Chapitre 7

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 7.1 *Soit* $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, *donner une équation différentielle dont* f *est solution.*

Exercice 7.2 *Soit* $f(x) = 1 + \dfrac{e^x}{1+x^2}$, *donner une équation différentielle dont* f *est solution.*

Exercice 7.3 *Résoudre* $\left(1+x^2\right) y' + xy = \sqrt{1+x^2}$

Exercice 7.4 *Résoudre* $|1-x|\, y' + xy = x$

Exercice 7.5 *Donner une équation différentielle ayant* e^{2x} *et* e^{-x} *comme solutions.*

Exercice 7.6 *Donner une équation différentielle ayant* e^{x} *et* $x\mathrm{e}^{x}$ *comme solutions.*

Exercice 7.7 *Donner une équation différentielle ayant* 1 *et* x *comme solutions.*

Exercice 7.8 *Donner une équation différentielle ayant* $\cos 3x$ *et* $\sin 3x$ *comme solutions.*

Exercice 7.9 *Donner une équation différentielle ayant* $\mathrm{e}^{2x}\cos x$ *et* $\mathrm{e}^{2x}\sin x$ *comme solutions.*

Exercice 7.10 *Résoudre* $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$

Exercice 7.11 *Résoudre* $y'' + y' - 2y = 9\mathrm{e}^x - 2$

Exercice 7.12 *On considère l'équation différentielle* $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.

1. *Déterminer la solution générale de cette équation.*
2. *Déterminer l'unique solution* f *telle que* $f(0) = 0$ *et la courbe représentative de* f *admet une asymptote oblique en* $+\infty$. *Etudier alors les variations de* f.

Exercice 7.13 *Résoudre l'équation différentielle* $\operatorname{ch}(t)\, y' + \operatorname{sh}(t)\, y = \dfrac{1}{1+t^2}$

Exercice 7.14 *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + 3y' + 2y = t^2 + \mathrm{e}^{-t} + \sin(t)$

Exercice 7.15 *Résoudre l'équation différentielle* $\left(1+x^2\right) y' + xy = 1$

Exercice 7.16 *Deux équations couplées.*

1. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $y'' - 3y' + 2y = e^x$
2. *Trouver les solutions du système d'équations différentielles*

$$\begin{aligned} y' - z &= 0 \\ 2y + z' - 3z &= e^x \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ *et* $z(0) = 0$*. Calculer alors* $\displaystyle\int_0^1 z(x)\,dx$*.*

Exercice 7.17 *Déterminer une équation différentielle homogène, du second ordre à coefficients constants réels (i.e. du type* $ay'' + by' + cy = 0$ *où* a, b, c *sont des réels avec* $a \neq 0$*) telle que :*

1. *Les fonctions* e^x *et* e^{2x} *soient solutions.*
2. *Les fonctions* e^{-4x} *et* xe^{-4x} *soient solutions.*
3. *Les fonctions* $f(x) = (2\cos x + 3\sin x)\,e^{3x}$*,* $g(x) = (3\cos x + 2\sin x)\,e^{3x}$ *soient solutions.*
4. *La fonction* xe^{3x} *soit solution.*
5. *La fonction* $\cos x e^x$ *soit solution.*
6. *La fonction* $4e^{5x}$ *soit solution.*

Exercice 7.18 *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left(1 + x^2\right) y' + 2xy = e^x + x$$

Exercice 7.19 *Résoudre* $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right) e^x$

Exercice 7.20 *Résoudre* $(E) : y'' - 4y' + 13y = \cos x$

Exercice 7.21 *Résoudre* $(E) : y'' + 4y' + 5y = x \sin x e^{-2x}$

Exercice 7.22 *Résoudre les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y'' + 5y' - 6y &= e^t \\ y'' - 4y' + 3y &= 2e^t \\ y'' + y &= \cos 2t \end{aligned}$$

Exercice 7.23 *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left(1 + x^2\right) y' + \frac{x^2 - 1}{x} y = -2$$

sur $]0, +\infty[$*.*
Indication : On pourra chercher a, b *et* c *réels tels que* $\dfrac{x^2 - 1}{x(1 + x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}$*.*

Exercice 7.24 *Soit* m *un paramètre réel, on considère l'équation différentielle*

$$y'' + (m - 9)\, y' + 4y = e^x \qquad (E_m)$$

1. *Résoudre* (E_m) *pour* $m = 14$*.*
2. *Résoudre* (E_m) *pour* $m = 13$*.*
3. *Résoudre* (E_m) *pour* $m = 9$*.*

Exercice 7.25

1. *Résoudre l'équation différentielle*
$$\left(e^x+1\right)y'-y=\frac{e^x}{1+x^2} \qquad (E)$$
Indication (belge) : Quelle est la dérivée de $\ln\left(1+e^x\right)$ *?*
2. *Donner la solution* $y_0\left(x\right)$ *telle que* $y_0\left(0\right)=-\frac{\pi}{4}$. *Simplifier l'expression de* f *pour* $x>0$.
3. *Quelle est la limite de* $y_0\left(x\right)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *?*

Exercice 7.26 *Résoudre les équations différentielles suivantes*
$$\begin{array}{ll} y''+5y'-6y=e^t & (E_1)\\ y''+4y'+13y=e^{-t} & (E_2)\\ y''+y=\cos 2t & (E_3)\end{array}$$

Exercice 7.27 *Déterminer les solutions sur* $]0,+\infty[$ *de* $\ln\left(x\right)y'+\frac{y}{x}=1$

2 Les techniques

Exercice 7.28 *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*
$$t^2y'+\left(1-t\right)y=1 \qquad (E)$$

Exercice 7.29 *Résoudre* $\left(1-x^2\right)y'+\left(1+x^2\right)y=e^x$

Exercice 7.30 *Résoudre l'équation différentielle suivantes :*
$$y''+2y'+2y=\sin\left(ax\right)e^{-x}$$
en fonction du paramètre a.

Exercice 7.31 *Existe-t-il une solution de l'équation différentielle* $y'+\cos\left(y\right)=0$ *telle que* $y\left(\pi\right)=0$

Exercice 7.32 *Résoudre* $y''-2y'+y=e^x\ln\left(x\right)$ *sur* $]0,+\infty[$

Exercice 7.33 *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*
$$y''-2ay'+\left(a^2+1\right)y=\sin t+te^{at} \qquad \text{(E)}$$
lorsque a *est un paramètre réel.*

Exercice 7.34 *Résoudre l'équation* $xy'-ny=0$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7.35 *Résoudre* $t^2y'+\left(1+t^2\right)y=0$. *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.36 *Résoudre, sur* $\mathbb{R}$, *l'équation différentielle*
$$y''+y=\sin\omega x$$
en fonction du paramètre $\omega\in\mathbb{R}$.

