ED1 - Equation Différentielle

Zied AMMARI

9 janvier 2017

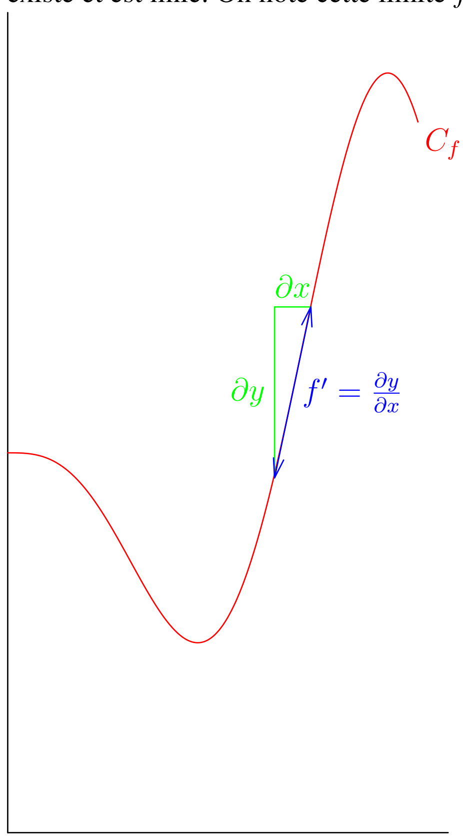
REMERCIEMENT : Un grand merci à Slim Benslema pour la rédaction soignée de ce texte.
Réalisé en LaTeXà partir du modèle Legrand Orange Book

Table des matières

1. Généralités

Rappel :

- Soient $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in]a;b[$ un réel. On dit que f est dérivable en x_0 si
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe et est finie. On note cette limite $f'(x_0)$.



- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est $C^n(I)$ si la n-ième dérivée de f existe et est continue sur I. On note sa n-ième dérivée $f^{(n)}$.

1.1 Equation différentielle

Exemple : Chute libre

L'accélération d'un objet de masse m en chute libre est donnée par $m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}_{exterieure} = m\overrightarrow{g}$. L'accélération est aussi la dérivée seconde de la distance : $\overrightarrow{a} = \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}(t)$. On a donc :

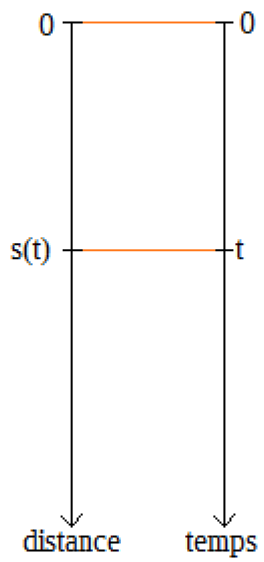


FIGURE 1.1 – chute libre

$$
\begin{aligned}
m\overrightarrow{a} &= m\overrightarrow{g} \\
m\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}(t) &= m\overrightarrow{g} \\
\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}(t) &= \overrightarrow{g}
\end{aligned}
$$

Une solution pour $d(t)$ est $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

Définition 1.1.1 On appelle équation différentielle de la variable x du n-ième ordre d'une fonction inconnue y une relation de la forme :

$$f(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0$$

■ **Exemple 1.1**
- $s'' = g$
  - s : fonction inconnue
  - équation du 2^{nd} ordre
- $y' + xy = e^x$
  - y : fonction inconnue
  - x : variable
  - équation du 1^{er} ordre
- $y''' + y = 0$
  - y : fonction inconnue
  - équation du 3^{eme} ordre

■

Définition 1.1.2 On appelle intégrale (ou solution) d'une équation différentielle $f(x,y,y',...,y^{[n)}) = 0$ sur l'intervalle I toute fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ tq $f(x,\varphi,\varphi',...,\varphi^{(n)}) = 0$.

■ **Exemple 1.2** $s''(t) = g$ a pour solution $\varphi(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_0$ où $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ ■

Définition 1.1.3 Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Définition 1.1.4
- L'équation différentielle $f(x,y,y',...,y^{(n)}) = 0$ est une équation différentielle implicite.
- L'équation différentielle $f(x,y,y',...,y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ est une équation différentielle explicite.

■ **Exemple 1.3** $y'tan(x) - y = 0$ est la forme implicite. $y' = \frac{y}{tan(x)}$ est la forme explicite. ■

Définition 1.1.5 On parle de problème (ou équation différentielle) aux conditions (ou valeurs) initiales lorsqu'on considère une équation différentielle :

$$\begin{cases} f(x,y,y',...,y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

1.2 Interprétation Géométrique

On considère l'équation différentielle $y' = f(x,y(x))$ où $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On a donc

$$y'(x_0) = f(x_0,y_0)$$

où $y_0 = y(x_0)$.

On peut alors construire les points en (x_0,y_0) et leurs tangentes à la courbe de y dont le coefficient directeur est $y'(x_0) = f(x_0,y_0)$

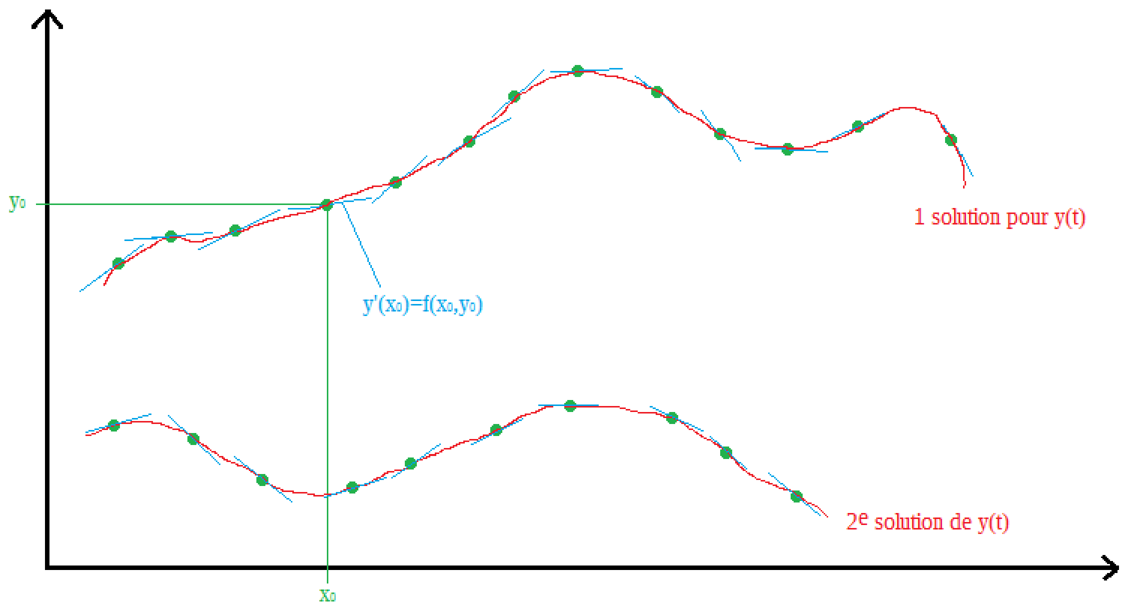


FIGURE 1.2 – Exemple de Construction

1.3 Equation différentielle du Premier Ordre

1.3.1 Equation du type $y' = f(x)$

Sans condition initiale

Soit $y'(t) = f(t)$. Donc,

$$\int y'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où $y(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c$ où $c \in \mathbb{R}$ (infinité de solutions).

Avec condition initiale

Proposition 1.3.1 Une équation différentielle définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où f est de classe C^0 admet une unique solution : $y(t) = y_0 + \int f(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve. **Existence :** Soit $\varphi(t) = y_0 + \int_{x0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

- $\varphi'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$
- $\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = y_0$

Unicité : Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions solutions de l'équation différentielle.

- On peut remarquer que

$$(\varphi_1 - \varphi_2)' = \varphi_1' - \varphi_2' = f - f = 0$$

Comme φ_1 et φ_2 sont C^1, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est aussi C^1. Donc $\varphi_1 - \varphi_2 = c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

- On peut aussi voir que

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(x_0) = \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

Donc $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, et $\varphi_1 = \varphi_2$.

■

1.3.2 Equation du type $y' = f(y)$

On considère l'équation $y' = f(y)$ en supposant que f garde un même signe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$. Si y est solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$, alors $\forall x \in I$,

$$y\prime(x) > 0$$

par hypothèse, donc y est strictement croissante sur I. Ainsi, $y: \ I \to f(I)$ est bijective et admet une réciproque y^{-1}.

On a aussi la formule :

$$\begin{aligned} & y^{-1} \circ y(x) = x \\ \Rightarrow & (y^{-1} \circ y(x))' = 1 \\ \Rightarrow & y'(x) * (y^{-1})'(y(x)) = 1 \\ \Rightarrow & (y^{-1})'(y(x)) = \frac{1}{y'(x)} \end{aligned}$$

En prenant $y(x) = t$, on a

$$(y^{-1})'(t) = \frac{1}{y'(y^{-1}(t))}$$

Mais y vérifie

$$y'(x) = f(y(x))$$

donc on a :

$$y'(y^{-1}(t)) = f(y(y^{-1}(t)) = f(t)$$

D'où

$$(y^{-1})'(t) = \frac{1}{f(t)}$$

et donc $y^{-1}(t) = \int \frac{1}{f(t)} dt$

Résoudre $y' = f(y)$

$y' = f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{d} = f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = x + c$

■ **Exemple 1.4** Soit $y' = 5y$.

$$\begin{aligned} y' = 5y \Leftrightarrow & \frac{dy}{dx} = 5y \\ \Leftrightarrow & \frac{dy}{y} = 5dx \\ \Leftrightarrow & \int \frac{dy}{y} = \int 5dx \\ \Leftrightarrow & ln(y) = 5x + c \\ \Leftrightarrow & y = e^{5x+c} = e^c e^{5x} \end{aligned}$$

■

1.4 Problème d'unicité

On peut trouver des équations différentielles où on n'a pas unicité des solutions même en fixant une condition initiale.

