Chapitre 4

Equations différentielles

Ce chapitre est une première étude des équations différentielles, il vous sera d'abord utile en physique et en TI. Chacun à sa petite méthode, voici celle du matheux.

4.1 Introduction

Tout d'abord, une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction, notée en général y, de variable x, i.e. on cherche les $y(x)$ qui vérifient l'équation. Un exemple l'équation différentielle $y' = x$ signifie que l'on cherche les fonctions $y(x)$ telles que la dérivée de y est x, i.e. on cherche les primitives de x, les solutions sont donc les primitives de x i.e. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + K$ où K est une constante. Attention, il faut être vigilant sur l'**intervalle** d'étude, par exemple si l'on considère l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$, on travaillera soit sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_+^*$, soit sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_-^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \ln(x) + K$ où K est une constante, sur $\mathbb{R}_-^*$, les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \ln(-x) + K$ où K est une constante. Si on cherche une solution sur $\mathbb{R}^*$, il y a donc une constante par intervalle.

Une équation différentielle sera du premier ordre si elle ne contient que du y et du y', elle sera du second ordre si elle contient du y, y' et y''. Les plus simples (celles que l'on sait à peu près résoudre facilement !!!) sont les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Une équation différentielle est dite linéaire si elle est de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (ici du premier ordre) où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions de x, $c(x)$ est appelé second membre (de l'équation). On dit que l'équation différentielle linéaire est à coefficients constants si $a(x)$ et $b(x)$ sont des applications constantes. Comme on le verra par la suite, on s'intéresse d'abord aux équations différentielles homogènes ou sans second membre, i.e. de la forme $ay' + by = 0$. Cette année, seules les équations différentielles du premier ordre, les équations différentielles du second ordre à coefficients constants et les équations différentielles à variables séparées seront étudiées, il y en a tant d'autres .... Dans ce chapitre, on n'étudie que les équations différentielles linéaires du premier et deuxième ordre à coefficients constants. On reprendra cette étude avec l'outil algébrique dans un prochain chapitre, avec les coefficients qui varient (chaud) et les équations différentielles à variables séparées (chaud grave).

4.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

4.2.1 Equation sans second membre (ESSM)

On considère les équations différentielles de la forme

$$ay' + by = 0$$

où a et b sont des réels fixés avec a non nul ! On remarque tout d'abord que la fonction nulle est solution (cela est toujours le cas pour les équations différentielles **linéaires**). Supposons maintenant qu'il existe une solution y strictement positive sur un **intervalle** I. L'équation peut alors s'écrire $\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$, en intégrant on obtient directement $\ln(y) = -\frac{b}{a}x + K$, où K est une constante, on en déduit alors que $y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$ où $\lambda = e^K$. Premier réflexe, on constate que l'on n'a pas de contradiction, la fonction trouvée est bien strictement positive, deuxième réflexe, on ne conclut pas ! Ceci nous donne une idée de la réponse. On va maintenant raisonner par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} ay' + by = 0 & \Longleftrightarrow & y' + \frac{b}{a}y = 0 & \text{car } a \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & y'e^{\frac{b}{a}x} + \frac{b}{a}e^{\frac{b}{a}x}y = 0 & \text{car } e^{-\frac{b}{a}x} \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & \left(e^{\frac{b}{a}x}y\right)' = 0 & \\ & \Longleftrightarrow & e^{\frac{b}{a}x}y = \lambda & \lambda \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow & y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Il est à noter que l'ensemble des solutions est plus vaste que celui trouvé précédemment et que l'on retrouve la solution de la fonction nulle pour $\lambda = 0$.

4.2.2 Equation avec second membre

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation différentielle

$$ay' + by = c(x)$$

où $c(x)$ est une fonction de variable x.

La première précaution est de se placer sur un **intervalle** où $c(x)$ est bien défini ! Par exemple, si $c(x) = \frac{1}{x}$, on travaillera soit sur $\mathbb{R}_+^*$, soit sur $\mathbb{R}_-^*$. Ici, il y aura rarement de telles finesses. La fonction $c(x)$ sera un produit d'un polynôme avec une fonction exponentielle ou trigonométrique.