Exercice 7.37 *Soit* a *un paramètre réel, résoudre, en fonction de* a *l'équation différentielle*
$$y''-\left(1+a\right)y'+ay=e^x$$

Exercice 7.38 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R},\ f'(x)^2 - f(x)^2 = 1 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Déterminer f.
Même question si on enlève la condition $f'(0) = 1$.
Plus dur : Montrer que l'on peut simplement supposer f de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7.39 *On considère l'équation différentielle*

$$(1+2x)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0$$

1. *Déterminer une solution de l'équation de la forme $y(x) = e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$*
2. *On pose alors $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?*
3. *En déduire les solutions de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.*
4. *Déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et la tangente en $x = 0$ coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = 1$.*

Exercice 7.40 *Trouver toutes les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient*

$$\int_0^x f(t)\,dt = x + g(x) \ \text{ et } \int_0^x g(t)\,dt = x + f(x) - 1$$

Pour mémoire si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui prend la valeur 0 en $x = 0$. En particulier F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

3 les exotiques

Exercice 7.41 *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left(1+x^2\right) y' + (x-1)^2\, y = x^3 - x^2 + x + 1$$

On note $y_K(x)$ l'unique solution de cette équation telle que $y_K(0) = K$. On appelle courbe intégrale le graphe de $y_K(x)$ pour $K \in \mathbb{R}$.

1. *Que dire de la tangente en $x = 1$ à une courbe intégrale ?*
2. *Montrer que les courbes intégrales ont toutes une asymptote quand x tend vers $+\infty$.*
3. *Montrer que les courbes intégrales ont toutes deux points d'inflexions et que les tangentes aux points d'inflexions ont une propriété remarquable.*
4. *Montrer que les points à tangente horizontale des courbes intégrales sont sur une courbe simple que l'on étudiera.*
5. *Montrer qu'il y a une courbe intégrale ayant une inflexion en un point à tangente horizontale.*
6. *Déterminer les courbes intégrales ayant un point à tangente horizontale, discuter leur nombre en fonction de K.*

Exercice 7.42 *Déterminer les fonctions réelles f dérivables en 0 telles que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Exercice 7.43 *Vous connaissez tous cette fameuse règle de dérivation simplifiée : $(fg)' = f'g'$, ou en d'autres termes, la dérivée d'un produit est le produit des dérivées !*
La question est la suivante, si $f(x) = e^{x^2} = \exp\left(x^2\right)$, déterminer un intervalle $[a,b]$ et une fonction g définie sur $[a,b]$ telle que $(fg)' = f'g'$ sur $[a,b]$.

Exercice 7.44 *Soit f telle que $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$, indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :*

1. *Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ (Justifiez votre réponse).*
2. *Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ (Justifiez votre réponse).*

4 Les olympiques

Exercice 7.45 *Soient* $(k,\lambda)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, *déterminer les fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=kf(\lambda-x)$

Exercice 7.46 *Soient* $a(x)y'+b(x)y=c(x)$ *une équation différentielle du premier ordre avec* a,b,c *continues sur* I *sur lequel* $a(x)\neq 0$. *Soit* $x\in I$, *montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse* x *sont concourantes ou parallèles.*
Que dire si l'équation différentielle admet une solution affine ?

Exercice 7.47 *Résoudre* $y''+4y=2\tan x$.

Exercice 7.48 *Soient* α *et* β *deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant sur* $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{c} e^x\alpha'(x)=-x\beta(x)\\ \\ e^x\beta'(x)=x\alpha(x)\end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{c}\alpha(0)=1\\ \\ \beta(0)=0\end{array}\right.$$

1. *Prouver que* $\alpha^2(x)+\beta^2(x)=1$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.
2. *Prouver que* $x\alpha''(x)+(x+1)\alpha'(x)+x^3e^{-x}\alpha(x)=0$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.
3. *En faisant le changement de fonction inspiré par la première question, trouver* $\alpha(x)$ *et* $\beta(x)$.

5 Le grenier (non corrigé)

Exercice 7.49 *Résoudre :*
$y''-3y'+2y=t+1+e^t$ *(solutions :* $C_1e^{2t}+C_2e^t+\dfrac{t}{2}+\dfrac{5}{4}-te^t$ *)*
$y''+2y'+y=\left(t^2+1\right)e^{-t}$ *(solutions :* $C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+\dfrac{t^4+6t^2}{12}e^{-t}$*)*
$y''-2y'+2y=e^t$ *(solutions :* $C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t+e^t$*)*
$y''-y'-2y=\cos t+3\sin t$ *(solutions :* $C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-\sin t$*)*

Exercice 7.50 *Résoudre*
$y''+5y'-6y=e^t$ *(solutions :* $C_1e^t+C_2e^{-6t}+\dfrac{e^t}{7}$*)*
$y''+y'-6y=te^t$ *(solutions :* $C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{4t+3}{16}e^t$*)*
$y''-4y'+3y=2e^t$ *(solutions :* $C_1e^t+C_2e^{3t}-te^t$*)*
$y''-2y'-8y=te^{4t}$ *(solutions :* $C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}+\dfrac{3t^2-t}{36}e^{4t}$*)*
$4y''+4y'+y=\left(t^3+1\right)e^{-\frac{t}{2}}$ *(solutions :* $(C_1+C_2t)e^{-\frac{t}{2}}+\dfrac{t^5+10t^2}{80}e^{-\frac{t}{2}}$*)*
$y''-2y'+5y=te^t$ *(solutions :* $(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)e^t+\dfrac{1}{4}te^t$*)*
$y''+4y'+13y=e^{-t}$ *(solutions :* $(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{-2t}+\dfrac{1}{10}e^{-t}$*)*
$y''-y=\cos t$ *(solutions :* $C_1e^{-t}+C_2e^t-\dfrac{1}{2}\cos t$*)*
$y''-4y'+5y=e^t\sin t$ *(solutions :* $(C_1\cos t+C_2\sin t)e^{2t}+\dfrac{1}{5}(2\cos t+\sin t)e^t$*)*
$y''+y=\cos 2t$ *(solutions :* $C_1\cos t+C_2\sin t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$*)*
$y''-2y'+2y=\cos^2 t$ *(solutions :* $(C_1\cos t+C_2\sin t)e^t-\dfrac{1}{10}\sin(2t)-\dfrac{1}{20}\cos(2t)+\dfrac{1}{4}$*)*
$y''-2y'+y=te^t\cos(2t)$ *(solutions :* $(C_1+C_2t)e^t+\dfrac{1}{4}(\sin 2t-t\cos 2t)$*)*
$y''+4y'+4y=te^{-2t}\ln t$ *(solutions :* $(C_1+C_2t)e^{-2t}+\dfrac{1}{36}t^3(6\ln t-5)e^{-2t}$*)*

$y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$ *(solutions :* $(C_1 + C_2 t)\, e^{-t} + \ln(\operatorname{ch} t)$ *)*

$y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2te^{2t}}{1+t^2}$ *(solutions :* $(C_1 + C_2 t)\, e^{2t} + \left(t \ln\left(1+t^2\right) + 2 \arctan t\right) e^{2t}$

Exercice 7.51 *On considère l'équation différentielle*

$$\operatorname{ch}(x)\, y' + \operatorname{sh}(x)\, y = 1 + (2x+1)\, e^{2x} \tag{E}$$

1. *Résoudre l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$.
2. *A l'aide de la variation de la constante, trouver une solution particulière de* (E)
3. *Vérifier que* $y_p(x) = 2xe^x$ *est une solution particulière de* (E).
4. *Déterminer la solution de* (E) *telle que* $y(\ln 2) = 0$.