Exemple :

$y' = \sqrt{|y|}$

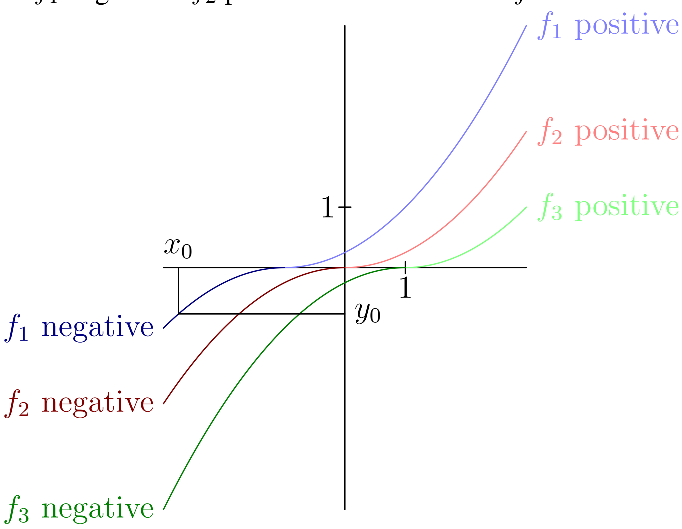
- Avec la condition (x_0, y_0) où $y_0 > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dt}{\sqrt{t}} = x - x_0 \\ &\Leftrightarrow [2\sqrt{t}]_{y_0}^{y(t)} = x - x_0 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y_0} = x - x_0 \\ &\Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{x - x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2 \end{aligned}$$

Ceci n'étant valable que si $\frac{x-x_0}{2} + \sqrt{y_0} > 0$, donc si $x > x_0 - 2\sqrt{y_0}$.

- Avec la condition (x_0, y_0) où $y_0 < 0$, on a de la même manière :
  $y(x) = -\left(\frac{x - x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2$
- 0 est aussi une solution particulière.

On peut donc construire une multitude de fonctions solutions de l'équation différentielle, en reliant f_1 négative à f_2 positive avec la fonction $f \equiv 0$



Ici, f_1 positive, f_2 positive et f_3 positive sont 3 solutions possibles.

1.5 Equation du 1^{er} ordre à variable séparable

Définition 1.5.1 On dit qu'une équation différentielle du 1^{er} ordre est à variable séparable si elle s'écrit

$$y' = f(x)g(y)$$

où $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^0(J, \mathbb{R})$

Théorème 1.5.1 On considère l'équation de la définition précédente. Pour toute condition initiale (x_0, y_0) où $g(y_0) \neq 0$, il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

défini sur un voisinage de x_0 par

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

Preuve. **Existence :** On pose $G(y) = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)}$ avec comme réciproque $G^{-1}(x) = \frac{1}{g(t)}$ qui garde un même signe sur un voisinage de x_0 comme g continue.

Alors $y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)$ est solution.

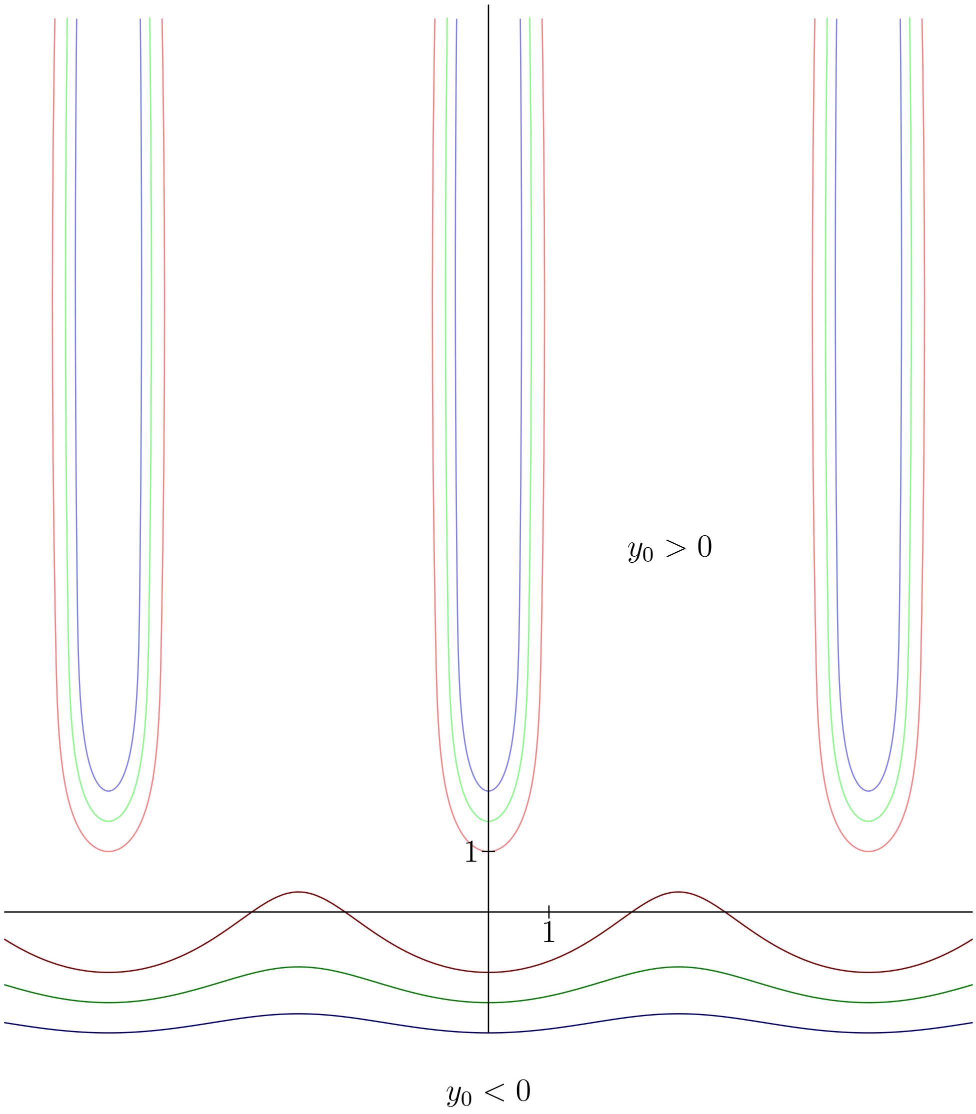
$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)(G^{-1})'\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right) \\ &= f(x)\frac{1}{\frac{1}{g\left(G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\right)}} \\ &= f(x) \times g\left(G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)\right) \\ &= f(x)g(y(x)) \end{aligned}$$

Unicité : Soit z_1 et z_2 deux solutions de l'équation.
$\frac{d}{dx}[G(z_1) - G(z_2)] = \frac{z_1'}{g(z_1)} - \frac{z_2'}{g(z_2)} = f - f = 0.$
On a donc que $G(z_1) = G(z_2)$, ou encore $z_1 = z_2$ comme G inversible. ■

■ **Exemple 1.5** Soit $y' = e^y sin(x)$.

- Tout d'abord, vérifions qu'il s'agit bien d'une équation différentielle à variable séparable : $f(x) = sin(x)$ et $g(y) = e^y$ où f et g sont bien continues sur $\mathbb{R}$.
- Donc, $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution défini sur un voisinage de x_0.
- On a alors :

$$\begin{aligned} &\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \\ \Rightarrow &\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{e^t} = \int_{x_0}^{x} sin(t)ds = [-cos(t)]_{x_0}^{x} = cos(x_0) - cos(x) \\ \Rightarrow &\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dt}{e^t} = [-e^{-t}]_{y_0}^{y(x)} = e^{-y_0} - e^{-y(x)} = cos(x_0) - cos(x) \\ \Rightarrow &e^{-y(x)} = e^{-y_0} + cos(x) - cos(x_0) \\ \Rightarrow &y(x) = -ln(e^{-y_0} + cos(x) - cos(x_0)) \end{aligned}$$



■

1.6 Equation différentielle homogène

Définition 1.6.1 On appelle équation différentielle homogène les équations différentielles du 1^{er} ordre du type : $y' = f(\frac{y}{x})$ où f est continues sur I.

■ **Exemple 1.6**

- $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \neq h(x)g(y)$ n'est pas une équation différentielle à variables séparables.
- $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y} - \frac{1}{(\frac{y}{x})^2} = f(\frac{y}{x})$ où $f(t) = t - \frac{1}{t^2}$
  Il s'agit donc d'une équation différentielle homogène.

■

1.6.1 Méthode de résolution

On considère l'équation différentielle $y' = f(\frac{y}{x})$, on pose $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Si y est solution de l'équation, alors :

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \left(\frac{y'(x)}{x}\right)' \\
&= \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \\
&= \frac{u(x)}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{y(x)}{x} \text{ puisque } y \text{ solution} \\
&= \frac{1}{x} \times [f(u(x)) - u(x)]
\end{aligned}$$

On note $g(t) = f(t) - t$. On a donc que

$$g(u(x)) = f(u(x)) - u(x)$$

et donc que

$$u' = \frac{g(u)}{x}$$

Cette dernière peut s'écrire :

$$u' = f(x)g(u)$$

où $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(u) = f(u) - u$, qui est donc une équation différentielle à variables séparables. On trouve ainsi u, puis y avec la relation $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

1.7 Equation différentielle du type $y' = f(ax+by+c)$

- *Si* $b = 0$, $y' = f(ax+c)$ est déjà vu à la section 1.3.1
- *Si* $b \neq 0$, Il ne s'agit pas d'une équation à variables séparables, mais on peut s'y ramener en posant $u(x) = ax + by(x) + c$.
  Si y est solution de l'équation différentielle, $y' = f(ax+by+c)$ et

  $$\begin{aligned}
  u'(x) &= a + by'(x) \\
  &= a + bf(ax + by(x) + c) \\
  &= a + bf(u(x))
  \end{aligned}$$

  Il s'agit d'une équation du type $u' = g(u)$ qui est résolue à la section 1.3.2.

■ **Exemple 1.7** $y' = (x+y)^2 = f(x+y)$ avec $f(t) = t^2$
On pose $u(x) = x + y(x)$, donc $u'(x) = 1 + y'(x) = 1 + (x+y)^2 = 1 + u^2$
On a donc :

$$\begin{aligned}
u' = 1 + u^2 &\Leftrightarrow \frac{u'}{1+u^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int 1dx = x + c \\
&\Leftrightarrow arctan(u) = x + c \\
&\Leftrightarrow u = tan(x+c)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
u = x + y &\Rightarrow u(x) = x + y(x) \\
&\Rightarrow y(x) = tan(x+c) - x
\end{aligned}$$

■

1.8 Equation différentielle linéaire de 1^{er} ordre

Définition 1.8.1 Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f,g \in C^0(I,\mathbb{R})$.

1. On appelle équation différentielle de 1^{er} ordre linéaire non homogène toute équation différentielle de la forme : $y' + g(x)y = h(x)$, $\forall x \in I$.
2. On appelle équation différentielle de 1^{er} ordre linéaire homogène toute équation différentielle de la forme : $y' + g(x)y = 0$, $\forall x \in I$.

