Chapitre 7 : Equations différentielles linéaire d'ordre 2

Exercice type 1

Résoudre $y'' - 5y' + 6y = te^t$

Solution : L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$, les solutions de l'équation homogène en y sont de la forme $\lambda e^{2t} + \mu e^{3t}$. On pose alors $y(t) = z(t)e^t$. Alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= z'(t)e^t + z(t)e^t \\ y''(t) &= z''(t)e^t + 2z'(t)e^t + z(t)e^t \end{aligned}$$

d'où (après division par $e^t \neq 0$)

$$\begin{aligned} & y'' - 5y' + 6y = te^t \\ \iff & z'' + (2-5)z' + (1-5+6)z = t \\ \iff & z'' - 3z' + 2z = t \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution sous la forme d'un polynôme de degré 1, $z(t) = at + b$. Alors

$$z'' - 3z' + 2z = t \iff -3a + 2at + 2b = t \iff a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4}$$

$$z(t) = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$$

Les solutions de l'équation en y sont

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice type 2

Résoudre $(E) : 2y'' - 6y' + 4y = te^{2t}$.

Solution : On normalise l'équation en divisant par 2 pour avoir

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{te^{2t}}{2}$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$, les solutions de l'équation homogène sont $\lambda e^t + \mu e^{2t}$. On cherche une solution particulière en posant $y(t) = z(t)e^{2t}$. On a alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= z'(t)e^{2t} + 2z(t)e^{2t} \\ y''(t) &= z''(t)e^{2t} + 4z'(t)e^{2t} + 4z(t)e^{2t} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & y'' - 3y' + 2y = \frac{te^{2t}}{2} \\ \iff & z'' + (4-3)z' + (4-6+2)z = t \\ \iff & z'' + z' = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

On cherche z sous la forme d'un polynôme de degré 2 et sans terme constant (de degré 2 pour avoir du t (avec le z') et sans terme constant car ces derniers disparaissent à la dérivation, c'est le seul moment où vous devez réflechir !). On pose donc $z(t) = at^2 + bt$, alors

$$2a + (2at + b) = \frac{t}{2} \iff a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

Une solution particulière est donc $z(t) = \dfrac{t^2-2t}{4}$ qui donne $y(t) = \dfrac{t^2-2t}{4}e^{2t}$ et les solutions de (E) sont

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{t^2-2t}{4}e^{2t} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice type 3

Résoudre $(E) : y'' - 6y' + 9y = e^{-t}$.

Solution : L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$, les solutions de l'équation homogène sont $(\lambda + \mu t)e^{3t}$. Pour la recherche de la solution particulière, on pose $y(t) = e^{-t}z(t)$, alors

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & z'(t)e^{-t} - z(t)e^{-t} \\ y''(t) & = & z''(t)e^{-t} - 2z'(t)e^{-t} + z(t)e^{-t} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & y'' - 6y' + 9y = e^{-t} \\ \iff & z'' + (-2-6)z' + (1+6+9)z = t \\ \iff & z'' - 8z' + 16z = 1 \end{array}$$

dont une solution est $z(t) = \dfrac{1}{16}$. Les solutions de (E) sont

$$(\lambda + \mu t)e^{3t} + \frac{e^{-t}}{16} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice type 4

Résoudre $(E) : y'' + y' - 2y = 9e^x - 2$ avec les conditions initiales $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Solution : L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^x$$

On applique le principe de superposition.
Il est clair que $y_1(x) = 1$ est solution de

$$y'' + y' - 2y = -2 \tag{E_1}$$

Pour avoir une solution particulière de

$$y'' + y' - 2y = 9e^x \tag{E_2}$$

On pose $y(x) = z(x)e^x$, alors

$$\begin{array}{rcl} y'(x) & = & z'(x)e^x + z(x)e^x \\ y''(x) & = & z''(x)e^x + 2z'(x)e^x + z(x)e^x \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rl} & y'' + y' - 2y = 9e^x \\ \iff & z'' + 3z' = 9 \end{array}$$

Une solution polynômiale évidente est $z'(x) = 3 \Longrightarrow z(x) = 3x$. Ainsi $y_2(x) = 3xe^x$ est solution particulière de (E_2) et $y_1(x) + y_2(x) = 3xe^x + 1$ est une solution particulière de (E).
En définitive les solutions de (E) sont

$$y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^x + 3xe^x + 1 \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Les conditions initiales donnent alors

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 0 \\ -2K_1 + K_2 + 3 = 0 \end{cases} \iff K_1 = -K_2 = 1$$

L'unique solution est

$$y(x) = e^{-2x} - e^x + 3xe^x + 1$$

Exercice type 5

Résoudre $y'' - y' - 2y = \cos t$.

Solution : L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$, les solutions de l'équation homogène sont $\lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$. On cherche ensuite une solution particulière de

$$y'' - y' - 2y = e^{it}$$

dont on prend la partie réelle pour avoir une solution particulière de $y'' - y' - 2y = \cos t$. On pose $y(t) = z(t) e^{it}$, alors

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & z'(t) e^{it} + iz(t) e^{it} \\ y''(t) & = & z''(t) e^{it} + 2iz'(t) e^{it} - z(t) e^{it} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} & y'' - y' - 2y = e^{it} \\ \iff & z'' + (2i-1) z' + (-1-i-2) z = 1 \\ \iff & z'' + (2i-1) z' - (3+i) z = 1 \end{array}$$

dont une solution particulière est $-\dfrac{1}{3+i} = \dfrac{-3+i}{10}$. Une solution particulière est donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-3+i}{10} e^{it}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-3+i}{10}(\cos t + i \sin t)\right) = \frac{-3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t$$

La solution générale de $y'' - y' - 2y = \cos t$ est donc

$$\lambda e^{-t} + \mu e^{2t} - \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$$

Exercice type 6

Résoudre $(E) : y'' + y = (5t-7) e^{-t} \cos t$.