Exercice 7.52 *Soit l'équation*

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{t^2} \tag{7.1}$$

1. *Résoudre l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$
2. *En posant* $y(t) = z(t)\, e^{2t}$, *résoudre* (7.1) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 7.53 *Soit l'équation*

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^3 t} \tag{7.2}$$

1. *Résoudre l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* y_0 *une solution de l'équation homogène (à vous de la choisir), en posant* $y(t) = z(t)\, y_0(t)$, *résoudre* (7.2) *sur* $]0, \pi[$
   (On trouvera comme solutions : $C_1 \cos t + C_2 \sin t + \dfrac{1}{\sin t}$*)*

Exercice 7.54 *On considère l'équation différentielle*

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = x + 1 \tag{7.3}$$

On désire la résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.

1. *Chercher les valeurs* α_1, α_2 *de* α *telles que* $y(x) = x^\alpha$ *soit solution de* (7.3).
2. *Pour* $\alpha = \alpha_1$ *ou* α_2, *on pose* $y(x) = z(x)\, x^\alpha$. *Montrer que* $u = z'$ *vérifie une équation différentielle d'ordre 1. Résoudre cette équation différentielle pour la valeur de* α *qui vous semble la plus intéressante.*
3. *En déduire les solutions de* (7.3) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$ *puis sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.55 *Résoudre les équations différentielles suivantes , on précisera les intervalles sur lesquels il y a une solution. On traitera les problèmes de raccords lorsqu'ils se présentent.*

a)	$y' + ty = 0$	*i)*	$y' + y \operatorname{cotan}(t) = \sin t$
b)	$y' - \sin ty = 0$	*j)*	$ty' - y = (1+t^2)$
c)	$\left(1+t^2\right) y' + 2ty = 0$	*k)*	$\vert 1+t\vert\, y' + y = 1 + 2t$
d)	$y' + y = \sin(t) + 3\sin(2t)$	*l)*	$y' + \cos(t) y = \sin(t)\cos(t)$
e)	$ty' + \left(2+t^2\right) y = 0$	*m)*	$y' - y\tan(t) = -\cos^2(t)$
f)	$(1+t^2)y' + ty = 1 + 2t^2$	*n)*	$\sin^3(t) y' - 2\cos(t) y = 0$
g)	$y' - (t+1)(y+1) = 0$	*o)*	$xy' - ny = 0$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$
h)	$y' + 2ty = e^{2t-t^2}$	*p)*	

Exercice 7.56 *Déterminer le lieu des points d'inflexions des courbes intégrales de l'équation* $xy' - 3y = 2x^2$

Exercice 7.57 *Résoudre* $xy' + (x+1)\,y = \ln\left(1+x^2\right)e^{-x}$ *et traiter les problèmes de raccord (attention, il faut le* DL_2 *de* e^x *)*

Exercice 7.58 *Résoudre* $(1+|x|)\,y' + xy = 0$.

Exercice 7.59 *Résoudre* $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$ *après avoir chercher une solution polynômiale* $P(x)$, *et en posant ensuite* $y(x) = P(x)\,z(x)$ *(attention, les primitives passent par des décompositions en éléments simples* $\cdots$ *).*

Exercice 7.60 *Résoudre* $\cos(t)\,y'' - 2\sin(t)\,y' - 2\cos(t)\,y = e^t$ *en posant* $y(t) = \dfrac{z(t)}{\cos t}$.

Chapitre 7
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 7.1 *La fonction f est dérivable et*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right)' \\ &= \left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$(e^x+1)\, f'(x) = f(x)$$

Une équation différentielle vérifiée par f est

$$(e^x+1)\, y' - y = 0$$

Autre méthode : *Posons $y = f(x)$, alors $y = \dfrac{e^x}{e^x+1} \iff (e^x+1)\, y = e^x \iff e^x (y-1) = -y \iff e^x = \dfrac{y}{1-y} = \dfrac{y-1+1}{1-y} = \dfrac{1}{1-y} - 1$ (en effet y ne prend jamais la valeur 1 car $\dfrac{e^x}{e^x+1} - 1 = -\dfrac{1}{e^x+1} \neq 0$). On sait que la fonction $x \mapsto e^x$ vérifie l'équation différentielle $(e^x)' = e^x$. On a donc*

$$\left(\frac{1}{1-y} - 1\right)' = \frac{y}{1-y} \iff \frac{y'}{(1-y)^2} = \frac{y}{1-y} \iff y' = y\,(1-y)$$

Or $1 - y = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1}$ donc

$$y' = \frac{y}{e^x+1}$$

On retrouve bien la même équation différentielle!!!
Il y a d'autres équations différentielles vérifiées par f. En effet, on a aussi avec $y(x) = f(x)$, $(e^x+1)\, y(x) = e^x$, ce qui en dérivant donne

$$(e^x+1)\, y'(x) + e^x y(x) = e^x$$

Donc f est solution de

$$(e^x+1)\, y' + y = e^x$$

On a également

$$f'(x) = f(x)^2\, e^{-x}$$

donc f est solution de

$$y'e^x - y^2 = 0$$

Enfin, puisque $f(x) = e^x \times \dfrac{1}{1+e^x}$, en dérivant on obtient $f'(x) = e^x \times \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} + f(x) = -f^2(x) + f(x)$. Ceci montre que f est solution de

$$y' + y^2 + y = 0$$

Pour résumer f est solution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} (e^x+1)\,y' - y &=& 0 \\ (e^x+1)\,y' + y &=& e^x \\ y'e^x - y^2 &=& 0 \\ y' + y^2 + y &=& 0 \end{array}$$

Exercice 7.2 *La fonction f est dérivable et*

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)' = \frac{e^x\,(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

d'où

$$\left(1+x^2\right) f'(x) = \frac{e^x}{1+x^2}\,(x-1)^2 = (x-1)^2\,(f(x)-1)$$

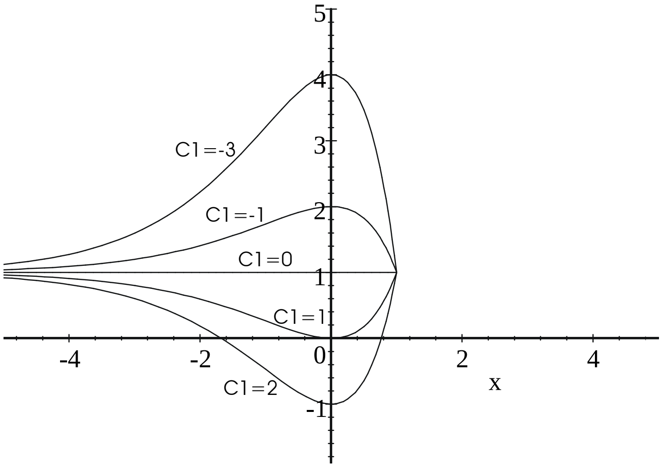
Une équation différentielle vérifiée par f est

$$\left(1+x^2\right) y' - (x-1)^2\,y = -\,(x-1)^2$$

Exercice 7.3 *Les fonctions $a(x) = 1+x^2$, $b(x) = x$ et $c(x) = \sqrt{1+x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction a ne s'annule pas, on se place donc sur $I = \mathbb{R}$.*
La solution de l'équation homogène est $y(x) = K_1 \exp\left(-\int \frac{x}{1+x^2}dx\right) = K_1 \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right) = \dfrac{K_1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On cherche une solution particullière par variation de la constante. On pose donc $y(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$, alors $y(x)$ solution si et seulement si $\left(1+x^2\right)\times\dfrac{K'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Longleftrightarrow K'(x) = 1$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

