourier de f.

III) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-9}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}$.

38) 1) Donner la série de Fourier de la fonction impaire f, 2π-périodique définie par $f(x)=x(\pi-x),\ \ x\in[0,\pi]$.

En déduire les sommes des séries

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$.

2) Donner la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par

$f(x)=\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi,\ f(\pi)=0.$

En déduire les sommes des séries

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

3) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie sur $]0,\pi[$ par $f(x)=e^{iax}, a\notin Z$.

En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$.

4) Déterminer la série de Fourier de f définie sur R par $f(x)=\left|\sin x\right|$.

En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

5) Déterminer la série de Fourier de f définie sur R par $f(x)=\left|\sin^3 x\right|$.

6) Déterminer la série de Fourier de f définie par

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ 2\pi-x & \pi<x<2\pi \end{cases}.$$

7) Déterminer la série de Fourier de f définie par

$f(x)=\cos kx$, $-\pi<x<\pi$, $(k\notin Z)$.

En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\frac{1}{2k^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-k^2}\ \text{ et }\ \frac{1}{k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n^2-k^2}.$$

8) Pour chaque fonction donnée, trouver la série cosinus et la série sinus :

a) $f(x)=x, 0<x<\pi.$

b) $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\dfrac{\pi}{8} \\ \dfrac{\pi}{4}-x & \dfrac{\pi}{8}<x<\dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$

c) $f(x)=x^2,\ 0<x<l$.

d) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{l}, 0<x<l.$

e) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{l},\ 0<x<l.$

9) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=x(\pi^2-x^2)$.

En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

10) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie sur $]0,\pi[$ par $f(x)=e^{ax}(a$ réel non nul), et paire.

11) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie sur $]0,2\pi[$ par $f(x)=e^{ax}(a$ réel non nul).

12) Développer la fonction $f(x)=\dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}, |a|<1, -\pi\le x\le\pi$, en série de Fourier.

13) Développer la fonction périodique non bornée

$f(x)=\log\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|\ (x\neq 2k\pi)$, en série de Fourier.

4) Trouver les sommes des séries trigonométriques suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}.$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}.$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos 2nx}{(2n)!}.$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin 2nx}{(2n)!}.$

7) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}.$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$

9) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\cos nx.$

12) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}.$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}.$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}.$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}.$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{n}.$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}.$

REPONSES AUX EXERCICES

1)

1) $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, -\pi<x<\pi; 0.$

2) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, 0<|x|<\pi; \frac{1}{2}.$

3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, 0<|x|<\pi; 0.$

4) $f(x)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, 0<|x|<\pi; 0.$

5) $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, -\pi<x<\pi; \pi.$

6) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, -\pi\le x\le\pi; \pi.$

7) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}), -\pi<x<\pi; \frac{\pi}{2}.$

8) $f(x)=\frac{5\pi}{4}-5\sum_{n=1}^{\infty}((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}), -\pi<x<\pi; \frac{5\pi}{2}.$

9) $signx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$

2)

1) $\frac{A}{2}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x.$

2) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

3) $\frac{(b-a)\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}((b-a)(1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n(a+b)\frac{\sin nx}{n})$

4) $\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{2n-1}.$

5) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}(1+\pi)}{n}\sin nx.$

6) $\frac{3}{2}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n})\sin nx.$

8) $\frac{2}{\pi}sha\pi(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+b^2}(a\cos nx-b\sin nx)).$

9) $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{n^2+4}\cos nx.$

10) $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2},-\pi<x<\pi.$

11) $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$

12) $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

13) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$

14) $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin\pi nx.$

15) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx.$

16) $\frac{3}{2}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{3}\cos\frac{2\pi nx}{3}.$

17) 1) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, 2) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}.$

18) 1) $\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-1)\cos nx$, 2) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

19) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

20) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}.$

21) $\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{4}\cos nx.$

22) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx.$

23) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$

24) 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{(2n-1)^2},$

2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\sin nx.$

3) $\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{\cos nx}{n^2}-\dfrac{\pi\sin nx}{n})$, $S_1=\dfrac{\pi^2}{6}$, $S_2=\dfrac{\pi^2}{12}$, $S_3=\dfrac{\pi^2}{8}$.

25) 1) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi nx}{n^2}$, 2) $\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}((1+\dfrac{4}{\pi^2(2n-1)^2})\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}-\dfrac{\sin 2\pi nx}{2n})$.

26) $\dfrac{\pi}{2}\sin x-\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

28) $\dfrac{1}{\log 2}+2\log 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cos\pi n-1}{\log^2 2+n^2\pi^2}.\cos\dfrac{\pi nx}{\log 2}.$

29) $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{n}\sin nx.$

30) $f(x)=-\dfrac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}.$

31) $f(x)=\dfrac{sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}.$

32) $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-e^{\frac{2\pi ni}{3}}}{n}e^{\frac{2\pi nxi}{3}}\ (n\neq 0)$.

33) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$, $f(0)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

et $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

34) $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$ Pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, $\sin n\dfrac{\pi}{2}=\begin{cases}0 & si\ \ n=2p\\(-1)^p & \sin=2p+1.\end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2}=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}.$ D'où il découle que $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}=\dfrac{\pi}{4}.$

35) $f(x)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\dfrac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^3}\sin nx=$

$=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}.$ Donc $\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}=\dfrac{\pi^2}{32}.$

37) $f(x)=\dfrac{8}{3\pi}+\dfrac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos 2nx,\ \ 0<x<\pi.$ Donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}=\dfrac{3\pi-8}{72}.$

38) 1) $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x,\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^6}=\dfrac{\pi^6}{60},\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{64}{63}(1+\dfrac{\pi^6}{60}).$

2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

3) $f(x)=\dfrac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a-n}e^{inx}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^2-n^2}=(\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}+\dfrac{1}{a})\dfrac{1}{2a}$.

4) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$ $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n^2-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}.$

5) $f(x)=\frac{4}{3\pi}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}=\frac{3\pi-4}{72}$.

6) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

7) $f(x)=\frac{2k\sin\pi k}{\pi}\left(\frac{1}{2k^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-k^2}\right)$, donc $\frac{1}{2k^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-k^2}=\frac{\pi}{2k\sin\pi k}$,

et $\frac{1}{k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n^2-k^2}=\pi\,\mathrm{ct}\,g\pi k$.

8) a) $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ et $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$.

b) $f(x)=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(16n-8)x}{(2n-1)^2}$ et $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(8n-4)x}{(2n-1)^2}$.

c) $f(x)=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(16n-8)x}{(2n-1)^2}$ et $f(x)=\frac{l^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{2n-1}-\frac{8}{(2n-1)^3\pi}\right\}\sin\frac{(2n-1)x}{l}-\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{l}$.

d) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi x}{l}}{4n^2-1}$ et $f(x)=\sin\frac{\pi x}{l}$.

e) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{l}$ et $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin\frac{2\pi nx}{l}$.

9) $12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$.

10) $\frac{2a}{\pi}\left(\frac{e^{a\pi}-1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos nx\right)$.

11) $\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right)$.

12) $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\sin nx$.

13) $-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

3)

1) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$, 2) $e^{\cos x}\sin(\sin x)$, 3) $\sin(\cos x)ch(\sin x)$, 4) $\cos(\cos x)sh(\sin x)$,

5) $\cos(\cos x)ch(\sin x)$, 6) $\sin(\cos x)sh(\sin x)$, 7) $(1+\cos x)\log(2\cos\frac{x}{2})+\frac{1}{2}x\sin x$,

8) $\frac{1}{2}x(1+\cos x)-\sin x\log(2\cos\frac{x}{2})$, 9) $\frac{1}{2}(1-x\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$,

10) $\sin x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{1}{4}\sin x$, 11) $\cos x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x$,

12) $\frac{1}{2}(x\cos x+\frac{1}{2}\sin x)$, 13) $(\cos x+\cos 2x)\log(2\cos\frac{x}{2})+\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x)-\cos x$,

14) $(\sin x+\sin 2x)\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x)-\sin x$,

15) $\frac{1}{2a^2}(\pi - x - \pi chax + \pi ctha\pi.shax)$, 16) $\frac{1}{2a^2}(\frac{\pi shax}{sha\pi} - x)$,

17) $\cos x \log(2\cos x) + x\sin x$, $si\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x \log(2|\cos x|) + (x-\pi)\sin x$, $si\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi$,

18) $\frac{\pi}{8}x(\pi - x)$, 19) $\frac{\pi}{4}\ si\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}\ si\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi$, 20) $\frac{1}{4}\log tg^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$.

21) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \log(2\cos x) + x\sin x)$, $si\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}$,

$-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\cos x \log(2|\cos x|) + (x-\pi)\sin x)$, $si\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi$.

CORRIGES DETAILLES DE CERTAINS EXERCICES.

1)

2) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \pi\\ 0, & -\pi\le x<0\end{cases}$, $x_0=0.$

La fonction $f(x)$ est monotone par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, admet un seul point de discontinuité de première espèce $x_0=0$. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est convergente sur $[-\pi,\pi]$. Calculons les coefficients de Fourier de f .

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0\ .$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1)==\begin{cases}0, & \text{si } n=2k\\ \dfrac{2}{\pi(2k+1)}, & \text{si } n=2k+1\end{cases}.$$

Alors, on a

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x,\ \forall x\in\left]-\pi,0\right[\cup\left]0,\pi\right[.$$

La somme de la série au point $x_0=0$ est $\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Aux extrémités de l'intervalle c'est-à-dire aux points $x=-\pi, x=\pi$ la somme de la série est

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

5) $f(x)=\pi+x,\ -\pi<x<\pi,\ x_0=\pi.$

La fonction f est monotone et continue sur $[-\pi,\pi]$. D'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge partout sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ vers la fonction f .

Calculons les coefficients de Fourier de f .

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}(\pi x+\frac{x^2}{2})\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{pmatrix}u=\pi+x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\pi+x}{n}.\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)==\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=0$$

En appliquant une intégration par parties, on calcule d'une manière analogue les coefficients b_n.

