## TD 2 - Equations du premier et second ordre - Corrigé

### Exercice 1 :

On s'intéresse au modèle de Verhulst : contrairement au modèle de Malthus, on ne suppose plus que les taux de natalités et mortalités sont constants, mais dépendent du nombre d'individus ($\nu(t)$ et $\mu(t)$). Il s'agit de modéliser les propriétés suivantes (ce sont encore une fois des choix que l'on fait) :

- S'il y a peu d'individus, la population a tendance à croître
- Plus il y a d'individus, plus le taux de mortalité est grand, et plus le taux de natalité est bas

Pour représenter ceci, on suppose que la différence $r(t) = \nu(t) - \mu(t)$ est de la forme $r(t) = r - aN(t)$, avec $r > 0$ (pour obtenir le premier point) et $a > 0$ (pour obtenir le second). Comme dans le modèle de Malthus, $r(t)$ représente le taux d'accroissement (même s'il dépend ici du temps), et l'on a alors une équation de la forme :

$$N(t + dt) = N(t) + (r - aN(t))N(t)dt$$

qui donnera l'équation différentielle $N'(t) = r(1 - (a/r)N(t))N(t)$, ie, posant $k = r/a$ :

$$N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)N(t) \quad (2)$$

2. L'énoncé nous invite à chercher une solution constante, et l'on procède alors comme dans l'exercice 1 : on pose $N(t) = c$, on a donc $N'(t) = 0$, et l'on reporte dans (2) pour obtenir une condition sur la constante $c$. On obtient $0 = r(1 - c/k)c$, ie $c = 0$ ou $c = k$. Les fonctions constantes $N(t) = 0$ et $N(t) = k$ sont donc des solutions particulières pour l'équation (2).

3. Puisque l'équation (2) n'est pas linéaire, et donc plus difficile à résoudre, l'énoncé nous en donne directement une solution, et nous demande simplement de vérifier qu'elle en est une. On nous donne $N(t) = k/(1 + \frac{1}{C}e^{-rt})$, avec $C$ réel, et l'on a donc :

$$r\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right)N(t) = r\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{C}e^{-rt}}\right).\frac{k}{1 + \frac{1}{C}e^{-rt}} = \frac{rk}{C}.\frac{e^{-rt}}{(1 + \frac{1}{C}e^{-rt})^2}$$

Par ailleurs, on calcule la dérivée (utilisant la formule $(1/u)' = -u'/u^2$) :

$$N'(t) = -k\frac{-\frac{r}{C}e^{-rt}}{(1 + \frac{1}{C}e^{-rt})^2} = \frac{rk}{C}.\frac{e^{-rt}}{(1 + \frac{1}{C}e^{-rt})^2}$$

Puisque l'on obtient les mêmes expressions, on a bien que $N'(t) = r(1 - N(t)/k)N(t)$, ie la fonction proposée est bien solution de (2). On notera que ceci est bien indépendant de la valeur de la constante $C$, laquelle permettra en fait de satisfaire la condition initiale.

*Remarque :* L'énoncé nous fournit alors un ensemble de solutions à l'équation différentielle (2), mais rien ne nous assure qu'elles sont toutes de cette forme (les solutions constantes 0 et $k$ ne sont d'ailleurs pas de cette forme, il faudrait prendre respectivement $C \to 0^+$ et $C \to +\infty$). Il faut garder ceci à l'esprit.

Ce n'était pas demandé, mais l'on pouvait utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre (2) directement. Si l'on suppose que $N(t)$ est toujours distinct de 0 ou $k$ (auquel cas, on retrouve nos deux solutions constantes), on peut réecrire (2) sous la forme :

$$\frac{N'(t)}{N(t)(k-N(t))}=\frac{r}{k} \quad \text{ie} \quad \frac{1}{N(k-N)}dN=\frac{r}{k}dt$$