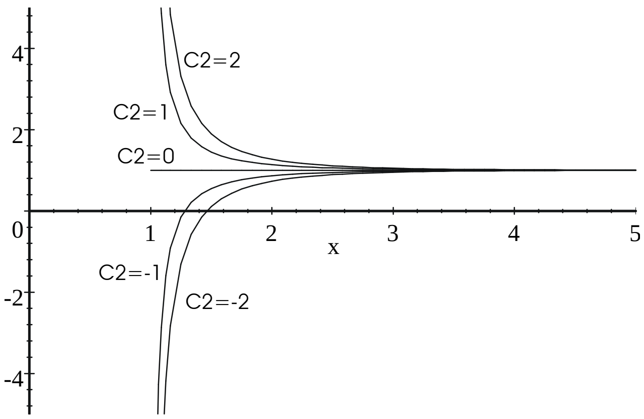
$$y(x) = \frac{x+K_1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 7.4 *Les fonctions $a(x) = |1-x|$, $b(x) = x$ et $c(x) = x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. $a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, on se place donc soit sur $I_1 =]-\infty, 1[$ soit sur $I_2 =]1, +\infty[$.*
Sur I_1, l'équation devient $(1-x)\,y' + xy = x$. La solution de l'équation homogène est $y(x) = C_1 \exp\left(-\int \frac{x}{1-x}dx\right) = C_1 \exp\left(-\int \frac{x-1+1}{1-x}dx\right) = C_1 \exp\left(x + \ln|1-x|\right) = C_1\,(1-x)\,e^x$. Une solution particulière évidente est $y = 1$.
Ainsi la solution générale sur I_1 est $y(x) = 1 + C_1\,(1-x)\,e^x$ où $C_1 \in \mathbb{R}$



Solutions sur I_1

Sur I_2, l'équation devient $(x-1)\,y' + xy = x$. La solution de l'équation homogène est $y(x) = C_2 \exp\left(-\int \frac{x}{x-1}dx\right)) = C_2 \exp\left(-\int \frac{x-1+1}{x-1}dx\right)) = C_2 \exp\left(-x - \ln|x-1|\right) = C_2 \dfrac{e^{-x}}{x-1}$. Une solution particulière évidente est $y = 1$.
Ainsi la solution générale sur I_2 est $y(x) = 1 + C_2 \dfrac{e^{-x}}{x-1}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.



Solutions sur I_2

<u>Solutions sur $\mathbb{R}$:</u> Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors y est solution sur I_1 et sur I_2 donc il existe C_1 et C_2 telles que si $x < 1,\ y(x) = 1 + C_1\,(1-x)\,e^x$ et si $x > 1,\ y(x) = 1 + C_2 \dfrac{e^{-x}}{x-1}$.
-Continuité en 1 :
y est continue en 1 donc $\lim\limits_{x\to1^+} y(x) = \lim\limits_{x\to1^-} y(x) = y(1)$
$\lim\limits_{x\to1^-} y(x) = \lim\limits_{x\to1^-} 1 + C_1\,(1-x)\,e^x =$ ceci pour toute valeur de C_1.
En 1^+, on a $y(x) = 1 + C_2 \dfrac{e^{-x}}{x-1}$, ainsi $y(x)$ a une limite finie si et seulement si $C_2 = 0$ et dans ce cas $\lim\limits_{x\to1^+} y(x) = 1$
$\boxed{\text{CN : } C_2 = 0}$
-Dérivabilité en 1 :
y est dérivable en 1 donc $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{y(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{y(x)-1}{x-1} = y'(1)$
$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{y(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} C_1 e^x = eC_1$
en 1^+, $\dfrac{y(x)-1}{x-1} = 0$
Les deux demi-dérivées doivent être égales donc

$\boxed{\text{CN : } C_1 = 0}$

-On vérifie que si $x=1$, on a bien $|1-x|\,y'+xy=x$, ce qui est vrai car $y(1)=1$.
Sur $\mathbb{R}$ la seule solution est la fonction constante égale à 1 .

Exercice 7.5 $y''-(2-1)\,y'+(2\times(-1))\,y=y''-y'-2y$ *convient.*

Exercice 7.6 $y''-2y'+y$ *convient.*

Exercice 7.7 $y''=0$ *par exemple.*

Exercice 7.8 $y''+9y=0$.

Exercice 7.9 $y''-((2+i)+(2-i))\,y'+(2+i)\times(2-i)\,y=y''-4y'+5=0$ *convient.*

Exercice 7.10 *L'équation caractéristique est $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)$, les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x)=K_1e^x+K_2e^{2x}$$

on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.
La fonction $y(x)=ax^2+bx+c$, $y(x)$ est solution de (E_1)

$$\begin{aligned}
&\iff 2a-3(2ax+b)+2\left(ax^2+bx+c\right)=x^2-3x\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 1\\ -6a+2b &=& -3\\ 2a-3b+2c &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}\\ b=0\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les solutions sont

$$y(x)=K_1e^x+K_2e^{2x}+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right),\ (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2$$

Exercice 7.11 *L'équation caractéristique est $r^2+r-2=(r+2)(r-1)$. Les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x)=K_1e^{-2x}+K_2e^x$$

On applique le principe de superposition.
Il est clair que $y_1(x)=1$ est solution de

$$y''+y'-2y=-2 \tag{E_1}$$

On sait qu'une solution particulière de

$$y''+y'-2y=9e^x \tag{E_2}$$

est de la forme

$$y(x)=P(x)\,e^x$$

où $\deg P=1$ et P sans coefficient constant car 1 est racine de l'équation caractéristique.
On pose $y(x)=z(x)\,e^x$, alors en remplaçant, on sait que , en simplifiant par les exponentielles, on obtient une équation du second degré en z à coefficients constants.
La "boite à z" donne

$y(x)$	$z(x)$
e^x	$1=e^{0\times x}$
e^{-2x}	e^{-3x}

Rappelons que la première colonne donne les solutions de l'équation homogène en y, la seconde celles de l'équation homogène en z. Cette dernière a donc pour équation caractéristique (car le coefficient de y'' dans (E_2) vaut 1)

$$r^2 - (0 + (-3))\,r + (0 \times (-3)) = 0$$

L'équation en z est donc

$$z'' + 3z' = 9$$

dont une solution évidente est

$$z = 3x$$

Ainsi $y_2(x) = 3x$ est solution de (E_2).
En définitive les solutions sont

$$y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^x + 3xe^x + 1,\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.12 1. *L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-2x}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve*

$$a - 2ax - 2b = 2x + 1$$

d'où $y(x) = -x - 1$.
En résumé les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