On a

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nxdx=\begin{pmatrix}u=\pi+x & du=dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=-\frac{\pi+x}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Alors on obtient la série suivante pour la fonction donnée

$$f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \forall x\in\left]-\pi,\pi\right[,\ f(\pi)=\pi\ .$$

8) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi<x\le 0\\ 3x, & 0<x\le\pi\end{cases}.$

La fonction $f(x)$ est monotone par morceaux et continue sur l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right[$. Alors d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge partout sur $\left]-\pi,\pi\right[$ vers la fonction $f(x)$. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction donnée.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3xdx=\frac{5\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3x\cos nxdx\ .$$

En appliquant la méthode d'intégration par parties on trouve :

$$a_n=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)+\frac{3}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{3}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)+\frac{3}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=$$

$$=-\frac{5}{\pi n^2}+\frac{5(-1)^n}{\pi n^2}=\frac{5}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{-10}{\pi(2k+1)^2} & n=2k+1\end{cases}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}3x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Alors, on obtient

$$f(x)=\frac{5\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(5(1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right),\ -\pi<x<\pi\ ,$$

$$f(\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{2\pi+3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}.$$

2)

2) $f(x)=|x|$ sur $[-1,1]$.

f est monotone par morceaux et continue sur $[-1,1]$. Alors d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$ vers la fonction f.

Calculons les coefficients de Fourier. Puisque la fonction donnée est paire sur $[-1,1]$, les coefficients $b_n=0$. La période de la fonction est $2l=2$. D'où $l=1$. Dans ce cas la série de Fourier de la fonction s'écrit comme suit

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\ ,\text{ où}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ , \ n = 0,1,2,...,n,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ , \ n = 1,2,...,n,...$$

On a

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|\,dx = \int_0^1 xdx = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx = 2\left(\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx\right) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.$$

Alors, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}, \ -1 < x < 1.$$

Aux points $x = \pm 1$, la somme de la série est $\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2} = 1.$

En cas particulière, pour $x = 0$ on trouve $0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

D'où il vient que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

6) $f(x) = \pi^2 - x^2, \ -\pi < x < \pi.$

La fonction est monotone par morceaux et continue sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Alors la série de Fourier de f converge partout sur $]-\pi,\pi[$ vers la fonction f . On calcule les coefficients de Fourier.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{2}{\pi}(\pi^2 x - \frac{x^3}{3})\bigg|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx = = \begin{pmatrix} \pi^2 - x^2 = u\,, & du = -2xdx \\ \cos nxdx = dv\,, & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((\pi^2 - x^2)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right) = \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

$b_n = 0$, car la fonction donnée est paire.

Alors la série de Fourier de la fonction donnée est sous forme suivante :

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, -\pi < x < \pi.$$

Pour $x=0$, on obtient $\pi^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$ D'où il vient que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

8) $f(x)=e^{ax}, a\neq 0, -\pi<x<\pi.$

La fonction donnée est monotone, continue sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Alors la série de Fourier de f converge partout sur $]-\pi,\pi[$ vers la fonction f.

Calculons les coefficients de Fourier de f.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}dx=\frac{1}{\pi a}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}{\pi a}=\frac{2}{\pi a}sh\pi a.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=\begin{pmatrix}\cos nx=u, & du=-n\sin nxdx\\ dv=e^{ax}dx, & v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{pmatrix}=$$

$$==\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{ax}\cos nx}{a}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{a}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{a}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\right)+\frac{n}{a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx=\frac{2}{\pi a}\cos n\pi\, sha\pi+\frac{n}{a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi a}\cos n\pi\, sha\pi+\frac{n}{\pi a^2}(e^{ax}\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi})-\frac{n^2}{\pi a^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx\;=\frac{2}{\pi a}\cos n\pi\, sha\pi-\frac{n^2}{a^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx\;.$$

De cette façon on a trouvé que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=\frac{2}{\pi a}\cos n\pi\, sha\pi-\frac{n^2}{a^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx\;.$$

Il découle de la dernière égalité que

$(1+\frac{n^2}{a^2}).\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=\frac{2}{\pi a}\cos n\pi\, sha\pi$. D'où on trouve que

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=\frac{(-1)^n 2a}{\pi(a^2+n^2)}sh\pi a.$$

D'une manière analogue calculons les coefficients b_n.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx=\begin{pmatrix}\sin nx=u, & du=n\cos nxdx\\ dv=e^{ax}dx, & v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{ax}\sin nx}{a}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{a}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx\right)=-\frac{n}{\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nxdx=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos nx=u, & du=-n\sin nxdx\\ dv=e^{ax}dx, & v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{pmatrix}=-\frac{ne^{ax}\cos nx}{\pi a^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n^2}{\pi a^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx=$$

$$=-\frac{n\cos n\pi(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{\pi a^2}-\frac{n^2}{\pi a^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx\;.$$

On trouve

$$(1+\frac{n^2}{a^2})\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nxdx=-\frac{2n(-1)^n sha\pi}{\pi a^2}.$$

Ainsi on a trouvé que $b_n = -\dfrac{2n(-1)^n sha\pi}{\pi(n^2+a^2)}$.