Pour résoudre ce genre d'équation, on résout tout d'abord l'équation sans second membre, puis on cherche une solution particulière y_0, la solution générale est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x} + y_0(x), \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

En effet, si y est solution de l'équation différentielle $ay' + by = c(x)$, on sait que y_0 l'est aussi, on peut alors écrire :

$$\begin{array}{ccccc} & a.y' & + & b.y & = & c(x) \\ - & a.y_0' & + & b.y_0 & = & c(x) \\ \hline & a.(y - y_0)' & + & b.(y - y_0) & = & 0 \end{array}$$

On a ici utilisé la linéarité de la dérivation, ce genre de raisonnement est du à la linéarité de l'équation.

Donc, on constate que $y - y_0$ est solution de l'équation sans second membre, donc $y - y_0 = e\lambda^{-\frac{b}{a}x}$, i.e. $y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x} + y_0$.

4.2.3 Exemples

Premier exemple : méthode de base

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y' + 2y = x^2 - x + 1$$

- L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:

  $$y' + 2y = 0$$

  Les solutions sont :

  $$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathsf{R}\}}$$

  Pensez bien à vérifier que e^{-2x} est solution ! Ca va vite.
- Une solution particulière :
  On cherche le plus souvent une solution de la forme du second membre, en l'occurrence un polynôme de degré 2, attention, ce n'est pas dit que ça s'avère efficace mais c'est une bonne piste en général. On pose donc $y_0 = ax^2 + bx + c$, on a donc

  $$y_0' + 2y_0 = 2ax^2 + (2b + 2a)\,x + (2c + b) = x^2 - x + 1$$

  Par identification, on est amené à résoudre le système suivant :

  $$\begin{cases} 2a & & & = & 1 \\ 2a & + & 2b & & = & -1 \\ & & b & + & 2c & = & 1 \end{cases}$$

  On trouve sans peine $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = 1$, i.e.

  $$\boxed{y_0 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1}$$

  Vérifiez bien que y_0 est solution.
- Conclusion :
  Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

  $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x + 1, \lambda \in \mathsf{R}\right\}}$$

On peut ensuite déterminer la solution vérifiant une condition particulière, par exemple $y\,(0) = 0$ (on trouve $\lambda = -1$) ou $y'\,(0) = 0$ (on trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$).

Deuxième exemple : variation de la constante.

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y' + y = e^{-x} \cos{(x)}$$

- L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:

  $$y' + y = 0$$

  Les solutions sont :

  $$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathsf{R}\}}$$

  Pensez bien à vérifier que e^{-x} est solution ! Ca va vite.

– Une solution particulière :
On pourrait chercher une solution de la forme du second membre mais ici il faut prendre $y_0 = (a\cos(x) + b\sin(x))\,e^{-x}$. Une autre méthode consiste à prendre une solution de la forme des solutions de l'équation sans second membre, en considérant λ non pas comme une constante mais comme une application, i.e. $y_0 = \lambda(x)\,e^{-x}$, cette méthode s'appelle **la variation de la constante**. On a $y_0'(x) = \lambda'(x)\,e^{-x} - \lambda(x)\,e^{-x}$, d'où :

$$y_0' + y_0 = \lambda'(x)\,e^{-x} = e^{-x}\cos(x)$$

Les $\lambda(x)$ se sont simplifiés, c'est un bon moyen de vérifier ! On a donc après simplification $\lambda'(x) = \cos(x)$, on prend donc $\lambda(x) = \sin(x)$ (on rappelle que l'on cherche **une** solution particulière)

$$\boxed{y_0 = e^{-x}\sin(x)}$$

Vérifiez bien que y_0 est solution.

– Conclusion :
Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto (\lambda + \sin(x))\,e^{-x}, \lambda \in \mathsf{R}\}}$$

On peut ensuite déterminer la solution vérifiant une condition particulière, par exemple $y(0) = 0$ (on trouve $\lambda = 0$) ou $y'(0) = 0$ (on trouve $\lambda = 1$).

Troisième exemple : principe de superposition.