Il nous faut donc calculer une primitive à la fonction $N \mapsto \frac{1}{N(k-N)}$. Pour cela, on la décompose en éléments simples, ie on cherche des constantes $a$ et $b$ telles que :

$$\frac{1}{N(k-N)}=\frac{a}{N}+\frac{b}{k-N}$$

Passant au même dénominateur l'expression de droite, on obtient l'égalité $1 = a(k-N)+bN$, ie $(b-a)N+ak = 1$. Par identification, il faut alors avoir $b-a = 0$ et $ak = 1$, ie $a = b = 1/k$. Ainsi, on a obtenu que $\frac{1}{N(k-N)} = \frac{1}{k}(\frac{1}{N}+\frac{1}{k-N})$, et l'on peut alors en calculer facilement une primitive : $\frac{1}{k}(\ln(N)-\ln(k-N))$. On a donc finalement :

$$\tfrac{1}{k}(\ln(N)-\ln(k-N)) = \tfrac{r}{k}t+K, K \in \mathbf{R}$$

On déduit que $\ln(N/(k-N)) = rt+kK$, ie $N/(k-N) = e^{rt+kK}$, ou encore $N = (k-N)e^{rt+kK}$, puis $N(1+e^{rt+kK}) = ke^{rt+kK}$, ie $N(e^{-rt}e^{-kK}+1) = k$, et donc, finalement, notant $C = e^{kK}$ :

$$N(t)=\frac{k}{1+\frac{1}{C}e^{-rt}}$$

4. On veut satisfaire la condition initiale $N(0) = N_0$, avec $N_0 < k$, et l'on a donc, reportant dans l'expression précédente, $N_0 = N(0) = k/(1+1/C)$. Ceci donne que $1+1/C = k/N_0$, ie $1/C = (k-N_0)/N_0$, ie $C = N_0/(k-N_0)$ (qui est positif puisque l'on a supposé que $N_0 < k$).

5. Puisque $r > 0$, $e^{-rt}$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, et donc $N(t)$ tend vers $k$ en $+\infty$. Cette valeur de $k$ représente la capacité d'accueil du milieu : si la population est plus grande que $k$, elle diminuera, et si elle est plus petite que $k$, elle augmentera.

**Rappels sur les équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :**

Il s'agit des équations de la forme $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f(x)$ $(E)$, où $a, b, c$ sont des constantes. Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, on commence d'abord par étudier l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière sous une certaine forme.

Pour résoudre l'équation homogène $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$ $(H)$, on s'appuie sur l'observation suivante : si l'on prend $y(x) = e^{rx}$ avec $r$ constante, on a $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$, et l'on a donc que $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = (ar^2+br+c)e^{rx}$, de sorte que $y(x) = e^{rx}$ est solution de $(H)$ ssi $r$ est racine du polynome $P_C = aX^2+bX+c$. On note $\Delta = b^2-4ac$, le discriminant de ce polynome, et on aura alors les résultats suivants :

- Si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, et l'ensemble des solutions homogènes est constitué des fonctions $\lambda e^{r_1x}+\nu e^{r_2x}$, avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.
- Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$, et l'ensemble des solutions homogènes est constitué des fonctions $\lambda\cos(\beta x)e^{\alpha x}+\nu\sin(\beta x)e^{\alpha x}$, avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.
- Si $\Delta = 0$, on a une racine double $r$, et l'ensemble des solutions homogènes est constitué des fonctions $\lambda e^{rx}+\nu xe^{rx}$, avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

*Remarque :* Si $\Delta <$, et $z_\pm = \alpha \pm i\beta$ sont les deux racines complexes conjuguées du polynome caractéristique, on vérifie sans mal que les fonctions de la forme $\lambda e^{z_+ x} + \nu e^{z_- x}$ sont bien solutions de l'équation homogène $(H)$. Seulement, ce sont des solutions à valeurs complexes, et on leur préfère souvent des solutions réelles : on choisit alors de prendre pour solutions de $(H)$ les parties réelles et imaginaires de $e^{z_\pm x}$, ie $\cos(\beta x)e^{\alpha x}$ et $\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ (on peut le faire, puisqu'on travaille en linéaire).

Maintenant, pour obtenir l'ensemble des solutions générales de $(E)$, il nous faut encore en trouver une solution particulière. S'il existe une méthode de variation de la constante pour l'ordre 2, on s'en tient pour l'instant au cas où le second membre est de la forme $f(x) = P(x)e^{\gamma x}$, avec $P(x)$ polynome, et $\gamma$ constante. On a les résultats suivants :

- Si $\gamma$ n'est pas racine du polynome caractéristique $P_C$, on cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
- Si $\gamma$ est racine simple de $P_C$, on cherche une solution particulière sous la forme $xQ(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
- Si $\gamma$ est racine double de $P_C$, on cherche une solution particulière sous la forme $x^2Q(x)e^{\gamma x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$.