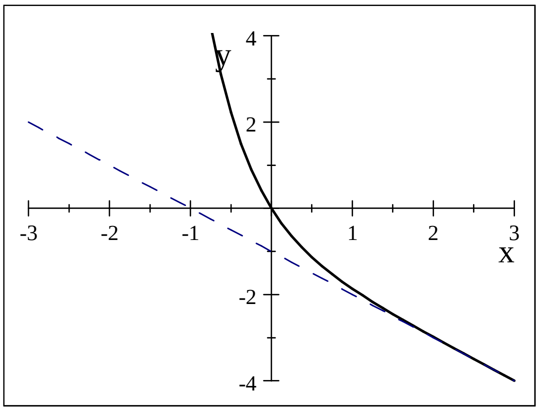
$$y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-2x} - x - 1$$

2. *La fonction f est de la forme $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - x - 1$, déterminons λ et μ.*
La condition $f(0) = 0$, se traduit immédiatement par $\lambda + \mu - 1 = 0$. L'autre condition nous impose

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda e^x + \mu e^{-2x} - x - 1}{x}$$

est finie or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mu e^{-2x} - x - 1}{x} = -1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda e^x}{x} = \pm\infty$ si $\lambda \neq 0$, ceci conduit à poser $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. Par conséquent

$$f(x) = e^{-2x} - x - 1$$



L'étude des variations de f est facile. La fonction f est dérivable de dérivée $f'(x) = -2e^{-2x} - 1$. Comme $e^{-2x} > 0$, on en déduit que f' est toujours négative, donc f est décroissante. De plus, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = -x - 1$.

Exercice 7.13 *Puisque $\operatorname{ch} t \neq 0$, on peut diviser par $\operatorname{ch} t$ pour obtenir $y' + \operatorname{th}(t)\,y = \dfrac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch}(t)}$. On résout alors l'équation homogène $y' + \operatorname{th}(t)\,y = 0$. La fonction $\operatorname{th} t$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$y(t) = K \exp\left(-\int \operatorname{th}(t)\,dt\right)$$

Or $\displaystyle\int \operatorname{th}(t)\,dt = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}dt = \ln|\operatorname{ch} t| + C = \ln \operatorname{ch} t + C$. Ainsi les solutions de l'équation homogène sont

$$y(t) = \frac{K}{\operatorname{ch} t} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On pose donc $y(t) = \dfrac{K(t)}{\operatorname{ch} t}$, *d'où*

$$y' + \operatorname{th}(t)\, y = \frac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch}(t)} \iff \frac{K'(t)}{\operatorname{ch} t} - \frac{K(t)\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th} t \frac{K(t)}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch}(t)}$$

Aprés simplification, on obtient

$$\frac{K'(t)}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch}(t)} \iff K'(t) = \frac{1}{(1+t^2)}$$

On choisit donc $K(t) = \arctan t$. *Les solutions de* $\operatorname{ch}(t)\, y' + \operatorname{sh}(t)\, y = \dfrac{1}{1+t^2}$ *sont donc les fonctions*

$$y(t) = \frac{K + \arctan t}{\operatorname{ch} t} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Remarque : *l'équation homogène s'écrit* $\operatorname{ch} t y' + \operatorname{sh} t y = 0$ *ce qui peut se lire* $(\operatorname{ch} t \times y(t))' = 0$ *(c'est* $uv' + u'v$*), son intégration est donc immédiate.*

Exercice 7.14 *On résout l'équation homogène* $y'' + 3y' + 2y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 + 3r + 2 = (r+2)(r+1)$ *dont les solutions sont* -2 *et* -1. *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

On applique ensuite le principe de superposition.
On cherche donc une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = t^2$ *sous la forme d'un polynôme de degré* 2. *On pose donc* $y(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, *alors*

$$y'' + 3y' + 2y = t^2 \iff \begin{array}{rrrrrl} & 2\times(& \alpha t^2 + & \beta t + & \gamma) & \\ + & 3\times(& & 2\alpha t + & \beta) & \\ + & (& & & 2\alpha) & = t^2 \end{array}$$

On obtient donc l'égalité entre polynômes

$$2\alpha t^2 + (2\beta + 6\alpha)\, t + (2\gamma + 3\beta + 2\alpha) = t^2$$

ce qui donne $2\alpha = 1$, $2\beta + 6\alpha = 0$ *et* $2\gamma + 3\beta + \alpha = 0$ *soit* $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = -\dfrac{3}{2}$ *et* $\gamma = \dfrac{7}{4}$. *Une solution particulière de* $y'' + 3y' + 2y = t^2$ *est donc* $y(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3t}{2} + \dfrac{7}{4}$.
On cherche ensuite une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$. *On pose* $y(t) = z(t)\, e^{-t}$. *La "boite à z" donne*

$y(t)$	$z(t)$
e^{-t}	$1 = e^{0\times t}$
e^{-2t}	e^{-t}

l'équation en z est donc

$$z'' + z' = 1$$

On peut le vérifier car $y'(t) = z'(t)\, e^{-t} - z(t)\, e^{-t}$, $y''(t) = z''(t)\, e^{-t} - 2z'(t)\, e^{-t} + z(t)\, e^{t}$ *ainsi*

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \iff z''(t)\, e^{-t} + (-2+3)\, z'(t)\, e^{-t} + (1 - 3 + 2)\, z(t)\, e^{t} = e^{-t}$$

On choisit donc $z(t) = t$, *une solution particulière de* $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$ *est donc* $y(t) = te^{-t}$.
Enfin, on cherche une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = \sin t$. *Pour cela on détermine une solution de* $y'' + 3y' + 2y = e^{it}$ *dont on prend la partie imaginaire. On pose alors* $y(t) = z(t)\, e^{it}$, *la "boite à z" donne*

$y(t)$	$z(t)$
e^{-t}	$e^{-(1+i)t}$
e^{-2t}	$e^{-(2+i)t}$

L'équation en z est donc

$$z'' + (3+2i)\,z' + (1+i)\,(2+i)\,z = 1$$

dont une solution est $z = \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$. *Ainsi une solution particulière de* $y'' + 3y' + 2y = e^{it}$ *est*

$$y\,(t) = \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right) e^{it}$$

la partie imaginaire de cette solution est

$$\frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t$$

c'est une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = \sin t$.
Pour conclure les solutions de $y'' + 3y' + 2y = t^2 + e^{-t} + \sin(t)$ *sont*

$$y\,(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} + \frac{7}{4} + te^{-t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t + K_1e^{-t} + K_2e^{-2t} \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.15 *On a* $1 + x^2 \neq 0$ *ceci pour tout* x, *l'équation s'écrit donc*