1.8.1 Equation linéaire homogène de 1^{er} ordre

On considère l'équation différentielle : $\begin{cases} y' = -g(x)y \\ y(x_0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$, $\forall x \in I$.

Il s'agit d'une équation différentielle à variable séparable. Il n'existe qu'une unique solution définit avec :

$$\begin{aligned}
y' = -g(x)y &\Rightarrow \frac{y'}{y} = g(x)\\
&\Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s} = -\int_{x_0}^{x} g(t)dt\\
&\Rightarrow ln|y(x)| - ln|y_0| = -\int_{x_0}^{x} g(t)dt\\
&\Rightarrow ln|\frac{y(x)}{y_0}| = -\int_{x_0}^{x} g(t)dt\\
&\Rightarrow \frac{y(x)}{y_0} = e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}\\
&\Rightarrow y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}
\end{aligned}$$

On remarque que $y = 0$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = -g(x)y \\ y(x_0) = 0 \end{cases}, \forall x \in I$$

C'est-à-dire que $y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} y' = -g(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \forall x \in I$$

Théorème 1.8.1 Soient $g \in C^0(I,\mathbb{R})$ et $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$.
Alors, l'équation $\begin{cases} y' = -g(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $\forall x \in I$ admet une unique solution donnée par :

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$$

■ **Exemple 1.8** $y' + sin(x)y = 0$, $g(x) = sin(x)$.

$\begin{cases} y' + sin(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution donnée par :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} sin(t)dt} \\ &= y_0 e^{-[-cos(t)]_{x_0}^{x}} \\ &= y_0 e^{cos(x)-cos(x_0)} \\ &= y_0 e^{-cos(x_0)} e^{cos(x)} \end{aligned}$$

et la solution générale de l'équation est $\lambda e^{cos(x)}$. ∎

1.8.2 Equation linéaire non homogène de 1^{er} ordre

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' + g(x)y = h(x) \\ y(x_0) = y_0 \neq 0 \end{cases}, \forall x \in I$$

où $g, h \in C^0(I, \mathbb{R})$. On utilise la méthode de la variation de la constante :

- 1^{ere} **étape :** La solution de l'équation homogène associée

$$\begin{cases} y' + g(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est $y_H(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$.

- 2^{eme} **étape :** On pose $y(x) = z(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$ avec $z(x_0) = y_0$. On a alors :

$$\begin{aligned} y' &= \left[z(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} \right]' \\ &= z'(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} - g(x)z(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} \\ &= z'(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} - g(x)y(x) \end{aligned}$$

Donc : $h(x) = y' + g(x)y(x) = z'(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$, et :

$$\begin{aligned} z'(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} = h(x) &\Rightarrow z'(x) = h(x)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} \\ &\Rightarrow z(x) = \int_{x_0}^{x} h(s)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{s} g(t)dt} ds \end{aligned}$$

On obtient alors : $y(x) = z(x)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt} = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} h(s)e^{\displaystyle\int_{x_0}^{s} g(s)ds} \right] e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt}$

Théorème 1.8.2 Soient $f,g \in C^0(I,\mathbb{R})$, $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Alors, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + g(x)y = h(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $y \in C^1(I,\mathbb{R})$ donnée par

$$y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} h(s) e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \right] e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)ds}$$

Preuve.

- **Existence :** Cette fonction y vérifie bien l'équation (construit pour au dessus).
- **Unicité :** Soient y_1, y_2 deux fonctions solutions de l'équation différentielle, alors :

$$\begin{aligned} \left(e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} [y1 - y2] \right) &= g(x) e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} [y1(x) - y2(x)] + e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} [y1'(x) - y2'(x)] \\ &= e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \left[g(x)y_1(x) + y_1'(x) - \left(g(x)y_2(x) + y_2'(x) \right) \right] \\ &= e^{\int_{x_0}^{x} g(s)ds} \left[h(x) - h(x) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $y_1(x) = y_2(x) + c$. Mais comme $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, $y_1(x) = y_2(x)$ ■

■ **Exemple 1.9** $y' + ytan(x) = sin(x)$, $\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

- L'équation homogène est $y' + ytan(x) = 0$, donc la solution est

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \lambda e^{-\int tan(x)dx} \\ &= \lambda e^{-ln(|cos(x)|)} \\ &= \lambda e^{ln(\frac{1}{|cos(x)|})} \\ &= \frac{\lambda}{|cos(x)|} \end{aligned} \tag{1.1}$$

- La solution de l'équation homogène $\begin{cases} y' + ytan(x) = sin(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est donnée par :

$$y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} sin(t) e^{\int_{x_0}^{s} tan(s)ds} \right] e^{-\int_{x_0}^{x} tan(s)ds}$$

■

1.9 Equation de Bernoulli

Définition 1.9.1 Une équation de 1^{ere} ordre est dite *de Bernoulli* si elle a la forme :

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^{\alpha}(x) = 0 \text{ où } \alpha \neq 1$$

Remarquons qu'ici, il ne s'agit pas de $y^{(\alpha)}$ qui est la dérivée $\alpha - ieme$ de y mais bien $(y(x))^{\alpha}$.

1.9.1 Méthode de résolution :

On pose $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, d'où $z'(x) = (1-\alpha)y'(x)y^{-\alpha}(x)$.
En divisant l'équation de Bernoulli par y^α, on obtient :

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} + g(x)y^{1-\alpha}(x) + h(x) = \frac{z'(x)}{1-\alpha} + g(x)z(x) + h(x) = 0$$

Donc, on obtient une équation différentielle en z :

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + g(x)z(x) + h(x) = 0$$

qui une équation linéaire de 1^{er} ordre non homogène. On la résout par la méthode de la variation de la constante.

Proposition 1.9.1 Soient $h, g \in C^0(I, \mathbb{R})$. On considère l'équation de Bernoulli

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^\alpha(x) = 0$$

où $\alpha \neq 1$. Pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique solution au voisinage de x_0 à l'équation

$$\begin{cases} y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^\alpha(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démonstration.

- **Existence :** L'équation

$$\begin{cases} \dfrac{z'(x)}{1-\alpha} + g(x)z(x) + h(x) = 0 \\ z(x_0) = y_0^{1-\alpha} \end{cases}$$

  a une unique solution. De plus, au voisinage de x_0, on a

$$z(x) = e^{(a-\alpha)ln(y(x))} > 0$$

  d'où

$$y(x) = z^{1-\alpha}(x) = e^{\frac{ln(z(x))}{1-\alpha}}$$

  Ceci a un sens car $z(x) > 0$ sur un voisinage de x_0. Donc $y(x)$ est solution de l'équation de Bernoulli au voisinage de x_0. De plus, $y(x) > 0$.
- **Unicité :** Toute solution de l'équation de Bernoulli $y(x) > 0$ est solution de l'équation en z. Comme cette équation a une unique solution, alors l'équation de Bernoulli possède au plus une solution, d'où l'unicité de cette dernière.

■

■ **Exemple 1.10** $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$. On pose

$$z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(x)} = \frac{1}{y^3(x)}$$

En considérant $y > 0$, on obtient :

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{1+x}y^{-3} + (1+x) = 0 = \frac{z'(x)}{-3} + \frac{1}{1+x}z(x) + (1+x)$$

Cette équation de 1^{er} ordre linéaire non homogène admet la solution générale suivante :

$$z(x) = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2$$

Comme $z(x) = \frac{1}{y^3(x)}$, on a $y^3(x) = \frac{1}{z(x)}$ ou encore

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}$$

■

1.9.2 Le cas $\alpha \in \mathbb{N}^*$

- **Si α est impair :** Si $y(x)$ est une solution positive de l'équation de Bernoulli, alors

$$u(x) = -y(x)$$

  est une solution négative de l'équation.
- **Si α est pair :** Si $y < 0$ et on pose $z = y^{1-\alpha}$, alors

$$y(x) = -|z(x)|^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sqrt[\alpha-1]{\frac{1}{z(x)}}$$

Donc on peut résoudre l'équation de Bernoulli pour $y > 0$ et $y < 0$.

1.9.3 Résumé

- Si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 1$, on peut résoudre l'équation de Bernouilli seulement pour des solutions positives.
- Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \neq 1$, on peut trouver des solutions positives et négatives de l'équation de Bernouilli.

■ **Exemple 1.11** $y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$
Dans ce cas, on a des solutions positives et négatives de l'équation. En effet,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}$$

tant que $c(1+x)^3 - 3(1+x)^2 \neq 0$ ■

1.10 Equation différentielle de Riccati

Définition 1.10.1 L'équation différentielle de Riccati est une équation de la forme :

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = 0$$

1.10.1 Méthode Résolution

Il faut connaitre une solution particulière ϕ de l'équation de Riccati. On pose :

$$u(x) = y(x) - \phi(x)$$

Comme y et ϕ sont solutions de l'équation, on a :

$$\begin{aligned}
[y(x) - \phi(x)]' + g(x)[y(x) - \phi(x)] + h(x)[y^2(x) - \phi^2(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)[y(x) - \phi(x)][y(x) + \phi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x) + \phi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x) - (\phi(x) - \phi(x)) + \phi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[y(x) - \phi(x) + 2\phi(x)] &= 0 \\
u'(x) + g(x)u(x) + h(x)u(x)[u(x) + 2\phi(x)] &= 0 \\
u'(x) + [g(x) + 2h(x)\phi(x)]u(x) + h(x)u(x)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Cette dernière est une équation de Bernoulli que nous savons résoudre.

■ **Exemple 1.12** $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$ est une équation de Riccati dont une solution particulière est

$$y_p = \phi = -x^2$$

■

1.10.2 Résumé

Riccati : $y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = k(x)$
$\downarrow u(x) = y(x) - \phi(x)$ *où* ϕ *est une solution particulière*
Bernouilli : $u'(x) + \tilde{g}(x)u(x) + \tilde{h}(x)u^{\alpha}(x) = 0$
$\downarrow z(x) = u^{1-\alpha}(x)$
Equation linéaire non homogène : $z'(x) + t(x)z(x) = r(x)$
$\downarrow$ *On trouve* z
Donc $u(x) = \sqrt[1-\alpha]{z(x)}$
$\downarrow$ *On trouve* u
Donc $y(x) = u(x) + \phi(x)$

2. Méthodes numériques pour les Equations différe

On considère l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ sur un intervalle $[a,b]$. On cherche à construire une solution approchée de l'équation sur l'intervalle $[a,b]$. On partage l'intervalle $[a,b]$ à l'aide d'une subdivision régulière d'ordre n :

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

$\forall i \in \{0,\ldots,n\}$. Le pas est de $h = \frac{b-a}{n}$

2.1 Méthode d'Euler

Cette méthode permet de trouver $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ une valeur approchée y_i de $y^*(x_i)$ où y^* est la solution de l'équation.