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y' - 3y = 2ch(3x)$$

– L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:

$$y' - 3y = 0$$

Les solutions sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathsf{R}\}}$$

Pensez bien à vérifier que e^{3x} est solution ! Ca va vite.

– Une solution particulière :
On pourrait chercher une solution de la forme du second membre mais ici il faut prendre $y_0 = (a.ch(3x) + b.sh(3x))\,e^{-x}$. Toutefois, on remarque que $2ch(3x) = e^{3x} + e^{-3x}$, on va chercher une solution y_1 pour le second membre e^{3x} et une solution y_2 pour le second membre e^{-3x}, une solution pour le second membre $2.ch(3x)$ sera $y_0 = y_1 + y_2$, c'est ce que l'on appelle le principe de superposition.
$\star$ Pour y_1, on remarque que e^{3x} est solution de l'équation sans second membre, on ne peut donc prendre y_1 de la forme λe^{3x}, on applique donc la méthode de la variation de la constante, on pose donc $y_1(x) = \lambda(x)\,e^{3x}$, en remplaçant dans $y' - 3y = e^{3x}$, on trouve $\lambda'(x)\,e^{3x} = e^{3x}$, i.e. $\lambda'(x) = 1$, on prendra donc $\lambda(x) = x$, et par conséquent $y_1 = xe^{3x}$.
$\star$ Pour y_2, on prend $y_2 = \mu e^{-3x}$, en remplaçant dans $y' - 3y = e^{-3x}$, on trouve $-6\lambda e^{-3x} = e^{-3x}$, il suffit de prendre $\lambda = -\frac{1}{6}$, on a donc $y_2 = -\frac{1}{6}e^{-3x}$.

$$\boxed{y_0 = xe^{3x} - \tfrac{1}{6}e^{-3x}}$$

Vérifiez bien que y_0 est solution si vous avez le courage.

– Conclusion :
Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto (\lambda + x)\,e^{3x} - \tfrac{1}{6}e^{-3x}, \lambda \in \mathsf{R}\right\}}$$

4.3 Equations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

4.3.1 Equation sans second membre (ESSM)

On considère les équations différentielles de la forme

$$ay'' + by' + cy = 0$$

où a, b et c sont des réels fixés avec a non nul ! On remarque tout d'abord que la fonction nulle est solution (cela est toujours le cas pour les équations différentielles **linéaires**). On a vu pour le premier ordre l'importance des fonctions exponentielles, on considère donc une fonction $y = e^{rx}$ où r est un réel fixé et on va chercher une condition sur r pour que e^{rx} soit solution. On remarque que $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, l'équation différentielle devient donc $(ar^2 + br + c)\, e^{rx} = 0$ or e^{rx} ne s'annule jamais, donc ceci équivaut à

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

C'est ce que l'on appelle l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle. La forme des solutions de l'équation différentielle dépend du discriminant :

Théorème 31
Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de l'équation différentielle sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}; \lambda, \mu \in \mathsf{R}\}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution double r_0, les solutions de l'équation différentielle sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (ax + b)\, e^{r_0x}; a, b \in \mathsf{R}\}$$

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions imaginaires distinctes $\alpha \pm i\beta$, les solutions de l'équation différentielle sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto e^{\alpha x}\, (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))\, ; \lambda, \mu \in \mathsf{R}\}$$

On remarque que dans les trois cas, les solutions sont des combinaisons linéaires (équations linéaires) de deux fonctions (du deuxième ordre).

Preuve. Nous allons faire la preuve pour les deux premiers cas :
• Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, on sait d'ores et déjà que e^{r_1x} et e^{r_2x} sont solutions (a fortiori $\lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$ puisque l'équation est linéaire). On va utiliser l'astuce de la démonstration pour le premier ordre, on considère donc $z = y.e^{-r_1x}$ ou encore $y = z.e^{r_1x}$. On a $y' = z'.e^{r_1x} + r_{1.}z.e^{r_1x}$ et $y'' = z''.e^{r_1x} + 2r_1.z'.e^{r_1x} + r_1^2.z.e^{r_1x}$ et on remarque que

$$\{ay'' + by' + cy = 0\} \Longleftrightarrow \{y'' - (r_1 + r_2)\, y' + r_1r_2y = 0\}$$