Alors la série de Fourier de la fonction considéré est suivante :

$$f(x) = \frac{sha\pi}{\pi a} + \frac{2sha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx).$$

12) $f(x) = x\cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction $f(x)$ vérifie la condition du théorème de Dirichlet sur l'intervalle $]-l,l[$, $l = \dfrac{\pi}{2}$.

Alors la série de Fourier de f converge sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction $f(x)$. Les coefficients $a_0 = 0$, $a_n = 0$ car la fonction est impaire. On calcule les coefficients b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\sin(2n+1)x dx + \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\sin(2n-1)x dx .$$

Tout d'abord calculons la première intégrale

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n+1)x dx = \begin{pmatrix} x = u, & du = dx \\ dv = \sin(2n+1)x dx, & v = -\dfrac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(2n+1)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)x dx = \frac{1}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} .$$

D'une manière analogue on obtient

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\sin(2n-1)xdxdx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^2} .$$ Alors, on a

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^2} = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{-8n}{(4n^2-1)^2} = \frac{16}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}$$

Donc $f(x) = \dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

16) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 3-x, & 2\le x\le 3 \end{cases}$.

La longueur du segment $2l=3$ et $l=\frac{3}{2}$.

La fonction est monotone par morceaux et continue sue le segment $[0,3]$. Alors d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge partout sur $[0,3]$ vers la fonction f .

Calculons les coefficients de Fourier de f .

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 xdx+\int_1^2 dx+\int_2^3(3-x)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.x\right|_1^2+\left.(3x-\frac{x^2}{2})\right|_2^3\right)=\frac{4}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx+\frac{2}{3}\int_1^2\cos\frac{2\pi nx}{3}dx+$$

$$+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=I_1+I_2+I_3.$$

Calculons tour à tour les trois intégrales.

$$I_1=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\left(\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{2\pi nx}{3}dx & v=\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{3x}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\right|_0^1-\frac{3}{2\pi n}\int_0^1\sin\frac{2\pi nx}{3}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\left.(\frac{3}{2\pi n})^2\cos\frac{2\pi nx}{3}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}.$$

$$I_2=\frac{2}{3}\int_1^2\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{2}{3}.\frac{3}{2\pi n}\left.\sin\frac{2\pi nx}{3}\right|_1^2=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

$$I_3=\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\left(\begin{matrix} u=3-x & du=-dx \\ dv=\cos\frac{2\pi nx}{3}dx & v=\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{3(3-x)}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\right|_2^3+\frac{3}{2\pi n}\int_2^3\sin\frac{2\pi nx}{3}dx\right)=-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\left.\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}\right|_2^3=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{4\pi n}{3}.$$

En additionnant les I_1, I_2, I_3 on obtient,

$$a_n=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}+\frac{1}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\frac{3}{2\pi^2n^2}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{4\pi n}{3}=\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{4\pi n}{3}-$$

$$-\frac{6}{2\pi^2n^2}=\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\cos(2\pi n-\frac{2\pi n}{3})-\frac{6}{2\pi^2n^2}=$$

$$=\frac{6}{2\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{6}{2\pi^2n^2}=\frac{6}{2\pi^2n^2}(\cos\frac{2\pi n}{3}-1)=-\frac{6}{\pi^2n^2}\sin^2\frac{2\pi n}{3}.$$

Donc, $a_n = -\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin^2\frac{2\pi n}{3}$.

Calculons maintenant les coefficients b_n.

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \sin\frac{2\pi nx}{3}dx +$$

$$+\frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx = J_1 + J_2 + J_3.$$

Calculons consécutivement les trois intégrales.

$$J_1 = \frac{2}{3}\int_0^1 x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{2\pi nx}{3}dx & v = -\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{3x}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{2\pi n}\int_0^1 \cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3} + (\frac{3}{2\pi n})^2 \sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{2\pi^2 n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}.$$

$$J_2 = \frac{2}{3}\int_1^2 \sin\frac{2\pi nx}{3}dx = -\frac{2}{3}.\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_1^2 = -\frac{1}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3}.$$

$$J_3 = \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx = \begin{pmatrix} u = 3-x & du = -dx \\ dv = \sin\frac{2\pi nx}{3}dx & v = -\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{3(3-x)}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{2\pi n}\int_2^3 \cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right) = \frac{1}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} -$$

$$-\frac{3}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3 = -\frac{1}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{3}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}.$$

Alors, on a

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{1}{\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3} +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{3}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{3} = 0.$$

De cette façon on a trouvé que

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{3}\cos\frac{2\pi nx}{3},\ 0 < x < 3.$$

18) 1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$.

Tout d'abord on prolonge la fonction donnée d'une façon paire sur l'intervalle $[-\pi, 0]$. En résultat on trouve une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$. La fonction obtenue est monotone par morceaux et continue sur $[-\pi, \pi]$. D'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier converge par tout sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ vers la fonction considérée. Les coefficients $b_n = 0$, car la fonction est paire. Calculons les coefficients a_n.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}dx = \frac{3\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nxdx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nxdx\right) + \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1).$$

D'où il découle que

$$f(x) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)\cos nx.$$

24) Développer la fonction $f(x) = x^2$ en série de Fourier :

1) Sur le segment $[-\pi, \pi]$ suivant des cosinus.