2.1.1 Principe

On pose la condition initiale $u_0 = (x_0, y_0)$, puis :

- Sur $[a,x_1]$, on va remplacer la fonction y^* par sa tangente en u_0 : on obtient

$$y_1 = y_0 + hy^{*\prime}(x_0)$$

  Mais, comme y^* est solution de l'équation différentielle, on a que $y^{*\prime}(x_0) = f(x_0,y_0)$. Donc, on a $\boxed{y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)}$. Ce qui nous donne $u_1 = (x_1,y_1)$
- Sur $[x_1,x_2]$, on va opérer de la même manière et poser $\boxed{y_2 = y_1 + hf(x_1,y_1)}$ et obtenir $u_2 = (x_2,y_2)$.
- On opère de cette façon $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ et on a $\boxed{y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1},y_{i-1})}$.

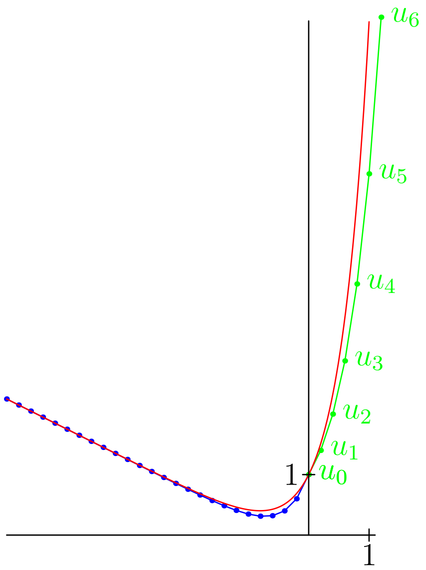
En fin de compte, nous obtenons une approximation de y^*

2.1.2 Algorithme

On peut définir une algorithme pour approcher la solution y^* de l'équation par l'algorithme basé sur la récurrence précédente :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \text{ donné} \\ (x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $\begin{cases} y' = 2y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$



En utilisant l'algorithme d'Euler avec un pas de 0.2, on obtient l'approximation ci-dessus.

2.2 Méthode de Taylor d'ordre p

Cette fois, on suppose que $f \in C^p$. La formule de Taylor nous donne :

$$y^*(x_i + h) = \sum_{i=0}^{p} \frac{h^i}{i!} y^{*(i)}(x_i) + o(h^{p+1})$$

Comme pour la méthode d'Euler, $y^*(x) = f(x, y(x))$, donc la formule devient

$$y^*(x_i + h) = y^*(x_i) + \sum_{i=1}^{p} \frac{h^i}{i!} f^{(i-1)}(x_i) + o(h^{p+1})$$

On peut alors considérer l'algorithme suivant pour calculer les valeurs approchées de y^* avec :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \text{ donné} \\ (x_{i+1}, y_{i+1}) = \left(x_{i+1}, y_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{h^i}{i!} f^{(i-1)}(x_i) \right) \end{cases}$$

Cette méthode a le mérite de donner des résultats avec un marge d'erreur de l'ordre de h^{p+1} à chaque itération. Cependant, elle est relativement couteuse en calcul, d'où l'intérêt de trouver un algorithme intermédiaire.

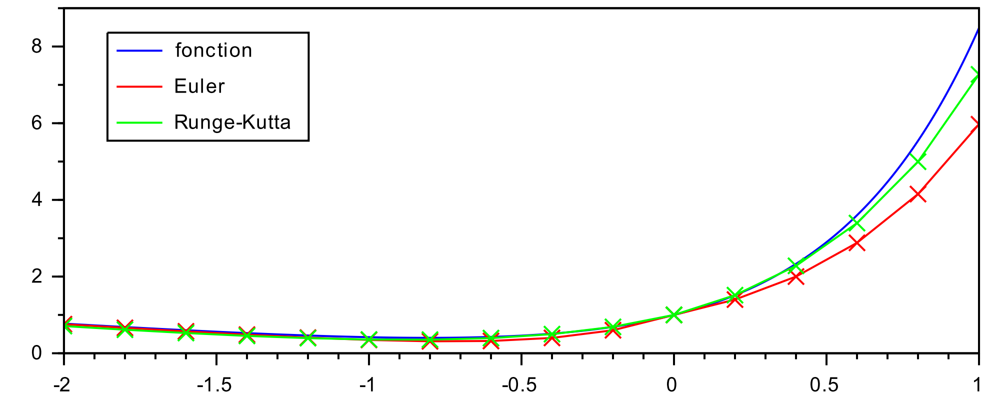
2.3 Méthode de Runge-Kutta

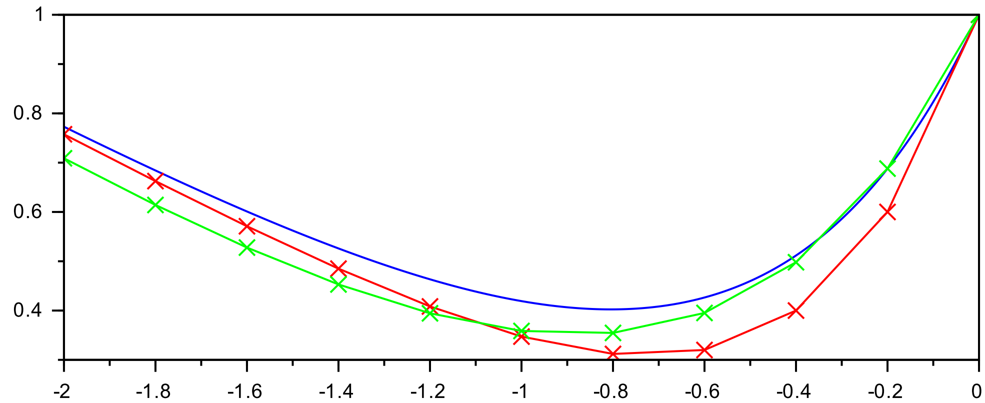
On remplace cette fois sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la solution y^* par une approximation parabolique.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \text{ donné} \\ (x_{i+1}, y_{i+1}) = \left(x_{i+1}, y_i + y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)\right) \end{cases}$$

Elle consiste à approcher le milieu de $[x_i, x_{i+1}]$ avec la méthode d'Euler, puis d'utiliser une nouvelle fois la méthode d'Euler, mais la tangente au point milieu de $[x_i, x_{i+1}]$.
Cette méthode est plus précise que celle d'Euler, et moins couteuse que l'approche de Taylor.





3. Théorème de Taylor-Lipschitz

3.1 Rappel

Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, on définit les fonctions partielles par

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right. \text{ et } f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$$

Définition 3.1.1 La dérivée partielle de f au point (x_0,y_0) par rapport à x est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$$

La dérivée partielle de f au point (x_0,y_0) par rapport à y est

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$$

(TRUCS SUR LES FONCTIONS DERIVEES PARTIELLES, VOIR VAR)

Théorème 3.1.1 — de Schwartz. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

3.2 Fonction Lipschitziennes

Définition 3.2.1 On dit que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitziennes si $\exists k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

R

- f lipschitzienne $\Rightarrow f$ continue
- f lipschitzienne $\not\Rightarrow f$ dérivable

Exemple 3.1
- $f(x) = x$ est lipschitzienne : $|f(x)-f(y)| = |x-y| \leq |x-y|$ $(k=1)$
- $f(x) = |x|$ est lipschitzienne avec $k = 1$:

$$|f(x)-f(y)| = ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Mais elle n'est pas dérivable en 0.
- $f(x) = x^2$ n'est pas lipschitzienne :

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y||x+y|$$

Si elle était lipschitzienne,

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| \Rightarrow |x+y| \leq k$$

■

Définition 3.2.2 On dit que f est Lipschitzienne sur une partie $I \subset \mathbb{R}$ si $\exists k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$.

Exemple 3.2 $f(x) = x^2$ est lipschitzienne sur un intervalle fermé borné $[a,b]$: Comme précédemment, on prend $k = b-a$. ■

3.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

3.3.1 Motivation

On voudrait pouvoir généraliser l'unicité des solutions d'une équation différentielle

- $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$ admet une unique solution : $y(t) = ae^t$
- $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet plusieurs solutions : $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{t^2}{4}$ par exemple.

3.3.2 Fonctions lipschitziennes

Proposition 3.3.1
1. f lipschitzienne $\Rightarrow f$ continue
2. f dérivable sur I et f' bornée $\Rightarrow f$ lipschitzienne

Démonstration.
1. Soit $x_0 \in I$. On a alors $\forall x \in I$, $|f(x)-f(x_0)| \leq K|x-x_0|$. Donc,

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)-f(x_0)| \leq \lim_{x \to x_0} K|x-x_0| = 0$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Par le théorème des accroissements finis, $\forall (x,y) \in I^2$ tel que $x \neq y$, $\exists \varepsilon \in]x,y[$ tel que
$$f'(\varepsilon) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$
Donc,
$$|f(x)-f(y)| = |f'(\varepsilon)||x-y| \leq K|x-y|$$

■

■ Exemple 3.3

- $f(x) = cos(x)$ est lipschitzienne puisque $|f'| \leq 1$
- $f(x) = ln(1+x^2)$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
On a
$$x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$$
Donc $x^2+1 \geq -2x$. Comme $x^2+1>0$,
$$|x^2+1| \geq |2x|$$
Donc,
$$|f'(x)| = \frac{|2x|}{|x^2+1|} \leq 1$$
f est alors lipschitzienne.

■

3.3.3 fonction localement lipschitzienne

Définition 3.3.1 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est localement lipschitzienne s'il existe une intervalle de I sur lequel f est lipschitzienne.

Proposition 3.3.2 Si $f: I \to \mathbb{R} \in C^1$, alors f est localement lipschitzienne.

