EE - SERIES DE FOURIER : RESUME

On désigne par E l'espace des fonctions $2\pi-$ périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continues, sauf peut-être en un nombre fini de points par période où la fonction admet des limites à droite et à gauche (on ne distinguera pas deux fonctions égales sauf en un nombre fini de points par période).

L'espace vectoriel E est muni du produit scalaire

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

La norme associée étant

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\,.$$

CAS REEL

Le système $(1, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \dots, \sqrt{2}\cos(nt), \sqrt{2}\sin(nt), \dots)$ est un système orthonormal de E.

Si f appartient à E, on pose

$$a_0 = (f|1)$$

et, si $n > 0$

$$a_n = (f|\sqrt{2}\cos(nt)) \quad \text{et} \quad b_n = (f|\sqrt{2}\sin(nt))\,.$$

(**Coefficients de Fourier trigonométriques** de f).

Alors la série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sqrt{2}\cos(nt) + b_n\sqrt{2}\sin(nt))$$

converge dans E vers f pour la norme.

Cela veut dire que la somme

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\sqrt{2}\cos(nt) + b_n\sqrt{2}\sin(nt))\,,$$

qui est la projection orthogonale de f sur le sous-espace de dimension $2N+1$ engendré par le système $(1, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \dots, \sqrt{2}\cos(nt), \sqrt{2}\sin(nt)$, est telle que

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\| = 0\,.$$

On notera

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sqrt{2}\cos(nt) + b_n\sqrt{2}\sin(nt))$$

la série de Fourier de f.

(Ce n'est en général pas une égalité ponctuelle).

Egalité de Bessel-Parceval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \,.$$

Conséquence : les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ convergent vers 0.

Cas des fonctions paires ou impaires

Si f est paire,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \quad , \quad a_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad , \quad b_n = 0\,.$$

Si f est impaire

$$a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\,.$$

CAS COMPLEXE

La famille $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal. On pose

$$\alpha_n = (f|e^{int})\,.$$

(**Coefficients de Fourier exponentiels** de f).

La série de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$$

converge vers f pour la norme.

Cela veut dire que la somme

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{int}\,,$$

qui est la projection orthogonale de f sur le sous-espace de E de dimension $2N+1$ engendré par $(e^{int})_{-N\leq n\leq N}$, vérifie

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - s_N\| = 0\,.$$

Egalité de Bessel-Parceval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \, .$$

Donc (α_n) converge vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

Dans E, les deux familles $(1, \dots, \sqrt{2}\cos(Nt), \sqrt{2}\sin(Nt))$ et $(e^{int})_{-N\leq n\leq N}$ engendrent le même sous-espace, et donc si f est réelle, on a

$$S_N = s_N \, .$$

On a alors des relations entre les coefficients de Fourier trigonométriques et exponentiels de f :

$$\alpha_0 = a_0 \, ,$$

et si $n > 0$

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad \alpha_{-n} = \overline{\alpha_n} \, ,$$

ou encore

$$a_n = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\alpha_n \quad \text{et} \quad b_n = -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\alpha_n \, .$$

Théorèmes de convergence

1) Si f est continue en t et admet en t des dérivées à droite et à gauche, alors la série de Fourier converge (dans $\mathbb{C}$) vers $f(t)$.

2) Si f est de classe C^1 la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas

pour tout entier n

$$\alpha_n(f') = ni\alpha_n(f) \, ,$$

pour tout $n > 0$

$$a_n(f') = nb_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -na_n(f) \, ,$$

ainsi que

$$a_0(f') = 0 \, .$$