2) Sur l'intervalle $]0, \pi[$ suivant des sinus.

3) Sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ suivant des sinus et cosinus.

4) En utilisant ces développements, déterminer les sommes des séries numériques suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}.$$

1) La fonction $f(x)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$ est monotone par morceaux et continue. D'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de f converge partout sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ vers la fonction $f(x)$. Calculons les coefficients de f . $b_n = 0$, car la fonction est paire sur $[-\pi, \pi]$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx = \begin{pmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos nxdx & v = \dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}(\frac{x^2\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix} = -\frac{4}{\pi n}(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx) = \frac{4\cos n\pi}{n^2} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nxdx = \frac{4\cos n\pi}{n^2} - \frac{4}{\pi n^3}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Alors, on a $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$

2) La fonction $f(x)$ est monotone et continue sur l'intervalle $]0, \pi[$. Alors la série de Fourier de f converge partout sur ce segment vers f . La série de Fourier suivant des sinus est

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,$ où $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx.$ On a

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx=\begin{pmatrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=\frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x^2\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nxdx\Big)=-\frac{2\pi\cos n\pi}{n}+\frac{4}{\pi n}\Big(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\Big)=-\frac{2\pi\cos n\pi}{n}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nxdx=$$

$$=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2((-1)^n-1)}{n^3}\right).$$

Alors la série de Fourier de f sur l'intervalle $]0,\pi[$ est :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2((-1)^n-1)}{n^3}\right)\sin nx.$$

3) Considérons maintenant le développement en série de Fourier de f sur le segment $[0,2\pi]$ suivant des sinus et des cosinus.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\begin{pmatrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{x^2\sin x}{n}\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx\Big)=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=\begin{pmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=-\frac{2}{\pi n}\Big(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx\Big)=\frac{4\cos 2n\pi}{n^2}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{4}{n^2}-\frac{4}{\pi n^3}\sin nx\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=\begin{pmatrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x^2\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx\Big)=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=\begin{pmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\Big(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\Big)=-\frac{4\pi}{n}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}-\frac{2}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}.$$

Alors, la série de Fourier de f sur le segment $[0,2\pi]$ est

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Si on pose dans le développement 1) $x=\pi$, on obtient

$\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. D'où il découle que $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

En posant dans le développement 3) $x=\pi$, on obtient

$\pi^2-\dfrac{4\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. D'où il découle que $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

35) Soit la fonction impaire de période 2π définie par $f(x)=x^2$ sur $]0,\pi[$ et $f(\pi)=0$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

II) Trouver le développement en série de Fourier de f .

III) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

I) La fonction f est monotone, continue sur l'intervalle $]0,\pi[$ .Donc f vérifie la condition du théorème de Dirichlet sur le l'intervalle $]0,\pi[$. On prolonge f d'une manière impaire sur l'intervalle voisin $]-\pi,0[$ et ensuite par un prolongement périodique de période 2π hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

II) On développe la fonction en série de Fourier ne comportant que sinus.
Puisque la fonction est impaire les coefficients $a_0=0, a_n=0,\ n\geq 1$.
On calcule maintenant les coefficients b_n .
On a

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx=\begin{pmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ \sin nxdx=dv, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{pmatrix}=\frac{2}{\pi}(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nxdx)=$$

$$=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{4}{\pi n}(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx)=$$

$$=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)\ .$$

D'où on obtient

$$x^2=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3},\ \ 0<x<\pi.$$

La somme de la série aux points $x=\pm\pi$ est égale à zéro, sur l'intervalle $[-\pi,0]$ à $-x^2$ et ensuite hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$, la somme de la série donne la fonction qui est obtenue par répétition périodique de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

III) Pour $x=\frac{\pi}{2}$, on obtient $\frac{\pi^2}{4}=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)^3}$.

Ayant en vu que $\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & si\ n=2k\\ (-1)^k & si\ n=2k+1\end{cases}$; $\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}=\cos p\pi=(-1)^p$, on trouve de la dernière relation que $\frac{\pi^2}{4}=2\pi\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}-\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Compte tenu que $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}=\frac{\pi}{4}$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\Rightarrow\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}=\frac{\pi^2}{32}.$$

37)

2) Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x)=\left|\cos^3 x\right|$ sur $]0,\pi[$.

I) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

II) Trouver le développement en série de Fourier de f .

III) En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$.

I) La fonction f est monotone par morceaux et continue sur $]0,\pi[$.Donc elle vérifie les conditions du théorème de Dirichlet. On la prolonge de façon paire sur l'intervalle voisin $]-\pi,0[$ et ensuite hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par un prolongement périodique de période 2π .La fonction ce décompose en série de Fourier ne contenant que cosinus.