l'équation différentielle devient donc $(z'' - (r_2 - r_1)\, z')\, e^{r_1x} = 0$, i.e. z vérifie $z'' - (r_2 - r_1)\, z' = 0$ ou encore z' vérifie $u' - (r_2 - r_1)\, u = 0$. On en déduit donc que $z' = \alpha e^{(r_2-r_1)x}$, donc en intégrant on a $z = \lambda + \mu e^{(r_2-r_1)x}$ (avec $\mu = \frac{\alpha}{r_2-r_1}$) , finalement $y = z.e^{r_1x} = \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}$.
• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solution double r_0, on sait d'ores et déjà que e^{r_0x}est solution (a fortiori λe^{r_0x} puisque l'équation est linéaire). On va encore utiliser l'astuce de la démonstration pour le premier ordre, on considère donc $z = y.e^{-r_0x}$ ou encore $y = z.e^{r_0x}$. On a $y' = z'.e^{r_0x} + r_0z.e^{r_0x}$ et $y'' = z''.e^{r_0x} + 2r_0.z'.e^{r_0x} + r_0^2.z.e^{r_0x}$ et on remarque que

$$\{ay'' + by' + cy = 0\} \Longleftrightarrow \left\{y'' - 2r_0y' + r_0^2y = 0\right\}$$

l'équation différentielle devient donc $z''e^{r_0x} = 0$ ou encore $z'' = 0$, en intégrant, on a $z' = a$, en intégrant une nouvelle fois, on a $z = ax + b$, donc on a bien $y = (ax + b)\, e^{r_0x}$. ∎

4.3.2 Equation avec second membre

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

où $d(x)$ est une fonction de variable x.

La première précaution est de se placer sur un **intervalle** où $d(x)$ est bien défini ! Par exemple, si $d(x) = \frac{1}{x}$, on travaillera soit sur R_+^*, soit sur R_-^*. Ici, il y aura rarement de telles finesses. La fonction $d(x)$ sera un produit d'un polynôme avec une fonction exponentielle ou trigonométrique.

Pour résoudre ce genre d'équation, on résout tout d'abord l'équation sans second membre, puis on cherche une solution particulière y_0, la solution générale est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto u + y_0(x), \lambda \in \mathsf{R}, u \in \mathcal{S}_0\}}$$

En effet, si y est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, on sait que y_0 l'est aussi, on peut alors écrire :

$$\begin{array}{crcrcrcl} & a.y'' & + & b.y' & + & c.y & = & d(x) \\ - & a.y_0'' & + & b.y_0' & + & c.y_0 & = & d(x) \\ \hline & a.(y-y_0)'' & + & b.(y-y_0)' & + & c.(y-y_0) & = & 0 \end{array}$$

On a ici utilisé la linéarité de la dérivation, ce genre de raisonnement est du à la linéarité de l'équation.

Donc, on constate que $y - y_0$ est solution de l'équation sans second membre, donc $y - y_0 = u$ avec $u \in \mathcal{S}_0$, i.e. $y = u + y_0$.

4.3.3 Exemples

Premier exemple : méthode de base

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y'' + y' - 2y = x^2 + 2x - 1$$

- L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:
  $$y'' + y' - 2y = 0$$
  L'équation caractéristique est
  $$r^2 + r - 2 = 0$$
  Le discriminant Δ vaut 9, on a deux racines réelles 1 et -2 (évidentes !)
  Les solutions sont :
  $$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}; \lambda, \mu \in \mathsf{R}\}}$$
  Pensez bien à vérifier que e^x et e^{-2x} sont solutions ! Ca va vite.
- Une solution particulière :
  On cherche le plus souvent une solution de la forme du second membre, en l'occurrence un polynôme de degré 2, attention, ce n'est pas dit que ça s'avère efficace mais c'est une bonne piste en général. On pose donc $y_0 = ax^2 + bx + c$, on a donc
  $$y'' + y' - 2y = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c) = x^2 + 2x - 1$$
  Par identification, on est amené à résoudre le système suivant :
  $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2a & & & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & & & = & 2 \\ 2a & + & b & - & 2c & = & 1 \end{array}\right.$$

On trouve sans peine $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = -\frac{3}{4}$, i.e.

$$\boxed{y_0 = -\frac{1}{4}\left(2x^2 + 6x + 3\right)}$$

Vérifiez bien que y_0 est solution.