Dans la suite, I et U désignent deux intervalles ouverts non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 3.3.2 Soit $f \left| \begin{array}{ccc} I\times U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto & f(t,y) \end{array} \right.$. On dit que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si $\exists K \geq 0$ tel que $\forall (t,y_1,y_2) \in I \times U^2$,
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq K|y_1-y_2|$$

Proposition 3.3.3 Soit $f: I\times U \to \mathbb{R}$. Si f est continue et $\frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)$ existe et est bornée, alors f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

■ Exemple 3.4

- $f(t,y) = cos(t)e^{-y}$ sur $]0,+\infty[$
  - f est continue
  - $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leq |-e^{-y}| \leq 1$

  Donc f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
- $f(t,y) = \frac{t}{1+t^2} \times \frac{y^2}{1+y^2}$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable

■

Définition 3.3.3 Soit $f \left| \begin{array}{ccc} I\times U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto & f(t,y) \end{array} \right.$. f est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si : $\forall (t_0, y_0) \in I \times U$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists K \geq 0$ tel que

$$\forall (t, y_1, y_2) \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[^2$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

Proposition 3.3.4 Soit $f \left| \begin{array}{ccc} I \times U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto & f(t,y) \end{array} \right.$. Si f est continue et $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ existe et est bornée, f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

■ **Exemple 3.5**

- $f(t,y) = e^{ty^2}$
- $f(t,y) = \frac{y^5}{1+y^2} cos(ty)$

■

3.3.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

On se donne l'équation $(E) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Une solution de (E) est la donnée de (J, y) où J est un intervalle de I contenant t_0 et $y \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$ de classe C^1 vérifiant (E).

Théorème 3.3.5 — Cauchy-Lipschitz version globale. soit $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne par rapport à y, alors (E) admet une unique solution $y: I \to \mathbb{R}$ de classe C^1, dite globale.

■ **Exemple 3.6**

- $(E) \begin{cases} y'(t) = cos(t) ln(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ avec $f(t,y) = cos(t) ln(1+y^2)$.
  - f est continue
  - $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = \left|cos(t)\frac{-2y}{1+y^2}\right| \leq \frac{2|y|}{|1+y^2|} \leq 1$, donc f lipschitzienne.

  (E) admet une unique solution globale.
- $(E) \begin{cases} y'(t) = e^{-y^2} sin(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ avec $f(t,y) = e^{-y^2} sin(ty)$ sur $]-1,1[$.
  - f est continue
  - $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -2ye^{-y^2} sin(t \cdot y) + t \cdot cos(t \cdot y) e^{-y^2} = e^{-y^2}(t \cdot cos(t \cdot y) - 2y \cdot sin(t \cdot y))$

    Comme $t \in]-1,1[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leq \left|e^{-y^2}\right|$ est bornée.

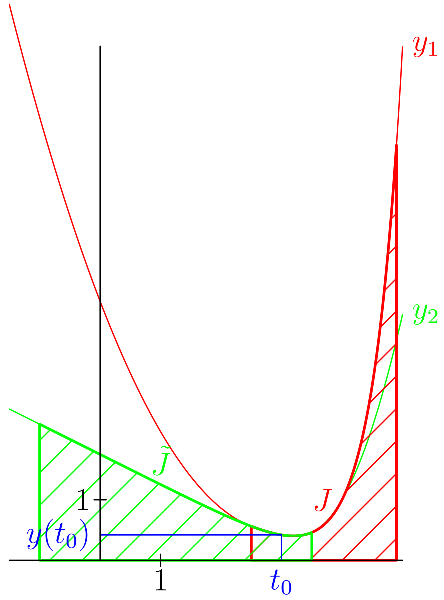
  (E) admet alors une unique solution globale.

■

Théorème 3.3.6 — Cauchy-Lipschitz version locale. Soit $I \times U: \mathbb{R} \to$ continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors (E) admet une unique solution (J, y) où J est un intervalle ouvert de I contenant t_0 et $y: J \to U$ de classe C^1.

R L'unicité de ce théorème s'interprète comme suit : Si $(\tilde{J}, \tilde{y})$ est une solution de (E) où $t_0 \in \tilde{J}$ et $y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0$, alors

$$\forall t \in J \cap \tilde{J}, y(t) = \tilde{y}(t)$$



Corollaire 3.3.7 — Solution maximale. Sous les mêmes hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution *dite maximale* $y :]T_*, T^*[\to U$ de classe C^1.
En d'autres termes, si $(J, \tilde{y})$ est solution, alors $J \subset]T_*, T^*[$ et $\tilde{y}(t) = y(t)$, $\forall t \in J$.

Corollaire 3.3.8 — Séparations des solutions. Soient $I \times U : \mathbb{R} \to$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (version locale), et (I_1, y_1) et (I_2, y_2) deux solutions de $y' = f(t,y)$ avec $t_0 \in I_1 \cap I_2$, alors si $y_1(t_0) < y_2(t_0)$, $y_1 < y_2$. Géométriquement, les graphes des deux solutions ne s'intersectent pas.

Application : $(E) \begin{cases} y'(t) = sin(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ où $f(t,y) = sin(y)$ est lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence d'une unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

- $y_1(t) = 0$ est une solution de $y' = sin(y)$. Comme $0 < 1$, le principe de séparation des solutions nous donne que $y(t) > 0$
- $y_2(t) = \pi$ est aussi solution de $y' = sin(y)$. Comme $1 < \pi$, le principe de séparation des solutions nius donne que $y(t) < \pi$.

Nous avons alors une indication sur la solution : $0 < y(t) < \pi$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4. Systèmes linéaires à coefficients constants

On considère le système d'équation $(E)\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$ où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ des constantes. On peut réduire le système (E) à l'équation matricielle

$$y'(t) = Ay(t)$$

où $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Objectif : Résoudre le système différentielle $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

On peut décrire la solution $y(t) = e^{(t-t_0)A}$ par l'exponentielle de la matrice $(t-t_0)A$.

4.1 Exponentielle d'une matrice

On a, avec le développement de Taylor, $e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R}$. On peut utiliser cette même formule pour exprimer l'exponentielle d'une matrice carré : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$e^A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \ldots$$

Définition 4.1.1 On munit l'espace vectoriel des matrices $M_n(\mathbb{R})$ de la norme suivante : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, qui a donc les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
3. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

4.1.1 Convergence

Définition 4.1.2 Soit une suite de matrices définit par $\forall k \in \mathbb{N},\ A_k = (a_{ij}^k)_{1 \leq i,j \leq n}$ On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \lim_{n\to+\infty} a_{ij}^n = a_{ij}$$

.

■ **Exemple 4.1** Soit $\forall k \in \mathbb{N},\ A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k^2+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} & \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 & \lim\limits_{n\to+\infty} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ■

Proposition 4.1.1 Une suite de matrice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $M_n(\mathbb{R})$ converge vers A si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$

Proposition 4.1.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on appelle *exponentielle de* A et noté e^A.

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est bien une matrice de $M_n(\mathbb{R})$
- Comme $\mathbb{R}$ est complet ("toute suite de Cauchy converge"), $M_n(\mathbb{R})$ est aussi complet. On va donc montrer que $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Soit $n, n' \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n'} \frac{A^k}{k!} \right\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n'} \frac{A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n'} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \text{ (inégailté triangulaire)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{n'} \frac{\|A\|^k}{k!} \text{ (par 4.))} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &\leq e^{\|A\|} \end{aligned}$$

Donc, puisque $\forall n, n' \in \mathbb{N},\ \left\| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{n'} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente.

■

■ **Exemple 4.2** Avec $A = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = eI_2
\end{aligned}$$

De manière générale, $e^{I_n} = eI_n = \begin{pmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e \end{pmatrix}$ ■

4.1.2 Propriété de e^{tA}

Propriété 4.1.3 $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA}\| \leq e^{|t|} e^{\|A\|}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \text{ (par definition)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!} \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!} \\
&\leq e^{|t|\|A\|} \text{ (definition de l'exponentielle réelle)}
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.1.4 Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA} y_0 \end{array} \right.$. Alors f est dérivable et

$$f'(t) = Ae^{tA} y_0$$

Démonstration. Si $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(t+s)-f(t)}{s}$ existe et est finie, f est dérivable en t et $f'(t) = \lim\limits_{s \to 0} \frac{f(t+s)-f(t)}{s}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+s)-f(t)}{s} - Ae^{tA}y_0 &= \frac{e^{(t+s)A}y_0 - e^{tA}y_0}{s} - Ae^{tA}y_0 \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(t+s)A]^k}{k!}\right) y_0 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[tA]^k}{k!}\right) y_0}{s} - A\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[tA]^k}{k!}\right) y_0 \\
&= y_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s} \times \frac{\left[(t+s)^k - t^k\right] A^k}{k!} - A\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[tA]^k}{k!}\right) y_0 \\
&= y_0 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{s} \times \frac{\left[(t+s)^k - t^k\right] A^k}{k!}\right) - A\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[tA]^k}{k!}\right) y_0 \text{ (}1^{er}\text{ terme nul)}
\end{aligned}$$

Or, $(t+s)^k - t^k = \int_t^{t+s} kx^{k-1}dx$. Comme kx^{k-1} est croissante pour $t>0$ et $s>0$,

$$(t+s)^k - t^k \leq [(t+s)-t]k(t+s)^{k-1} = sk(t+s)^{k-1}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+s)-f(t)}{s} - Ae^{tA}y_0 &\leq y_0 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{s} \times \frac{sk(t+s)^{k-1}A^k}{k!} \right) - A \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[tA]^k}{k!} \right) y_0 \\
&\leq y_0 \left(\sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{(k'+1)(t+s)^{k'}A^{k'+1}}{(k'+1)!} \right) - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} \right) y_0 \\
&\leq y_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} \left[(k+1)(t+s)^k - (k+1)t^k \right] \\
&\leq y_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} (k+1) \left[(t+s)^k - t^k \right]
\end{aligned}$$

Or, lorsque s tend vers 0, $[(t+s)^k - t^k]$ tend aussi vers 0. Donc,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(t+s)-f(t)}{s} - Ae^{tA}y_0 = 0$$

■

Proposition 4.1.5 Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \times \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{B^{k'}}{k'!} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k'=0}} \frac{A^k}{k!} \times \frac{B^{k'}}{k'!} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k'=0}} \frac{B^{k'}}{k'!} \times \frac{A^k}{k!} \\
&= \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{B^{k'}}{k'!} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \\
&= e^B e^A
\end{aligned}$$

■

R

- $e^0 = I_n + \frac{0}{1} + \frac{0^2}{2!} + \ldots = I_n$
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $e^A e^{-A} = e^0 = I_n$. Donc e^A est inversible d'inverse e^{-A}

4.1.3 Application aux équations différentielles

Théorème 4.1.6 Le système linéaire d'équation différentielle $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution donnée par $y(t) = e^{tA}y_0$.

Démonstration.