II) Les coefficients $b_n=0,\ n=1,2,...$

Calculons les coefficients a_n , $n=0,1,2,...$

On a

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos^3 x\right|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 xdx$$

Ayant en vu que $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$, on obtient

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x)dx-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x)dx=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{6\pi}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{2\pi}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{6\pi}\sin 3x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{6\pi}+\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{6\pi}=\frac{8}{3\pi}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos^3 x\right|\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cos nxdx-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 x\cos nxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x)\cos nxdx-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nxdx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\cos nxdx-\frac{3}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cos nxdx-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 3x\cos nxdx=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(n+3)x+\cos(n-3)xdx-$$

$$-\frac{3}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)dx-\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos(n+3)x+\cos(n-3)x)dx=$$

$$=\frac{3}{4\pi}(\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{n+3}\sin(n+3)x+\frac{1}{n-3}\sin(n-3)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\frac{3}{4\pi}(\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{n+3}\sin(n+3)x+\frac{1}{n-3}\sin(n-3)x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{3}{4\pi}(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-1})+\frac{1}{4\pi}(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-3}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+3})-\frac{3}{4\pi}(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-1}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1})-\frac{1}{4\pi}(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+3}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-3})=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}-\frac{2(-1)^n}{4n^2-1}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{6(-1)^n}{4n^2-9}+\frac{6(-1)^n}{4n^2-9}\right)=\frac{3}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}+\frac{3}{\pi}\frac{(-1)^n}{4n^2-9},$$

Ainsi on a trouvé que

$$a_n=\frac{3}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2-9}-\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\right)=\frac{24(-1)^n}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)},\ \text{car}\ \cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n & si\ n=2k\\ 0 & si\ n=2k+1\end{cases}.$$

Donc

$$\left|\cos^3 x\right|=\frac{8}{3\pi}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}\cos 2nx,\ 0<x<\pi.$$

La somme de la série est $\left|\cos^3 x\right|$ sur l'intervalle $]-\pi,0[$, 1 aux points $x=\pm\pi$ et hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ donne la fonction qui est obtenue par la répétition périodique $\left|\cos^3 x\right|$ de l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

Remplaçons $x=0$ dans la série obtenue. On obtient

$$1=\frac{8}{3\pi}+\frac{24}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}.$$

D'où on trouve que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}=\frac{3\pi-8}{72}$.

38) 1) Donner la série de Fourier de la fonction impaire f 2π-périodique définie par

$$f(x)=x(\pi-x),\quad x\in[0,\pi].$$

En déduire les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$.

On prolonge f sur l'intervalle $[-\pi,0]$ d'une façon impaire et puis hors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par un prolongement périodique de période 2π. La fonction f est continue, monotone par morceaux, alors vérifie les conditions du théorème de Dirichlet. Elle se décompose en série de Fourier ne contenant que sinus. Les coefficients $a_n=0, n=0,1,2,...$ Calculons les coefficients $b_n, n=1,2,...$

On a

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)\sin nxdx=\begin{pmatrix}u=\pi x-x^2 & du=(\pi-2x)dx\\ \sin nxdx=dv & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{(\pi x-x^2)\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nxdx\right)=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nxdx=$$

$$=\begin{pmatrix}\pi-2x=u & du=-2dx\\ \cos nxdx=dv & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{pmatrix}=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{\pi-2x)\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nxdx=$$

$$=-\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi n^3}((-1)^{n+1}+1)=\begin{cases}0 & si\ n=2k\\ \frac{8}{\pi(2k+1)^3} & si\ n=2k+1\end{cases}.$$

D'après le théorème de Dirichlet

$$\forall x\in R,\ f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x.$$

En appliquant la relation de Parseval , $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)$ on trouve

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\pi - x)^2\, dx = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}.$$

D'où on trouve que $\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{16\pi^4}{15}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{60}$.

D'autre part on a

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^6} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$.

$(1-\frac{1}{64})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = 1 + \frac{\pi^6}{60}$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{64}{63}(1+\frac{\pi^6}{60})$.

2) Donner la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique définie par

$f(x) = \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, $f(\pi) = 0$.

En déduire les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

La fonction f est monotone et continue sur $]-\pi,\pi[$. Le théorème de Dirichlet est satisfait pour la fonction f . Puisque la fonction est impaire, alors tous les coefficients a_n son nuls.
Cherchons les coefficients, b_n $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Donc $\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$, $-\pi < x < \pi$. Aux points $x = \pm\pi$, la somme de la série est égale à zéro.
En prolongeant f d'une façon périodique en dehors de l'intervalle $]-\pi,\pi[$, on trouve que

$\forall x \in R$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. D'après la formule de Parseval on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$. D'où on obtient $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{12}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Alors

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = (1-\frac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}.\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Donc $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

5) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie sur R par $f(x) = \left|\sin^3 x\right|$.

f est une fonction paire , périodique de périodique de période 2π définie sur R .
Les coefficients $b_n = 0, n = 1, 2, ...$ On calcule les coefficients a_n , $n = 0, 1, 2, ...$

Il est facile de démontrer que $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$