– Conclusion :
  Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\left(2x^2 + 6x + 3\right); \lambda, \mu \in \mathsf{R}\right\}}$$

On peut ensuite déterminer la solution vérifiant deux conditions particulières, par exemple $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ (on trouve $\lambda = \frac{7}{3}$ et $\mu = -\frac{7}{12}$)

Deuxième exemple : variation de la constante.

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y'' - 4y' + 4y = \left(x^2 - 1\right) e^{2x}$$

– L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

  L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

  Le discriminant Δ vaut 0, on a une racine double réelle 2 (évidente !)
  Les solutions sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (ax + b) e^{2x}; a, b \in \mathsf{R}\}}$$

  Pensez bien à vérifier que e^{2x} est solution ! Ca va vite.

– Une solution particulière :
  On pourrait chercher une solution de la forme du second membre mais ici on remarque que e^{2x} est solution de l'équation sans second membre. On va appliquer la méthode de la variation de la constante : on cherche donc une solution particulière de la forme. $y_0 = \lambda(x) e^{2x}$. On a $y_0' = \lambda'(x) e^{2x} + 2\lambda(x) e^{2x}$ et $y_0'' = \lambda''(x) e^{2x} + 4\lambda'(x) e^{2x} + 4\lambda(x) e^{2x}$, d'où :

$$y_0'' - 4y_0' + 4y_0 = \lambda''(x) e^{2x} = \left(x^2 - 1\right) e^{2x}$$

  Les $\lambda(x)$ se sont simplifiés, c'est un bon moyen de vérifier ! On a donc après simplification $\lambda''(x) = x^2 - 1$, on prend donc $\lambda(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ (on rappelle que l'on cherche **une** solution particulière)

$$\boxed{y_0 = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) e^{2x}}$$

  Vérifiez bien que y_0 est solution.

– Conclusion :
  Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + ax + b\right) e^{2x}; a, b \in \mathsf{R}\right\}}$$

Troisième exemple : principe de superposition.

On considère l'équation differentielle $(\mathcal{E})$:

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 2\cos(3x)$$

– L'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$:
$$y'' + 2y' + 5y = 0$$
L'équation caractéristique est
$$r^2 + 2r + 5 = 0$$
Le discriminant Δ vaut -16, on a deux racines complexes conjuguées $-1 \pm 2i$.
Les solutions sont :
$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x))\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}}$$

– Une solution particulière :
On va appliquer ici le principe de superposition, on va chercher une solution y_1 pour le second membre $4e^{-x}$ et une solution y_2 pour le second membre $2\cos(3x)$, la solution particulière sera $y_0 = y_1 + y_2$.
$\star$ Pour y_1, on remarque que e^{-x} n'est pas solution de l'équation sans second membre, on peut donc prendre y_1 de la forme αe^{-x}, en remplaçant dans l'équation $y''+2y'+5y = 4e^{-x}$, on trouve $4\alpha e^{-x} = 4e^{-x}$, donc $\alpha = 1$ et par conséquent $y_1 = e^{-x}$.
$\star$ Pour y_2, on prend y_2 de la forme $a\cos(3x) + b\sin(3x)$, en remplaçant dans $y'' + 2y' + 5y = 2\cos(3x)$, on trouve$(-4a + 6b)\cos(3x) + (-6a - 4b)\sin(3x) = 2\cos(3x)$, il suffit donc de résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & + & 6b & = & 2 \\ -6a & - & 4b & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & - & 3b & = & 1 \\ 9a & + & 6b & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & - & 3b & = & 1 \\ 13a & & & = & -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -\frac{2}{13} \\ b & = & \frac{3}{13} \end{array}\right.$$
On a donc $y_2 = -\frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)$.

$$\boxed{y_0 = e^{-x} - \frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)}$$

– Conclusion :
Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) + e^{-x} - \frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}}$$