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$$

La fonction $a\,(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *les solutions de l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$ *sont donc*

$$y\,(x) = K\exp\left(-\int \frac{xdx}{1+x^2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

car $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}$.
On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose $y\,(x) = \dfrac{K\,(x)}{\sqrt{1+x^2}}$, *alors*

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2} \iff \frac{K'\,(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \iff K'\,(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On choisit $K\,(x) = \operatorname{arg\,sh}(x)$. *Les solutions de l'équation différentielle initiale sont donc*

$$y\,(x) = \frac{K + \operatorname{arg\,sh}(x)}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Exercice 7.16

1. *Facile, l'équation caractéristique est* $r^2 - 3r + 2 = (r-1)\,(r-2)$, *les solutions de l'équation homogène sont* $y\,(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ *où* $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
   On cherche une solution particulière en posant $y\,(x) = z\,(x)\,e^x$. *La boite à* z *donne immédiatement*

   $$z'' - z' = 1$$

   donc $z\,(x) = -x$ *et* $y\,(x) = -xe^x$.
2. *On remplace* z *par* y', *on obtient*

   $$\begin{aligned} y' - z &= 0 \\ 2y + y'' - 3y' &= e^x \\ y\,(0) &= 1,\ z\,(0) = 0 \end{aligned}$$

   d'où $y\,(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$ *or* $y\,(0) = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 1$. *Puis* $y'\,(x) = z\,(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - xe^x - e^x$, *or* $z\,(0) = 0 \Longrightarrow C_1 + 2C_2 = 1$. *On obtient alors* $C_1 = 1$ *et* $C_2 = 0$.
   En résumé

   $$\begin{aligned} y\,(x) &= (1-x)\,e^x \\ z\,(x) &= (1-x)\,e^x - e^x = -xe^x. \end{aligned}$$

Enfin $\int_0^1 z(x)\,dx = \int_0^1 y'(x)\,dx = y(1) - y(0) = -1.$

Exercice 7.17 *1. On connaît les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique. Cette équation est donc (à une constante multiplicative près), $r^2 - Sr + P$ où $S = r_1 + r_2$ et $P = r_1 r_2$. On a donc comme équation normalisée (coefficient de y'' égal à 1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

2. *Cette fois ci -4 est racine double, on a donc comme équation différentielle : $y'' + 8y' + 16y = 0$*
3. *On consulte le cours, pour en déduire que les racines sont complexes conjuguées égales à $3+i$ et $3-i$ (la partie réelle est dans l'exponentielle, la partie imaginaire dans les fonctions trigonométriques. Une solution est donc $y'' - (3+i+3-i)\,y' + (3+i)(3-i)\,y = y'' - (3+i+3-i)\,y' + |3+i|^2\,y = 0$, soit $y'' - 6y + 10y = 0$.*
4. *On n'a pas le choix $r = 3$ est racine double,une solution est $y'' - 6y' + 9y = 0$*
5. *On a deux racines complexes conjuguées dont l'une est $r_1 = 1+i$, l'autres est donc $1-i$ et une solution est $y'' - (1+i+1-i)\,y' + (1+i)(1-i)\,y = y'' - 2y' + 2y = 0$*
6. *Cette fois ci, on a plein de possibilité de la forme $y'' - (5+a)\,y' + 5ay = 0$ où $a \in \mathbb{R}$.*

Exercice 7.18 *Soit (E) l'équation différentielle $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = e^x + x$, alors (E) est équivalente à $y' + \frac{2x}{(1+x^2)}y = \frac{e^x+x}{(1+x^2)}$.car $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$.*
La fonction $a(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on sait donc que les solutions de l'ESSM sont

$$y(x) = K\exp\left(-\int \frac{2x}{(1+x^2)}dx\right) = K\exp\left(-\ln\left(1+x^2\right)\right) = \frac{K}{1+x^2} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

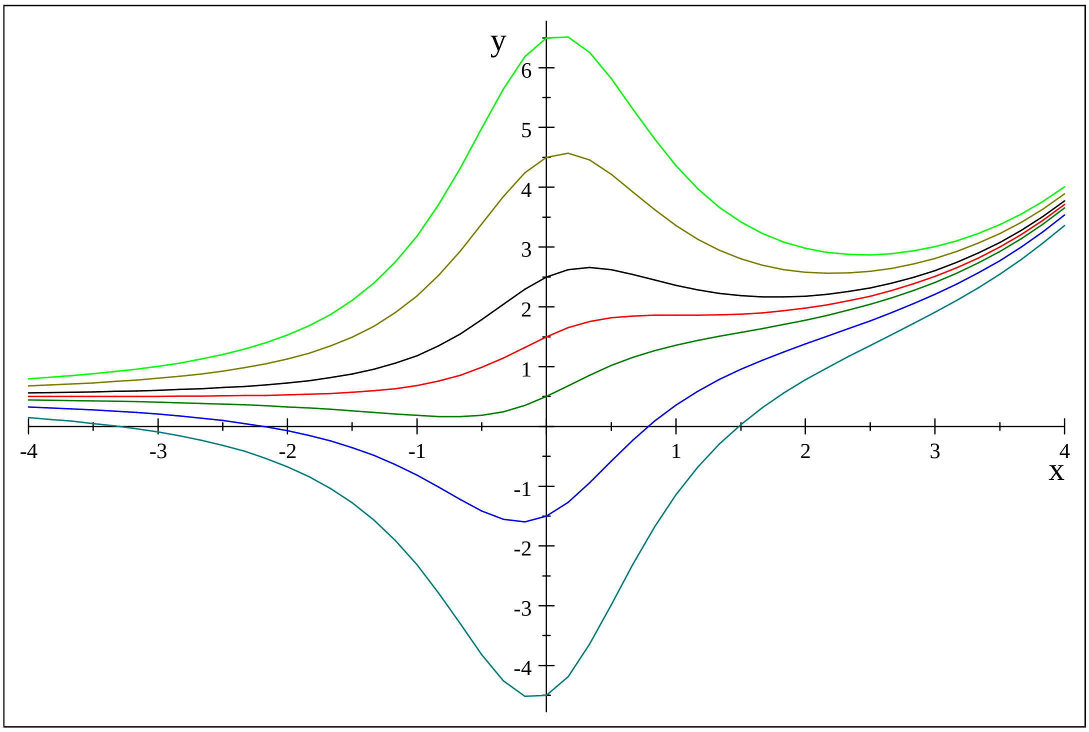
On cherche ensuite une solution particulière. On applique le principe de superposition.
On cherche une solution particulière de $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = x$. Une solution évidente est $y_1(x) = \dfrac{1}{2}$. On cherche ensuite une solution particulière de $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = e^x$ en appliquant la méthode de la variation de la constante. On cherche donc la solution sous la forme $y_2(x) = \dfrac{K(x)}{1+x^2}$, alors

$$\left(1+x^2\right)y_2'(x) + 2xy(x) = e^x \iff \left(1+x^2\right)\frac{K'(x)}{1+x^2} + \left(1+x^2\right) \times \left(-\frac{2xK(x)}{\left(1+x^2\right)^2}\right) + 2x\frac{K(x)}{1+x^2} = e^x \iff K'(x) = e^x$$

On choisit donc $K(x) = e^x$ et $y_2(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.
Les solutions de (E) sont donc

$$y(x) = \frac{K+e^x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Ci dessous, j'ai tracé quelques solutions pour différentes valeurs de K (avec en rouge $K = 0$).