On a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x)dx = \frac{2}{\pi}(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x)\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x)\cos nxdx = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 3x\cos nxdx =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)dx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+3)x - \sin(n-3)x)dx =$$

$$= \frac{3}{4\pi}(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1})\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4\pi}(\frac{\cos(n+3)x}{n+3} - \frac{\cos(n-3)x}{n-3})\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{4\pi}(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}) - \frac{1}{4\pi}(\frac{(-1)^{n+3}-1}{n+3} - \frac{(-1)^{n-3}-1}{n-3}) =$$

$$= -\frac{3((-1)^{n+1}-1))}{2\pi(n^2-1)} + \frac{3((-1)^{n+1}-1))}{2\pi(n^2-9)} = \frac{3((-1)^{n+1}-1))}{2\pi}(\frac{1}{n^2-9} - \frac{1}{n^2-1}) =$$

$$= \frac{12((-1)^{n+1}-1))}{\pi(n^2-1)(n^2-9)} = \begin{cases} 0 & si\ n \text{ est impaire} \\ \dfrac{24}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)} & \text{si n est paire} \end{cases}.$$

Alors, f est continue , périodique de période 2π et monotone par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.
De cette façon on trouve

$$\left|\sin^3 x\right| = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(4n^2-9)}, 0 < x < \pi.$$

12) Développer la fonction $f(x) = \dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x + a^2}, |a| < 1, -\pi \le x \le \pi.$

f est une fonction continue, périodique de période 2π.
Pour développer les fonctions pareille en série de Fourier,on transforme la fonction donnée à l'aide de la formule d'Euler.

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$. D'où $\sin x = \dfrac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}}, \cos x = \dfrac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}}$.

En posant $e^{ix} = z$, on obtient $\sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}, \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}.$

En remplaçant dans l'expression de la fonction donnée, on obtient

$$f(x) = \frac{a(z^2-1)}{2i(1-az)(z-a)} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-\frac{a}{z}}).$$

Puisque $|az| = \left|ae^{ix}\right| = |a| < 1$ et $\left|\frac{a}{z}\right| = \left|ae^{-ix}\right| = |a| < 1$, alors les fonctions $\dfrac{1}{1-az}$ et $\dfrac{1}{1-\frac{a}{z}}$ peuvent être

développé en série entière. Donc on trouve que

$$f(x) = \frac{1}{2i}(\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}) = \frac{1}{2i}(\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{inx} - \sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-inx}) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n \sin nx.$$

Ainsi on trouve que

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty}a^n \sin nx.$$

13) Développer la fonction périodique non bornée

$f(x)=\log\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ $(x\neq 2k\pi)$, en série de Fourier.

Posons $z=e^{ix}$, $0<x<\pi$. Alors on trouve

$$f(x)=\log\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\log(\sin\frac{x}{2})=\log\frac{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}=\log\frac{e^{ix}-1}{2ie^{i\frac{x}{2}}}=\log(e^{ix}-1)-\log 2-\log i-i\frac{x}{2}.$$

$\log i=\log|i|+i(\arg i+2k\pi)=i\frac{\pi}{2}$. On prend la branche principale.

Donc on a

$f(x)=\log e^{ix}(1-e^{-ix})-\log 2-i\frac{\pi}{2}-i\frac{x}{2}=ix+\log(1-e^{-ix})-\log 2-i\frac{\pi}{2}-i\frac{x}{2}=$

$=-\log 2+\log(1-\frac{1}{z})+i(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$.

D'autre part on a

$\log(1-\frac{1}{z})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-i\sin nx}{n}$. D'où il vient que

$$f(x)=-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}-i(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}).$$

Puisque $f(x)$ est une fonction réelle, on trouve l'expression suivante

$$\log\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

4)

Trouver les sommes des séries suivantes :

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}$ et 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}$.

Notons que les deux séries sont convergentes sur le segment $[-\pi,\pi]$. (Voir le théorème de Weierstrass).

D'où il découle que sur le segment $[-\pi,\pi]$ la série suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}+\ i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}$$

est aussi convergente.

Désignons la somme de cette série par $f(z)$ où $z=e^{ix}$.

En tenant compte de la formule d'Euler $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, on trouve

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}e^{i(2n-1)x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{i(\cos x+i\sin x)}-e^{i(\cos x-i\sin x)}}{2i}=\frac{e^{i\cos x}e^{-\sin x}-e^{i\cos x}e^{\sin x}}{2i}=$$

$$=\frac{(\cos(\cos x)+i\sin(\cos x))e^{-\sin x}-(\cos(\cos x)-i\sin(\cos x))e^{\sin x}}{2i}=$$

$$=\sin(\cos x)ch(\sin x)+i\cos(\cos x)sh(\sin x).$$

De cette façon on trouve que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}+\ i\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!} =$$
$$=\sin(\cos x)ch(\sin x)+i\cos(\cos x)sh(\sin x).$$

D'où il vient que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}=\sin(\cos x)ch(\sin x) \text{ et}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}=\cos(\cos x)sh(\sin x).$$

7) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ et 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

Les deux séries sont convergentes sur le segment $[-\pi,\pi]$.
D'où il vient que la série suivante est aussi convergente.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

Désignons la somme de cette série par $f(z)$, où $z=e^{-ix}$, $-\pi<x<\pi$.
On a

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx+i\sin nx}{n(n+1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{inx}}{n(n+1)}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n(n+1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n+1}.$$

On transforme la deuxième série de second membre de façon suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n+1}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n+1}}{n+1}=-\frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{n+1}}{n+1}+z-z\right)=1-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