EXISTENCE :

Vérifions que l'application $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA}y_0 \end{array} \right.$ est bien une solution du système donnée :

- Comme on a vu dessus, $f'(t) = Ae^{tA}y_0 = Af(t)$
- $f(0) = e^{0.A}y_0 = I_n y_0 = y_0$

UNICITE :

Soit y une solution du système, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-tA}y) &= -Ae^{-tA}y + e^{-tA}\frac{dy}{dt} \\ &= -Ae^{-tA}y + Ae^{-tA}y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $e^{-tA}y$ est une constante, et on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$e^{-tA}y = y_0 \Rightarrow y = e^{tA}e_0$$

■

4.1.4 Calcul pratique de e^{tA}

Cas diagonal

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Cas diagonalisable

Propriété 4.1.7 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Cas général

On calcule e^{tA} grâce à la forme de Jordan.

Proposition 4.1.8 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $CAC^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_n \end{pmatrix}$

où $Q_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in M_{n,j}(\mathbb{C})$, λ_j étant une valeur propre de A de multiplicité μ_j.

De plus, $e^{tA} = C^{-1} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_n \end{pmatrix} C$ où $R_j = e^{tQ_j} = e^{t\lambda_j} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{nj-1}}{(nj-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul pratique de e^{tA}, $A \in M_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

- $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $tr(A) = a + d$
- $P(\lambda) = det(A - \lambda Id_2) = \lambda^2 - tr(A) + det(A)$

On cherche à trouver les valeurs propres de A, donc à résoudre $P(\lambda) = 0$.

$$\Delta = tr(A)^2 - 4det(A)$$

- Si $\Delta < 0$, on a deux valeurs propres complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. La matrice A est diagonalisable.
- Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La matrice A est diagonalisable.
- Si $\Delta = 0$, on a une valeur propre réelle λ.
  - Si on trouve deux vecteurs propres associés à λ linéairement indépendant, A est diagonalisable.
  - Sinon, A n'est pas diagonalisable.

Vecteur propre : $X \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre associé à λ si $\begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$

Matrice de passage :

- $\Delta \neq 0$, il existe deux valeurs propres distinctes. On prend $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ associé à λ_1 et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq 0$ associé à λ_2.

$$\begin{cases} AX = \lambda_1 X \\ AY = \lambda_2 Y \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Donc, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Et $e^{tA} = Pe^{t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$

- $\Delta = 0$: 1^{er} *cas :* Il existe deux vecteurs propres X et Y non colinéaires associé à λ.
  Alors, A est diagonalisable et il existe $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$.

2^{eme} *cas :* On ne trouve pas deux vecteurs propres linéairement indépendant.
Alors, on considère le vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ associé à λ et on cherche

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

tel que $(A - \lambda Id_2)Y = X$.

Si $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $e^{tA} = Pe^{t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} P^{-1}$

On remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotent : A est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$. Ici,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

Et que $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les deux matrices sont commutatives)

Donc, $e^{t\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]} = e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

et $e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n}{n!} = Id_2 + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En fin de compte, $e^{t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^{tA} = e^{\lambda} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exemple 4.3

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable mais est déjà sous une forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]} \\ &= e^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} det(B - \lambda Id_3) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)[(5-\lambda)^2+1] - 2[(5-\lambda)-1] \\ &= \ldots \\ &= (\lambda-4)^2(\lambda-6) \end{aligned}$$

Vecteur propre associé à 6 **:** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (B - 6Id_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On prend alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vecteurs propres associés à 4 : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$(B-4Id_3)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_2 = 0 \\ y_1+y_2 -y_3 = 0 \\ -y_1+y_2 +y_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 = y_3 \end{cases}$$

On prend $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais impossible d'en trouver un autre non colinéaire. B n'est pas diagonalisable.

On doit trouver $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $(B-4Id_3)Z = Y$

$$(B-4Id_3)Z = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2 = 1 \\ z_1+z_2 -z_3 = 0 \\ -z_1+z_2 +z_3 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 = z_3 - \frac{1}{2} \\ -z_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z_3 = 1 \text{ (toujours vrai)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 = -\frac{1}{2} \\ z_3 = 0 \text{ (on fixe une valeur quelconque)} \end{cases}$$

On prend donc $Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

■

4.2 Système linéaire non-homogène

Théorème 4.2.1 Le système d'équations non-homogènes $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution donner par $y(t) = e^{tA}y_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds$ où l'intégrale d'un vecteur se calcule composante par composante :

$$\int_a^b (f_i(t))_{i\in I} = \left(\int_a^b f_i(t)dt\right)_{i\in I}$$

Démonstration.

- Soit $G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds \end{array} \right.$

  $\frac{\partial}{\partial t}G(t) = Ae^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds + e^{tA}e^{-tA}b(t) = AG(t) + b(t)$. G est donc une solution du système linéaire sans la condition, avec $G(0) = 0$.
- Si $y(t)$ est une solution du système, alors $y(t) - G(t)$ est solution de $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

  En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[y(t) - G(t)] &= Ay(t) + b(t) - AG(t) - b(t) \\ &= A[y(t) - G(t)] \end{aligned}$$

  et

$$(y(t) - G(t))(0) = y(0) = y_0$$

  Donc, $y(t) - G(t) = e^{tA}[y(0) - G(0)]$, d'où

$$y(t) = e^{tA}y_0 + G(t)$$

■

4.3 2^{eme} méthode pour le calcul de e^{tA}

Théorème 4.3.1 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$e^{tA} = \alpha_0 Id_n + \alpha_1 A + ... + \alpha_{n-1}A^{n-1}$$

où $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ sont des fonctions en t.

Démonstration. Si $P(\lambda) = det(A - \lambda Id_n)$ est le polynôme caractéristique de A, $P(\lambda)$ s'écrit comme $\sum_{k=1}^{n} c_k\lambda^k$ et le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $P(A) = 0$, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n} c_k A^k = 0$$

ou encore

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{c_n} A^k$$

En posant
$$V = Vect(Id_n, A, \ldots, A^{n-1})$$
on obtient alors que $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$,
$$A^i \in V$$
et, par extension $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$A^k \in V$$
Ainsi, $e^{tA} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!} \in V$, donc e^{tA} est combinaison linéaire de $Id_n, A, \ldots, A^{n-1}$, les coefficients dépendant de t. ■

Théorème 4.3.2 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note
$$e^{tA} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$
et on pose
$$r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i\, t^i$$
Si λ_k est une valeur propre de multiplicité k, alors :
$$\begin{aligned} r(t\lambda_k) &= e^{t\lambda_k} \\ \frac{\partial}{\partial t} r(t\lambda_k) &= e^{t\lambda_k} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} r(t\lambda_k) &= e^{t\lambda_k} \end{aligned}$$

■ **Exemple 4.4** Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, on cherche α_0 et α_1 tel que $e^{tA} = \alpha_0 Id_2 + \alpha_1 tA$

- Calcul du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda Id_2) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-2-\lambda) - 8 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 8 \\ &= (\lambda+1)^2 - 9 \\ &= (\lambda+4)(\lambda-2) \end{aligned}$$

- On pose $r(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$
  - Avec $\lambda_0 = 2$, $r(2t) = e^{2t}$, donc $\alpha_0 + 2t\alpha_1 = e^{2t}$
  - Avec $\lambda_1 = -4$, $r(-4t) = e^{-4t}$, donc $\alpha_0 - 4t\alpha_1 = e^{-4t}$

On résout donc $\begin{cases} \alpha_0 + 2t\alpha_1 = e^{2t} \\ \alpha_0 - 4t\alpha_1 = e^{-4t} \end{cases}$ pour trouver $\alpha_0 = \frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{2}$ et $\alpha_1 = \frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6t}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{2} Id_2 + t\frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6t} A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}-e^{-4t} \\ \frac{4}{3}(e^{2t}-e^{-4t}) & \frac{e^{2t}-e^{-4t}}{-3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t}+e^{-4t}}{2} & \frac{e^{2t}-e^{-4t}}{6} \\ \frac{4}{3}(e^{2t}-4e^{-4t}) & \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{5}{6}e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

5. EDL du second ordre à coefficients constants

On considère ici les équations de la forme :

$$ay" + by' + cy = f(x)$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$

5.1 Resolution

Si y est une solution de l'équation $ay" + by' + cy = f(x)$, on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Ainsi, $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y"(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \frac{-b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t) - \frac{f(t)}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{a} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{a} \end{pmatrix}$

On a donc $Y'(t) = AY(t) + b(t)$, dont la solution est

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$$

Théorème 5.1.1 Le système d'équation

$$\begin{cases} ay" + by' + cy = 0 \\ \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

admet une unique solution. De plus, en notant le polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ et λ_1 et λ_2 les deux racines de ce polynôme,

- Si $\delta = b^2 - 4ac \neq 0$, la solution générale est donnée par

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- Si $\delta = b^2 - 4ac = 0$, la solution générale est donnée par

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda_1 x} = (C_1 x + C_2)e^{\lambda_2 x}$$

Démonstration. On cherche les solutions de la forme $f(x) = e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} f \text{ solution } &\Leftrightarrow af" + bf' + cf = 0 \\ &\Leftrightarrow a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \end{aligned}$$

- Si $\delta \neq 0$, on peut trouver deux racines distinctes λ_1 et λ_2, éventuellement complexes.
  - Donc $e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$ sont deux solutions particulières de l'équation. De plus, en considérant

    $$g(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

    on a

    $$\begin{aligned} ag" + bg' + c &= a\left(c_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}\right) + b\left(c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}\right) + c\left(c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\right) \\ &= c_1\left(a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + ce^{\lambda_1 x}\right) + c_2\left(a\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + ce^{\lambda_2 x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Donc toutes les combinaisons linéaires de $e^{\lambda_1 x}$ et de $e^{\lambda_2 x}$ sont solutions.
  - Comme on l'a vu plus haut, on peut se ramener à une équation du type $Y' = AY + b$, dont on sait la solution unique. Avec la relation

    $$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 x_0} + c_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_0 \\ c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} = y_0' \end{cases}$$

    , on peut trouver les valeurs de c_1 et de c_2
- Si $\delta = 0$, on peut trouver l'unique racine λ, éventuellement complexe. Comme c'est une racine double, elle vérifie

  $$\begin{cases} a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ 2a\lambda + b = 0 \end{cases}$$

  - Donc $e^{\lambda x}$ est une solution particulière. De plus, en considérant

    $$g(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

    On a

    $$\begin{aligned} ag" + bg' + c &= a\left[\left(\lambda^2 c_1 + 2\lambda c_2 + \lambda^2 c_2 x\right)e^{\lambda x}\right] + b\left[\left(\lambda c_1 + c_2 + \lambda c_2 x\right)e^{\lambda x}\right] + c\left[\left(c_1 + c_2 x\right)e^{\lambda x}\right] \\ &= c_1\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} + c_2 x\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} + c_2(2a\lambda + b)e^{\lambda x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Donc toutes les combinaisons linéaires de $e^{\lambda x}$ et de $xe^{\lambda x}$ sont solutions.