Exercice 7.19 *On résout l'équation sans second membre $y''-5y'+6y=0$. L'équation caractéristique est $r^2-5r+6=0$,, ses racines sont $r=2$ et $r=3$ (il suffit de calculer le discriminant $\Delta=25-24$). Les solutions de l'équation sans second membre sont donc*

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme $y(x)=z(x)e^x$.et on écrit la boite à z.

$y \xleftarrow[\times e^{-x}]{} z$	
e^{2x}	e^{x}
e^{3x}	e^{2x}

Les solutions de l'équation homogène en z sont e^x et e^{2x}. On peut donc affirmer que les racines de son équation caractéristique (celle de l'équation en z) sont 1 et 2 (On connaît ainsi l'équation caractéristique : $r^2-(\text{somme des racines})\times r+(\text{produit des racines})$). L'équation en z est donc

$$\begin{aligned} z''-(1+2)z'+(1\times 2)z &= x^2+1\\ z''-3z'+2z &= x^2+1 \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2, $z(x)=ax^2+bx+c$. Alors

$$\begin{array}{lllll} z(x)= & ax^2+ & bx+ & c & \times(2)\\ z'(x)= & & 2ax+ & b & \times(-3)\\ z''(x)= & & & 2a & \times(1) \end{array}$$

$$z''-3z'+2z=x^2+1 \Longleftrightarrow 2ax^2+(2b-6a)x+(2c-3b+2a)=x^2+1$$

soit

$$\left\{\begin{array}{c} 2a=1\\ 2b-6a=0\\ 2c-3b+2a=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{3}{2}\\ c=\dfrac{9}{4} \end{array}\right.$$

Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}\right) e^x$$

Les solutions de $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right) e^x$ *sont alors*

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}\right) e^x \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.20 *On résout l'équation sans second membre* $y'' - 4y' + 13y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 4r + 13 = 0$, *ses racines sont* $r = 2 + 3i$ *et* $r = 2 - 3i$. *Les solutions de l'équation sans second membre sont donc*

$$y(x) = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^{2x} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière de (E), *on cherche une solution particulière de* (Ec) : $y'' - 4y' + 13y = e^{ix}$ *sous la forme* $y(x) = z(x) e^{ix}$, *dont on prendra la partie réelle. On écrit la boite à* z.

$y \xrightarrow[\times e^{-ix}]{} z$	
$e^{(2+3i)x}$	$e^{(2+2i)x}$
$e^{(2-3i)x}$	$e^{(2-4i)x}$

L'équation en z *est donc*

$$z'' + (2 + 2i + 2 - 4i) z' + (2 + 2i)(2 - 4i) z = 1$$

soit

$$z'' + 4z' + (12 - 4i) z = 1$$

Une solution est $z = \dfrac{1}{12 - 4i} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{3 - i} = \dfrac{1}{4}\dfrac{3 + i}{|3 - i|^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{3 + i}{9 + 1} = \dfrac{3 + i}{40}$. *Une solution de* (Ec) *est donc* $\dfrac{3 + i}{40} e^{ix} = \dfrac{3 + i}{40} (\cos x + i \sin x)$ *et une solution particulière de* (E) *est*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \operatorname{Re}\left(\frac{3 + i}{40} (\cos x + i \sin x)\right) \\ &= \frac{3 \cos x}{40} - \frac{\sin x}{40} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) *sont donc*

$$y(x) = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^{2x} + \frac{3 \cos x}{40} - \frac{\sin x}{40} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.21 *On résout l'équation sans second membre* $y'' + 4y' + 5y = 0$. *L'équation caractéristique est* $r^2 + 4r + 5 = 0$,, *ses racines sont* $r = -2 + i$ *et* $r = -2 - i$. *Les solutions de l'équation sans second membre sont donc*

$$y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-2x} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière de (E), *on cherche une solution particulière de* (Ec) : $y'' + 4y' + 5y = xe^{ix} e^{-2x} = xe^{(-2+i)x}$ *sous la forme* $y(x) = z(x) e^{(-2+i)x}$, *dont on prendra la partie imaginaire. On écrit la boite à* z.

$y \xrightarrow[\times e^{(2-i)x}]{} z$	
$e^{(-2+i)x}$	1
$e^{(-2-i)x}$	e^{-2ix}

L'équation en z *est donc*

$$z'' + 2iz' = x$$

On cherche z sous la forme d'un polynôme de degré 2, $z(x) = ax^2 + bx + c$. Alors

$$\begin{array}{llll} z(x) = & ax^2+ & bx+ & c \\ z'(x) = & & 2ax+ & b & \times(2i) \\ z''(x) = & & & 2a & \times(1) \end{array}$$

$$z'' + 2iz' = x \iff 2a + 2ib + 4aix = x$$

soit

$$\left\{\begin{array}{c} 4ai = 1 \\ 2a + 2ib = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \\ b = -\frac{a}{i} = -ia = \frac{1}{4} \\ \text{On choisit } c = 0 \text{ (puisqu'il est quelconque)} \end{array}\right.$$

Ainsi $z(x) = -\frac{ix^2}{4} + \frac{x}{4}$ et donc $y(x) = \frac{x}{4}(1 - ix)e^{(-2+i)x} = \frac{x}{4}(1 - ix)e^{-2x}e^{ix} = \frac{x}{4}(1 - ix)(\cos x + i\sin x)e^{-2x}$ est une solution de (Ec). Il reste à prendre la partie imaginaire de cette solution pour obtenir une solution particulière y_p de (E), ce qui donne

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \operatorname{Im}\left(\frac{x}{4}(1 - ix)(\cos x + i\sin x)e^{-2x}\right) \\ &= \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)e^{-2x} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc

$$y(x) = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-2x} + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x)e^{-2x} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.22 *Pour $y''+5y'-6y = e^t$, on résout l'équation caractéristique qui est $r^2+5r-6 = (r+6)(r-1) = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-6t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour obtenir une solution particulière, on écrit la boite à z. On pose $y(t) = z(t)e^t$*

$y \xrightarrow[\times e^t]{} z$	
e^t	1
e^{-6t}	e^{-7t}

L'équation en z est donc $z'' - (-7)z' = 1$ qui admet pour solution particulière $z' = \frac{1}{7}$. On choisit donc $z(t) = \frac{t}{7}$.
Les solutions de $y'' + 5y' - 6y = e^t$ sont donc $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-6t} + \frac{te^t}{7}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $y'' - 4y' + 3y = 2e^t$, on résout l'équation caractéristique qui est $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3) = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour obtenir une solution particulière, on écrit la boite à z. On pose $y(t) = z(t)e^t$