*Remarque :* Si le second membre est de la forme $P(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x}$ ou $P(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$, il s'agit en fait des parties réelles et imaginaires de $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$, et l'on va donc regarder si $\gamma = \alpha + i\beta$ est ou non racine de $P_C$. On cherchera alors une solution particulière sous la forme $x^kQ(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$, ce qui donnera, ramené en réel, une solution particulière sous la forme $Ax^kQ(x)\cos(\beta x)e^{\alpha x} + Bx^kQ(x)\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ ($k = 0, 1$ ou $2$, selon les cas).

Une fois la solution particulière obtenue, on déduit l'expression générale des solutions de $(E)$ en ajoutant l'ensemble des solutions homogènes.

**Exercices 2 et 3 :**

Dans chacun des cas, il s'agit d'équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants, et avec un second membre de la forme polynome/exponentielle. On appliquera alors systématiquement la méthode vue en cours : équation homogène, équation caractéristique, calcul de ses racines, solutions homogènes, recherche d'une solution particulière sous une certaine forme (adaptée au second membre).

1. On veut résoudre $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = xe^{-x}$ $(E)$

Equation homogène : $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$ $(H)$.

Equation caractéristique : $X^2 + X - 2 = 0$ : $\Delta = -1 - 4.(-2) = 9$, d'où les racines $r_\pm = (-1 \pm 3)/2$ ie $r_+ = 1$ et $r_- = -2$.

On a donc pour solutions homogènes les fonctions de la forme $\lambda e^x + \nu e^{-2x}$, $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

L'argument de l'exponentielle du second membre $xe^{-x}$ est $\gamma = -1$, qui n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax+b)e^{-x}$. On dérive : $y'(x) = -(ax + b)e^{-x} + ae^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$ et $y''(x) = -(-a + a - b)e^{-x} - ae^{-x} = (ax + b - 2a)e^{-x}$. On réinjecte maintenant dans l'équation $(E)$ pour obtenir :

$$(ax + b - 2a)e^{-x} + (-ax + a - b)e^{-x} - 2(ax + b)e^{-x} = xe^{-x}, \text{ ie } -2ax - 2b - a = x$$

Par identification, on veut donc avoir $-2a = 1$ et $-2b - a = 0$, ie $a = -1/2$ et $b = 1/4$. Une solution particulière de $(E)$ est donc $(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^{-x}$, et l'ensemble des solutions générales de $(E)$ est obtenu en sommant avec les solutions homogènes : $y(x) = \lambda e^x + \nu e^{-2x} + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^{-x}$, avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

2. On veut résoudre $y''(x) + 4y(x) = x^2$.

Equation homogène : $y''(x) + 4y(x) = 0$ $(H)$.

Equation caractéristique : $X^2 + 4 = 0$ : $\Delta = 0^2 - 4.4 = -16$, d'où les racines complexes conjuguées $r_\pm = (-0 \pm 4i)/2$, ie $r_+ = 2i$ et $r_- = -2i$ (pour reprendre les notations du cours, on a $\alpha = 0$ et $\beta = 2$).

Les solutions homogènes sont les fonctions de la forme $\lambda\cos(2x)e^{0x} + \nu\sin(2x)e^{0x}$, ie $\lambda\cos(2x) + \nu\sin(2x)$, avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

L'argument de l'exponentielle du second membre $x^2 = x^2e^{0x}$ est $\gamma = 0$, qui n'est pas racine du polynome caractéristique, donc on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$. On dérive : $y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$. On réinjecte dans $(E)$ pour obtenir $(2a) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2$, ie $4ax^2 + 4bx + (4c + 2a) = x^2$. Une identification donne $4a = 1$, $4b = 0$ et $4c + 2a = 0$, ie $a = 1/4$, $b = 0$ et $c = -1/8$. Ainsi, $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ est une solution particulière de $(E)$, et l'expression générale de ses solutions est donc $\lambda\cos(2x) + \nu\sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

3. On veut résoudre $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sin(x)$.

Equation homogène : $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ $(H)$.