– Comme on l'a vu plus haut, on peut se ramener à une équation du type $Y' = AY + b$, dont on sait la solution unique. Avec la relation

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x_0} = y_0 \\ (\lambda c_1 + c_2 + \lambda c_2 x_0)e^{\lambda x_0} = y'_0 \end{cases}$$

on peut trouver les valeurs de c_1 et de c_2 ■

Exemple 5.1

- $y" - 5y' + 6y = 0$: polynôme caractéristique $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ dont $\delta = 1 > 0$
  Les deux racines sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ et la solution générale est
  $$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$
- $4y" + 4y' + y = 0$: polynôme caractéristique $4\lambda^2 - 4\lambda + 4$ dont $\delta = 0$
  La racine est $\lambda = \frac{-1}{2}$ et la solution générale est
  $$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{\frac{-x}{2}}$$
- $y" + y' + y = 0$: polynôme caractéristique $\lambda^2 + \lambda + 1$ dont $\delta = -3 < 0$
  Les deux racines sont $\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et la solution générale est
  $$y(x) = c_1 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}$$

■

R Si on cherche dans ce dernier exemple uniquement les solutions à valeurs réelles, on peut réécrire

$$\begin{aligned}
c_1 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x} &= e^{\frac{-x}{2}}\left[c_1 e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + c_2 e^{i\frac{-\sqrt{3}}{2}x}\right] \\
&= e^{\frac{-x}{2}}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right) + ic_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + ic_2 \sin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\
&= e^{\frac{-x}{2}}\left[(c_1 + c_2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i(c_1 - c_2)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\
&= e^{\frac{-x}{2}}\left[\tilde{c}_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \tilde{c}_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]
\end{aligned}$$

Il faut donc restreindre c_1 et c_2 pour qu'on ait

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \\ i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5.2 Résolution pratique

On cherche des solutions de l'équation $ay" + by' + cy = f(x)$

5.2.1 1^{ere} méthode

Une première méthode est d'utiliser l'astuce précédente en notant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{a} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{a} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$ et la solution est la première composante du vecteur $Y(t)$ trouvé.

5.2.2 2^{eme} méthode

On peut se simplifier la vie après avoir trouvé une solution particulière. Le tout est de la trouver... Mais une fois cela fait, le problème se résout plus simplement.

Prenons y_p une solution particulière et y_h une solution de l'équation homogène associée

$$ay" + by' + c = 0$$

Alors, par linéarité de la dérivé, $y = y_p + y_h$ est solution de $ay" + by' + c = f(x)$.

La question est maintenant de savoir comment trouver des solutions particulières.

Cas $ay" + by' + cy = p_n(x)$

- Si $c \neq 0$, on cherche un polynôme de degré n
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on peut intégrer une fois et on cherche un polynôme de degré $n+1$ dont on néglige la constante
- Si $c = 0$, $b = 0$ et $a \neq 0$, on peut intégrer deux fois et on cherche un polynôme de degré $n+2$ dont on néglige la constante et le coefficient en x

■ **Exemple 5.2** $y" + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$: On cherche une solution de la forme $ax^2 + bx + c$

$$2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 3x + 1$$
$$\Rightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a - 2c + b) = 2x^2 - 3x + 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -3 \\ 2a + b - 2c = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -2b = -1 \\ b - 2c = 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ -2c = \frac{-5}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

Une solution particulière est donc $y_p = -x^2 + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$ et la solution générale est

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$$

■

Cas $ay" + by' + cy = e^{mx} p_n(x)$

En prenant $z = ye^{-mx}$, on se ramène au cas précédent. Ainsi, si y est solution de

$$ay" + by' + cy = e^{mx} p_n(x)$$

et comme

$$z = e^{-mx} y \Leftrightarrow y = ze^{mx}$$

z vérifie alors

$$a(ze^{mx})" + b(ze^{mx})' + c(ze^{mx}) = e^{mx} p_n(x)$$

On va calculer les différentes dérivées

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} z(x) e^{mx} &= z'(x) e^{mx} + mz(x) e^{mx} \\ &= e^{mx}(z'(x) + mz(x)) \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} z(x) e^{mx} &= \frac{d}{dt} e^{mx}(z'(x) + mz(x)) \\ &= me^{mx}(z'(x) + mz(x)) + e^{mx}(z"(x) + mz'(x)) \\ &= e^{mx}(z"(x) + 2mz'(x) + m^2 z(x)) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} a(ze^{mx})" + b(ze^{mx})' + c(e^{mx}) &= ae^{mx}(z"(x) + 2mz'(x) + m^2 z(x)) + be^{mx}(z'(x) + mz(x)) + ce^{mx} z(x) \\ &= e^{mx}[az"(x) + (2am + b) z'(x) + (am^2 + bm + c) z(x)] \end{aligned}$$

Et z est solution de l'équation

$$az" + (2am + b) z' + (am^2 + bm + c) z = p_n(x)$$

On trouve comme précédemment z, puis $y = ze^{mx}$

■ **Exemple 5.3** $\frac{y"}{4} - \frac{y'}{2} - 2y = e^{-2x}(2x^2 - 3x + 1)$, on pose

$$z = e^{2x} y$$

Si y est solution, alors z est solution de

$$\frac{1}{4} z"(x) + \left(2\frac{1}{4}(-2) - \frac{1}{2}\right) z'(x) + \left(\frac{1}{4}(-2)^2 - \frac{1}{2}(-2) - 2\right) z(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{4} z" - \frac{3}{2} z' = 2x^2 - 3x + 1$$

Comme il n'y a pas de z, on doit chercher z d'un degré supérieur dont la constante n'importe pas puisqu'il va disparaitre dans la dérivation. z est alors sous la forme

$$z(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où d sera un réel/complexe libre. Calculons les dérivées :

$$z'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

et

$$z''(x) = 6ax + 2b$$

On injecte dans l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}z''(x) - \frac{3}{2}z'(x) &= \frac{1}{4}(6ax+2b) - \frac{3}{2}(3ax^2+2bx+c) \\
&= -\frac{9}{2}ax^2 + \left(\frac{3}{2}a - 3b\right)x + \left(\frac{b}{2} - \frac{3}{2}c\right) \\
&= 2x^2 - 3x + 1
\end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -\dfrac{9}{2}a = 2 \\ \dfrac{3}{2}a - 3b = -3 \\ \dfrac{b}{2} - \dfrac{3}{2}c = 1 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{9} \\ -\dfrac{2}{3} - 3b = -3 \\ \dfrac{b}{2} - \dfrac{3}{2}c = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{9} \\ b = \dfrac{7}{9} \\ \dfrac{7}{18} - \dfrac{3}{2}c = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{9} \\ b = \dfrac{7}{9} \\ c = \dfrac{-11}{27} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$z(x) = \frac{-4}{9}x^3 + \frac{7}{9}x^2 - \frac{11}{27}x + d$$

Et une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{-4}{9}x^3 + \frac{7}{9}x^2 - \frac{11}{27}x + d\right)$$

Les solutions homogènes sont

$$y_h(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$$

On a donc trouvé les solutions de notre équation

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\
&= e^{-2x}\left(\frac{-4}{9}x^3 + \frac{7}{9}x^2 - \frac{11}{27}x + d\right) + c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} \\
&= e^{-2x}\left(\frac{-4}{9}x^3 + \frac{7}{9}x^2 - \frac{11}{27}x + (d + c2)\right) + c_1e^{4x}
\end{aligned}$$

■

Cas $ay" + by' + cy = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

- Si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))$
- Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$

Cas général : $ay" + by' + cy = e^{mx}(A(x)cos(\omega x) + B(x)sin(\omega x))$

Une solution particulière est sous la forme

$$y_p(x) = x^p e^{mx}(\alpha(x)cos(\omega x) + \beta(x)sin(\omega x))$$

- Si $m + i\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, prendre $p = 0$
- Si $m + i\omega$ est une racine simple du polynôme caractéristique, prendre $p = 1$
- Si $m + i\omega$ est une racine double du polynôme caractéristique, prendre $p = 2$

Les degrés de α et de β sont difficilement généralisables. Le plus sûr est de prendre le plus grand des degrés de A et de B.

■ **Exemple 5.4** Résolvons l'équation

$$y" + 2y' + y = e^x(xcos(2x) - sin(2x))$$

Ici, $m = 1$ et $\omega = 2$. Comme $1 + 2i$ n'est pas racine de $X^2 + 2X + 1$, on prend $p = 0$ et la solution particulière est de la forme

$$y_p(x) = e^x(\alpha(x)cos(2x) + \beta(x)sin(2x))$$

où α et β sont de degrés 1. Donc

$$y_p(x) = e^x[(ax+b)cos(2x) + (cx+d)sin(2x)]$$

On peut calculer les dérivées

$$\begin{aligned}
y_p'(x) =& \frac{d}{dx}e^x[(ax+b)cos(2x) + (cx+d)sin(2x)] \\
=& e^x[(ax+b)cos(2x) + (cx+d)sin(2x)] \\
& + e^x[acos(2x) - 2(ax+b)sin(2x) + csin(2c) + 2(cx+d)cos(2x)] \\
=& e^x[((a+2c)x + (a+b+2d))cos(2x) + ((-2a+c)x + (-2b+c+d))sin(2x)]
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
y_p"(x) =& \frac{d}{dx}e^x[((a+2c)x + (a+b+2d))cos(2x) + ((c-2a)x + (d+c-2b))sin(2x)] \\
=& e^x[((a+2c)x + (a+b+2d))cos(2x) + ((-2a+c)x + (-2b+c+d))sin(2x)] \\
& + e^x[((-4a+2c)x + (a-4b+4c+2d))cos(2x) + ((-2a-4c)x + (-4a-2b+c-4d))sin(2x)] \\
=& e^x[((-3a+4c)x + (2a-3b+4c+4d))cos(2x) + ((-4a-3c)x + (-4a-4b+2c-3d))sin(2x)]
\end{aligned}$$

On insère tout ça dans l'équation

$$\begin{aligned}
& y_p" + 2y_p' + y_p = ... \\
& \qquad = e^x[(8cx + (4a+4c+8d))cos(2x) + (-8ax + (-4a-8b+4c))sin(2x)]
\end{aligned}$$

On cherche donc à résoudre

$$(8cx + (4a+4c+8d))cos(2x) + (-8ax + (-4a-8b+4c))sin(2x) = xcos(2x) - sin(2x)$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} 8c = 1 \\ 4a + 4c + 8d = 0 \\ -8a = 0 \\ -4a - 8b + 4c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} + 8d = 0 \\ a = 0 \\ -8b + \frac{1}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{8} \\ d = \frac{-1}{16} \\ a = 0 \\ b = \frac{3}{16} \end{cases}$$

Ces longs calculs fastidieux nous permettent de trouver une solution particulière

$$y_p(x) = e^x \left[\frac{3}{16} cos(2x) + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16} \right) sin(2x) \right]$$

La solution y_h homogène associé vérifie

$$y_h" + 2y_h' + y_h = 0$$

Comme 1 est racine double du polynôme caractéristique,

$$y_h(x) = (c_1 x + c_2)e^x$$

Et la solution à l'équation est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= (c_1 x + c_2)e^x + e^x \left[\frac{3}{16} cos(2x) + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16} \right) sin(2x) \right] \\ &= e^x \left[c_1 x + c_2 + \frac{3}{16} cos(2x) + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16} \right) sin(2x) \right] \end{aligned}$$

■

Cette manière fonctionne très bien, mais demande d'énormes calculs qu'on pourrait ne pas avoir envie de faire. Il existe une autre manière de résoudre des équations du second ordre, en utilisant la *transformation de Laplace*.