De cette façon on a trouvé,

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}-1+\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}=$$
$$=\log(1+z)+\frac{1}{z}\log(1+z)=(1+\frac{1}{z})\log(1+z)=(1+\frac{1}{\cos x+i\sin x})(\log(1+\cos x+i\sin x))=$$
$$=(1+\cos x-i\sin x)(\log(2\cos\frac{x}{2})+iarctg(tg\,\frac{x}{2}))=\left((1+\cos x-i\sin x)(\log(2\cos\frac{x}{2})+i\,\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\left((1+\cos x)\log(2\cos\frac{x}{2})+\frac{x}{2}\sin x\right)+i\left(\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\log(2\cos\frac{x}{2})\right).$$

En égalant respectivement les parties réelles et parties imaginaires de deux fonctions égales, on obtient

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}=(1+\cos x)\log(2\cos\frac{x}{2})+\frac{x}{2}\sin x$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}=\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\log(2\cos\frac{x}{2}).$$

9) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$ et 10) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$

Les deux séries sont convergentes sur le segment $[-\pi,\pi]$. On a la même pour la série suivante.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}+i\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1}.$$

Désignons la somme de cette série par $f(z)$. Donc on a

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}+i\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx+i\sin nx}{n^2-1}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n^2-1},\text{ où } z=e^{ix},-\pi<x<\pi.$$

D'où on trouve,

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})z^n=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{n+1}}{n}-\frac{1}{2z}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{(n+1)}=$$

$$=\frac{z}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}+\frac{1}{2z}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}+z-\frac{z^2}{2})=$$

$$=\frac{z}{2}\log(1+z)\ -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}-\frac{z}{4}+\frac{1}{2}=\frac{z}{2}\log(1+z)-\frac{1}{2z}\log(1+z)-\frac{z}{4}+\frac{1}{2}=$$

$$=(\frac{z}{2}-\frac{1}{2z})\log(1+z)+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}=$$

$$=(\frac{\cos x+i\sin x}{2}-\frac{1}{2(\cos x+i\sin x)})\log(1+\cos x+i\sin x)+\frac{1}{2}-\frac{\cos x+i\sin x}{4}=$$

$$=(\frac{\cos x+i\sin x}{2}-\frac{\cos x-i\sin x}{2})(\log(2\cos\frac{x}{2})+i\frac{x}{2})+\frac{1}{2}-\frac{\cos x+i\sin x}{4}=$$

$$=i\sin x(\log(2\cos\frac{x}{2})+i\frac{x}{2})+\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{4}-i\frac{\sin x}{4}=-\frac{x}{2}\sin x+\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{4}+$$

$$+i(\sin x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{\sin x}{4}).$$

D'où on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}=-\frac{x}{2}\sin x+\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{4}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1}=\sin x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{\sin x}{4}.$$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\cos nx,$ 12) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx.$

Les deux séries données sont convergentes. Alors la série suivante est également convergente.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\cos nx+i\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx\ .$$

Désignons la somme de cette série par $f(z)$. Donc on a

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\cos nx+i\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx\,.$$

Transformons cette série de façon suivante,

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}(\cos nx+i\sin x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}e^{inx}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1})e^{inx}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-1}e^{inx}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}e^{inx}==\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-1}e^{inx}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}e^{inx}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{i(n+1)x}}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{i(n-1)x}}{n}=\frac{e^{ix}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}+\frac{e^{-ix}}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}=$$

$$=\frac{e^{ix}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}+\frac{e^{-ix}}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}-e^{ix}+\frac{1}{2}e^{2ix}\right\}=\frac{e^{ix}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}+$$

$$+\frac{e^{-ix}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{ix}=(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{ix}=$$

$$=\cos x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{ix}\text{ , avec } z=e^{ix}.$$

D'où il vient que

$$f(z)=\cos x\log(1+z)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{ix}=\cos x\log(1+\cos x+i\sin x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{ix}=$$

$$=\cos x\log(2\cos^2\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})-\frac{1}{2}+\frac{e^{ix}}{4}=\cos x(\log(2\cos\frac{x}{2})+\log e^{i\frac{x}{2}})-\frac{1}{2}+\frac{e^{ix}}{4}=$$

$$=\cos x\log(2\cos\frac{x}{2})+i\frac{x}{2}\cos x-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x+\frac{i}{4}\sin x=\cos x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x+$$

$$+i(\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{4}\sin x).$$

En égalant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\cos nx=\cos x\log(2\cos\frac{x}{2})-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x \quad\text{et}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx=\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{4}\sin x.$$

Références Bibliographiques

[1] B. M. Demidovitch, *Recueil de problèmes et d'exercices d'analyse mathématiques*. Ed. Mir Moscou, 1974.
[2] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures, tome III*. Ed. Mir Moscou, 1985.
[3] N. Piskonouv, *Calcul différentiel et intégral, tome II*. Ed. Mir Moscou, 1978.
[4] V. Chipatchev, *Mathématiques supérieures*. Ed. Mir Moscou, 1988.
[5] Murray R. Spiegel,*Fourier Analysis with applications to Boundary Value Problems. Schaum's Outline Series, by McGraw-Hill, 1974.*