Equation caractéristique : $X^2 - 2X + 1 = 0$ : $\Delta = (-2)^2 - 4.1 = 0$, donc on a une racine double $r = 1$.

Les solutions homogènes sont les fonctions de la forme $\lambda e^x + \nu xe^x$ avec $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

Le second membre est $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$, donc on a ici $\gamma = i = 0 + i1$, qui n'est pas racine du polynome caractéristique, et l'on va donc chercher uen solution particulière sous la forme $y(x) = A\cos(1x)e^{0x} + B\sin(1x)e^{0x}$, ie $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On dérive : $y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ et $y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$. On réinjecte dans $(E)$ et l'on obtient :

$$(-A\cos(x) - B\sin(x)) - 2(-A\sin(x) + B\cos(x)) + (A\cos(x) + B\sin(x)) = \sin(x), \text{ ie}$$
$$2A\sin(x) - 2B\cos(x) = \sin(x)$$

Par identification, on veut avoir $2A = 1$ et $2B = 0$, ie $A = 1/2$ et $B = 0$, de sorte que $\frac{1}{2}\cos(x)$ est une solution particulière de $(E)$. Ainsi, l'ensemble des solutions générales de $(E)$ est constitué des fonctions de la forme $\lambda e^x + \nu xe^x + \frac{1}{2}\cos(x)$, $\lambda, \nu \in \mathbf{R}$.

**Exercice 4 :**

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = -g \text{ (E)},$$

où $g$ est la constante de gravité.

1. On cherche une solution constante de $(E)$, disons $z(t) = C \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a bien $z''(t) = 0 = z'(t)$ et l'equation $(E)$ devient

$$kC = -g \Leftrightarrow C = \frac{-g}{k}$$

*Interprétation physique*. Selon l'énoncé, $z = 0$ est la position du poids quand le ressort est non détendu. Lorsque l'on accroche la masse au ressort et on le laisse en *repos*, le ressort sera un peu détendu vers le sol. Donc le poids n'est plus en position $z = 0$, mais plus bas. Cette position (d'équilibre) dépend de la force de la gravité $-g$ et de la constante de raideur $k$ (ici le signe négatif de la constante de gravité et donc de la position $C$ veut dire que la force gravité tire du poids vers le bas)

2. L'équation homogène associée à $(E)$ est donnée par $z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = 0$. Les solutions à cette équation sont calculées dans le poly du cours (voir paragraphe 3 du Chapitre 2). Puisque l'on suppose $\mu << k$, la solution est donnée par

$$z_H(t) = \left(c_1 cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(t\sqrt{k-\mu^2})\right)e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dans la question (1) ci-dessus on a trouvé la solution particulière constante $z_P(t) = C = \frac{-g}{k}$. Toutes les solutions à l'équation $(E)$ sont alors de la forme

$$z_G(t) = z_p(t) + z_H(t) = \frac{-g}{k} + \Big(c_1 cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

*Note*. La dérivée de $z_G(t)$ est donnée par

$$z_G'(t) = \Big((c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1)cos(t\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1\sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2)sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}$$

On se donne maintenant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. Dans ce cas, la solution de $(E)$ est unique. Pour la calculer il faut calculer les constantes $c_1, c_2$ pour que les conditions $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ soient satisfaites.

$$z(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + \Big(c_1 cos(0\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(0\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu\, 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{g}{k}$$

$$z'(0) = 0 \Leftrightarrow \Big((c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1)cos(0\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1\sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2)sin(0\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu\, 0} = 0 \Leftrightarrow c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 = \frac{\mu c_1}{\sqrt{k-\mu^2}} = \frac{\mu g}{k\sqrt{k-\mu^2}}$$

Donc la seule solution $z(t)$ de $(E)$ telle que $z(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est donné par

$$z(t) = \frac{-g}{k} + \Big(\frac{g}{k} cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + \frac{\mu g}{k\sqrt{k-\mu^2}} sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}$$

*Interprétation physique*. D'une part, la présence des fonctions cosinus et sinus dans la solution de l'équation $(E)$ indique que la trajectoire du poids est périodique. D'autre part, la présence de la fonction exponentielle $e^{-\mu t}$ comme facteur avec exposant négatif indique que le mouvement du poids s'affaiblit au fil du temps. Plus précisément, on remarque que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \frac{-g}{k},$$

c'est à dire, le poids tend à se stabiliser à la position initiale lorsqu'il est en repos et accroché au ressort (comparer avec l'intérprétation physique de la question (1)).