6. Transformation de Laplace

6.1 Définition

Définition 6.1.1 Soit $[0,+\infty[\colon\ \mathbb{R} \to$ continue. On appelle *transformée de Laplace de f* la fonction définie par

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

lorsqu'elle existe. Ici, $\mathscr{L}(f)$ est une fonction qui peut s'évaluer en un point, d'où la notation $\mathscr{L}(f)(s)$

■ **Exemple 6.1**

- Pour $f \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array} \right.$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} ce^{-sx}dx = \left[\frac{-ce^{-sx}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{s}$$

donc

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{c}{s} \end{array} \right.$$

- Pour $f \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cx \end{array} \right.$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} cte^{-sx}dx = \left[\frac{-cte^{-sx}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} ce^{-sx}dx = \frac{c}{s^2}$$

Donc

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{c}{s^2} \end{array} \right.$$

$$\int_0^{+\infty} cte^{-sx}dx = \left[\frac{-cte^{-sx}}{s}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} ce^{-sx}dx = \frac{c}{s^2}$$

■

6.2 Propriétés

6.2.1 $\mathbb{R}$-linéaire

L'application qui, à toutes fonctions continue, associe sa transformée de Laplace est $\mathbb{R}$-linéaire : $\forall (f,g) \in C^0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f+\lambda g)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}(f+\lambda g)(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-sx}(f(x)+\lambda g(x))dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-sx}g(x)dx \\
&= \mathscr{L}(f)(s) + \lambda \mathscr{L}(g)(s)
\end{aligned}$$

6.2.2 Quelques exemples

Voici quelques transformées qui pourront servir plus tard :

- $\mathscr{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
- $\mathscr{L}(te^{at})(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$
- $\mathscr{L}(sin(at))(s) = \frac{1}{a^2+s^2}$
- $\mathscr{L}(cos(at))(s) = \frac{1}{a^2-s^2}$
- $\mathscr{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

6.2.3 Dérivé

L'intérêt de la transformée de Laplace est le lien entre la transformé d'une fonction et celle de sa dérivé :

Théorème 6.2.1 $\forall f \in C^1$,

$$\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$$

Démonstration. On va utiliser l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f')(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}f'(x)dx \\
&= [e^{-sx}f(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -se^{-sx}f(x)dx \\
&= 0 - f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx \\
&= s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)
\end{aligned}$$

■

6.3 Transformée de Laplace inverse

Définition 6.3.1 On appelle *transformée de Laplace inverse* l'application réciproque de la transformée de Laplace. $\forall f,g \in C^0$,

$$\mathscr{L}(f)(s) = g(s) \Leftrightarrow \mathscr{L}^{-1}(g)(t) = f(t)$$

R Comme la transformée de Laplace est injective, trouver l'inverse revient à trouver l'application qui, lorsqu'on procède au transformée de Laplace, nous fait retomber sur la fonction de départ.

■ **Exemple 6.2**

- Avec $f \left| \begin{array}{lcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{s-1} \end{array} \right.$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}(f) \left| \begin{array}{lcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

- Avec $f \left| \begin{array}{lcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{s-1}{s^2-9} \end{array} \right.$, on a

$$\mathscr{L}^{-1}(f) \left| \begin{array}{lcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{e^{-3t}}{3} \end{array} \right.$$

En effet, comme $g(x) = \frac{s-1}{s^2-9} = \frac{s-1}{(s-3)(s+3)} = \frac{2/3}{s-3} + \frac{1/3}{s+3}$, par linéarité

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}(g) &= L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2-9}\right) \\ &= \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) \\ &= \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{e^{-3x}}{3} \end{aligned}$$

■

6.4 Application aux équations différentielles

6.4.1 Équation linéaire du 1^{er} ordre

Si on veut résoudre $ay' + by = g(x)$, on peut procéder ainsi

$$\begin{aligned} ay' + by = g(x) &\Rightarrow \mathscr{L}(ay' + by) = \mathscr{L}(g) \\ &\Rightarrow a\mathscr{L}(y') + b\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(g) \\ &\Rightarrow a[x\mathscr{L}(y) - y(0)] + b\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(g) \\ &\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \frac{\mathscr{L}(g) + ay(0)}{ax+b} \\ &\Rightarrow y = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}(g) + ay(0)}{ax+b}\right) \end{aligned}$$

■ **Exemple 6.3** On veut résoudre

$$\begin{cases} y' + y = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

avec la transformée de Laplace

$$
\begin{aligned}
y' + y = 3 &\Rightarrow \mathscr{L}(y'+y) = \mathscr{L}(3) \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = \frac{3}{x} \\
&\Rightarrow x\mathscr{L}(y) - y(0) + \mathscr{L}(y) = \frac{3}{x} \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y)(x+1) = \frac{3}{x} + 1 \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \frac{3+x}{x(x+1)} \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} \\
&\Rightarrow y = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1}\right) \\
&\Rightarrow y = 3 - 2e^{-x}
\end{aligned}
$$

■

6.4.2 Équation linéaire de second ordre

Comme pour les équations du premier ordre, on peut résoudre des équations du second ordre comme dans cette exemple :

■ **Exemple 6.4** On résout

$$
\begin{cases}
y" + 2y' + y = xe^x \\
y(0) = \\
t'(0) = 0
\end{cases}
$$

avec la transformée de Laplace

$$\begin{aligned}
y" + 2y' + y = xe^x &\Rightarrow \mathscr{L}(y" + 2y' + y) = \mathscr{L}(xe^x) \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y") + 2\mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2} \\
&\Rightarrow [x\mathscr{L}(y') - y'(0)] + 2[x\mathscr{L}(y) - y(0)] + \mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2} \\
&\Rightarrow x[x\mathscr{L}(y) - y(0)] + 2x\mathscr{L}(y) + \mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2 \\
&\Rightarrow x^2\mathscr{L}(y) + 2x\mathscr{L}(y) + \mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2 + x \\
&\Rightarrow (x^2 + 2x + 1)\mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2 + x \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^2} \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \left[\frac{1/4}{x+1} - \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{(x+1)^2}\right] \\
&\qquad + \frac{2}{(x+1)^2} + \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] \\
&\Rightarrow \mathscr{L}(y) = \frac{3/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{5/4}{(x+1)^2} \\
&\Rightarrow y = \frac{5e^x}{4} - \frac{e^{-x}}{4} + \frac{xe^x}{4} + \frac{5xe^{-x}}{4}
\end{aligned}$$

■

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut constamment développer les fractions en éléments simples pour pouvoir trouver la transformée inverse. Mais elle permet au moins de résoudre des équations d'ordre supérieur

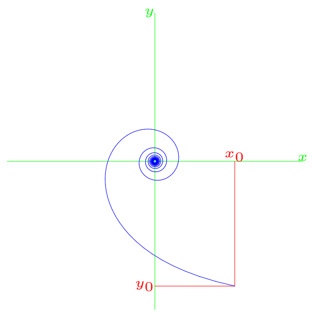
7. Stabilité des systèmes linéaires

On considère un système linéaire

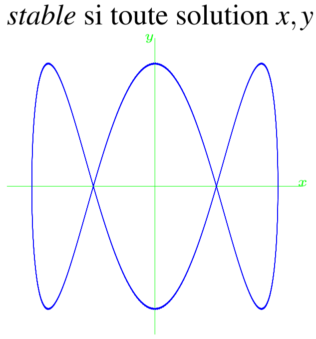
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Définition 7.0.1 On dit qu'un système linéaire est :

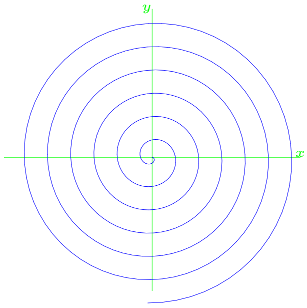
- *asymptotiquement stable* si $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = 0$ pour toute solution x, y



- *stable* si toute solution x, y est bornée sur $\mathbb{R}_+$



- *instable* si il existe une solution x, y qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$



Théorème 7.0.1 Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A associées au système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors le système est :

- *asymptotiquement stable* si et seulement si $Re(\lambda_1) < 0$ et $Re(\lambda_2) < 0$
- *stable* si et seulement si $Re(\lambda_1) \leq 0$, $Re(\lambda_2) \leq 0$ et si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $A = 0$. En langage propositionnel :

$$(Re(\lambda_1) \leq 0) \text{ et } (Re(\lambda_2) \leq 0) \text{ et } [(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \Rightarrow (A = 0)]$$

- *instable* si et seulement si $Re(\lambda_1) > 0$, $Re(\lambda_2) > 0$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $A = 0$. En langage propositionnel :

$$(Re(\lambda_1) > 0) \text{ ou } (Re(\lambda_2) > 0) \text{ ou } [(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \text{ et } (A = 0)]$$

■ **Exemple 7.1** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est instable :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ct \\ y = c \end{cases} c \in \mathbb{R}$$

Toutes les solutions divergent vers l'infini sauf pour la solution $x = 0$ et $y = 0$ ■