Solution : Les solutions de l'équation homogène sont $\lambda \cos t + \mu \sin t$. On cherche une solution particulière de

$$y'' + y = (5t-7) e^{(-1+i)t}$$

dont on prend la partie réelle (car $\operatorname{Re}\left((5t-7) e^{(-1+i)t}\right) = (5t-7) e^{-t} \cos t$. On pose $y(t) = z(x) e^{(-1+i)t}$, alors

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & z'(t) e^{(-1+i)t} + (-1+i) z(t) e^{(-1+i)t} \\ y''(t) & = & z''(t) e^{(-1+i)t} + 2(-1+i) z'(t) e^{(-1+i)t} + (-1+i)^2 z(t) e^{(-1+i)t} \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rl} & y'' + y = (5t-7) e^{(-1+i)t} \\ \iff & z'' + 2(-1+i) z' + \left(1 + (-1+i)^2\right) z = (5t-7) \\ \iff & z'' + 2(-1+i) z' + (1-2i) z = (5t-7) \end{array}$$

on cherche z sous la forme d'un polynôme de degré 1, $z(t) = at + b$. On obtient alors

$$\begin{aligned} & -2(1-i)a + (1-2i)(at+b) = 5t - 7 \\ \iff & \begin{cases} (1-2i)a & = 5 \\ (1-2i)b & = -7 + 2(1-i)a \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a & = \dfrac{5}{1-2i} = 1 + 2i \\ (1-2i)b & = -7 + 2(1-i)a = -1 + 2i \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc

$$\mathrm{Re}\left(((1+2i)t - 1)e^{(-1+i)t}\right)$$

Puisque

$$\begin{aligned} ((1+2i)t-1)e^{(-1+i)t} &= ((1+2i)t-1) \times (\cos t + i\sin t)e^{-t} \\ &= ((\cos t - 2\sin t)t - \cos t)e^{-t} \end{aligned}$$

La solution générale de (E) est

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + ((\cos t - 2\sin t)t - \cos t)e^{-t}$$

Exercice 1

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin\omega x$$

en fonction du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$.

Solution : Les solutions de l'équation homogène sont (l'équation caractéristique est $r^2 + 1$ qui a pour solutions i et $-i$) :

$$y(x) = A\cos x + B\sin x$$

On résout $y'' + y = e^{i\omega x}$ et on prend la partie imaginaire d'une solution particulière. Pour cela, on pose $y(x) = z(x)e^{i\omega x}$. On a alors $y''(x) = z''(x)e^{i\omega x} + 2i\omega z'(x)e^{i\omega x} - \omega^2 z(x)e^{i\omega x}$. Ainsi l'équation en z estsoit

$$z'' + 2i\omega z' + \left(1-\omega^2\right)z = 1$$

Si $\omega^2 \neq 1$, on a $z(x) = \dfrac{1}{1-\omega^2}$ et $y(x) = \dfrac{e^{i\omega x}}{1-\omega^2}$. Une solution particulière de $y'' + y = \sin\omega x$ est donc

$$\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\omega x}}{1-\omega^2}\right) = \frac{\sin\omega x}{1-\omega^2}$$

Si $\omega^2 = 1$, on obtient

$$z'' + 2i\omega z' = 1$$

on prend donc $z'(x) = \dfrac{1}{2i\omega}$ (on peut diviser par ω, car $\omega^2 = 1$ donc ω n'est pas nul), on choisit $z(x) = -\dfrac{ix}{2\omega} \Longrightarrow y(x) = -\dfrac{ixe^{i\omega x}}{2\omega}$. Une solution particulière de $y'' + y = \sin\omega x$ est donc

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{ixe^{i\omega x}}{2\omega}\right) = -\frac{x\cos\omega x}{2\omega}$$

En résumé, les solutions sont

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos x + B\sin x + \frac{\sin\omega x}{1-\omega^2} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 \neq 1 \\ y(x) &= A\cos x + B\sin x - \frac{x\cos\omega x}{2\omega} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 = 1 \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + y = 0$. La résoudre sur $I =]0, +\infty[$ en posant, pour y solution, $z(x) = y(e^x)$.

Solution : Soit y une solution définie sur I alors $z = y \circ \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(e^x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car $e^x \in]0, +\infty[$ pour $x \in \mathbb{R}$). Puisque y est deux fois dérivable, on en déduit que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$y(x) = z(\ln x)$$

d'où

$$y'(x) = \frac{z'(\ln x)}{x} \text{ et } y''(x) = \frac{z''(\ln x)}{x^2} - \frac{z'(\ln x)}{x^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall x &\in]0, +\infty[, \; x^2y''(x) + y(x) = 0 \\ \iff & \forall x \in]0, +\infty[, \; z''(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $t = \ln x$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque x décrit $]0, +\infty[$, on en déduit que z est solution, sur $\mathbb{R}$, de

$$z'' - z' + z = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1$ dont les racines sont $-j$ et $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; z(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

Puisque $y(x) = z(\ln x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \right) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$