**Exercice 5 :**

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) = 3te^t \text{ (E)}$$

1. L'équation homogène associée à $(E)$ est donnée par $y''(t) + 2y'(t) = 0$. Donc son équation caractéristique est donnée par $z^2 + 2z = 0$ dont les solutions sont clairement $z_1 = 0$ et $z_2 = -2$. C'est à dire, deux solutions réelles distinctes. Le cours assure alors que les solutions de l'équation homogène $y''(t) + 2y'(t) = 0$ sont données par

$$y_H = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} = c_1 + c_2 e^{-2t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Le terme indépendant de l'équation $(E)$ est $3te^t$. Dans ce cas, on a $P(t) = 3t$ et $\gamma = 1$ (suivant les notations du cours). De plus, $\gamma \neq z_1$ et $\gamma \neq z_2$ (c'est à dire, $\gamma$ n'est pas solutions de l'équation caractéristique associée à $(E)$). Le cours assure alors qu'une solution particulière pour $(E)$ est de la forme

$$y_P(t) = Q(t)e^{\gamma t} = Q(t)e^t,$$

où $Q(t)$ est un polynôme du même degré que $P(t)$, c'est à dire, $deg(Q(t)) = 1$. Donc $Q(t)$ est un polynôme de la forme $at + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

En imposant que $y_P(t) = Q(t)e^{\gamma t} = Q(t)e^t$ soit solution de $(E)$, calculons $a$ et $b$.

$$y_P(t) = Q(t)e^{\gamma t} = Q(t)e^t \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow y_p''(t) + 2y_p'(t) = 3te^t$$

— $y_P'(t) = \Big(Q(t)e^t\Big)' = Q'(t)e^t + Q(t)e^t = (at+b)'e^t + (at+b)e^t = ae^t + (at+b)e^t$
— $y_P''(t) = \Big(ae^t + (at+b)e^t\Big)' = ae^t + (at+b)'e^t + (at+b)e^t = ae^t + ae^t + (at+b)e^t = 2ae^t + (at+b)e^t$

$$y_p''(t) + 2y_p'(t) = 3te^t$$
$$2ae^t + (at+b)e^t + 2\Big(ae^t + (at+b)e^t\Big) = 3te^t$$
$$4ae^t + 3(at+b)e^t = 3te^t$$
$$4a + 3(at+b) = 3t$$
$$4a + 3at + 3b = 3t$$
$$4a + 3b = (3-3a)t$$
$$0t + 4a + 3b = (3-3a)t + 0 \Leftrightarrow 0 = 3 - 3a \text{ et } 4a + 3b = 0$$
$$a = 1 \text{ et } b = \frac{-4a}{3} = \frac{-4}{3}$$

Donc on a $Q(t) = t - \frac{4}{3}$ et la solution particulière est donnée par

$$y_P(t) = \Big(t - \frac{4}{3}\Big)e^t$$

3. L'ensemble de toutes les solutions pour l'équation $(E)$ est donné par les fonctions de la forme

$$y_G(t) = y_P(t) + y_H(t) = \Big(t - \frac{4}{3}\Big)e^t + c_1 + c_2e^{-2t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

<u>*Note*</u>. La dérivée de $y_G(t)$ est donnée par $y_G'(t) = e^t + \Big(t - \frac{4}{3}\Big)e^t - 2c_2e^{-2t}$

4. Si on fixe les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$, alors la solution de $(E)$ est unique. Pour la calculer il faut calculer les constantes $c_1, c_2$ pour que les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ soient satisfaites.

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \Big(0 - \frac{4}{3}\Big)e^0 + c_1 + c_2e^{-2\ 0} = 1 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} + c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{4}{3} - c_2$$
$$y'(0) = -1 \Leftrightarrow e^0 + \Big(0 - \frac{4}{3}\Big)e^0 - 2c_2e^{-2\ 0} = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{3} - 2c_2 = -1 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4}{3} + 1\Big) = \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 = 2$$

Donc la seule solution $y(t)$ de $(E)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ est donné par

$$y(t) = \Big(t - \frac{4}{3}\Big)e^t + 2 + \frac{1}{3}e^{-2t}$$