$y \xrightarrow[\times e^t]{} z$	
e^t	1
e^{3t}	e^{2t}

L'équation en z est donc $z'' - (2)z' = 2$ qui admet pour solution particulière $z' = -1$. On choisit donc $z(t) = -t$.
Les solutions de $y'' - 4y' + 3y = 2e^t$ sont donc $y(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} - te^t$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $y'' + y = \cos 2t$, l'équation caractéristique est $r^2 + 1$ dont les racines sont i et $-i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution particulière de $y'' + y = e^{2it}$ en posant $y(t) = z(t)e^{2it}$, on en prendra alors la partie réélle

$y \xrightarrow[\times e^{-2it}]{} z$	
e^{it}	e^{-it}
e^{-it}	e^{-3it}

L'équation en z est donc $z''-(-i-3i)\,z'+(-i)\times(-3i)\,z=1$, *soit* $z''+4iz'-3z=1$ *qui admet pour solution particulière* $z=-\dfrac{1}{3}$. *On choisit donc* $z(t)=-\dfrac{1}{3}$. *Une solution particulière de* $y''+y=e^{2it}$ *est donc* $-\dfrac{e^{2it}}{3}=-\dfrac{\cos 2t}{3}-i\dfrac{\sin 2t}{3}$.
On en déduit qu'une solution particulère de $y''+y=\cos 2t$ *est* $-\dfrac{1}{3}\cos 2t$.
Les solutions de $y''+y=\cos 2t$ *sont donc* $y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$ *où* $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.23 *Puisque* $\left(1+x^2\right)>0$ *l'équation différentielle est équivalente à* $y'+\dfrac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}y=-\dfrac{2}{1+x^2}$.
Puisque $\dfrac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$, *les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x)=C\exp\left(-\int\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx\right)\ \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

On cherche a et b réels tels que $\dfrac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$. *On a alors, en multipiant par x,*

$$\frac{x^2-1}{1+x^2}=a+x\frac{bx+c}{x^2+1}\ \text{ ce qui, avec } x=0 \text{ donne } a=-1$$

En multipliant par $1+x^2$, on obtient

$$\frac{x^2-1}{x}=-\frac{1+x^2}{x}+bx+c$$

ce qui avec $x=i$ donne

$$-\frac{2}{i}=2i=bi+c\Longrightarrow b=2 \text{ et } c=0$$

d'où

$$\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

Ainsi

$$\int\frac{x^2-1}{x\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=-\ln|x|+\ln\left(1+x^2\right)+K$$

et les solutions (sur $]0,+\infty[$) de l'équation homogène sont

$$y(x)=C\exp\left(\ln x-\ln\left(1+x^2\right)\right)=\frac{Cx}{1+x^2}\ \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

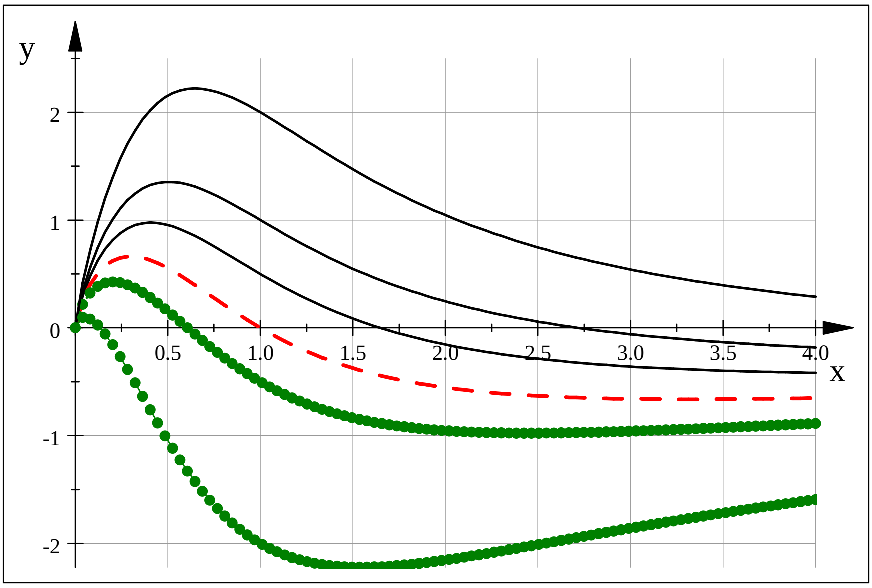
Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante. On pose alors $y(x)=\dfrac{xC(x)}{1+x^2}$, *on a alors*

$$\left(1+x^2\right)y'+\frac{x^2-1}{x}y=\left(1+x^2\right)\times\frac{xC'(x)}{1+x^2}=-2\Longleftrightarrow C'(x)=\frac{-2}{x}$$

On choisit $C(x)=-2\ln x$. *Les solutions, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle donnée sont donc*

$$y(x)=\frac{Cx}{1+x^2}-\frac{2x\ln x}{1+x^2}\ \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

Pour le plaisir, voici le graphe de quelques solutions (En rouge $C=0$, en noir $C>0$, en vert $C<0$).



Exercice 7.24

1. *L'équation différentielle s'écrit* $y'' + 5y' + 4y = e^x$, *l'équation caractéristique est* $r^2 + 5r + 4 = (r+4)(r+1) = 0$. *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-1x} \ , \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour avoir une solution particulière, on pose $y(x) = z(x)e^x$ *et on écrit la boite à* z

$y \xleftarrow[\times e^x]{} z$	
e^{-1x}	e^{-2x}
e^{-4x}	e^{-5x}

l'équation en z *est donc* $z'' - (-2-5)z' + (-2)\times(-5)z = z'' + 7z' + 10z = 1$ *dont une soution est* $z = \dfrac{1}{10}$. *D'où*

$$\mathcal{S} = \left\{ C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-5x} + \frac{e^x}{10},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. *L'équation différentielle s'écrit* $y'' + 4y' + 4y = e^x$, *l'équation caractéristique est* $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \ , \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour avoir une solution particulière, on pose $y(x) = z(x)e^x$ *et on écrit la boite à* z

$y \xleftarrow[\times e^x]{} z$	
e^{-2x}	e^{-3x}
xe^{-2x}	xe^{-3x}

l'équation en z *est donc* $z'' - (-3-3)z' + (-3)\times(-3)z = 1$ *dont une soution est* $z = \dfrac{1}{9}$. *D'où*

$$\mathcal{S} = \left\{ C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{e^x}{9},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. *L'équation différentielle s'écrit* $y'' + 4y = e^x$, *l'équation caractéristique est* $r^2 + 4 = 0$. *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \ , \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour avoir une solution particulière, on pose $y(x) = z(x)e^x$ *et on écrit la boite à* z

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
e^{2ix}	$e^{(c)x}$
e^{-2ix}	$xe^{(-2i+1)x}$

l'équation en z *est donc* $z'' - (2i + 1 - 2i + 1) z' + (2i + 1) \times (-2i + 1) z = z'' - 2z' + 5z = 1$ *dont une soution est* $z = \dfrac{1}{5}$. *D'où*

$$\mathcal{S} = \left\{ C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{e^x}{5}, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 7.25

1. *On a* $e^x + 1 \neq 0$ *pour tout* x *réel. On résout donc sur* $\mathbb{R}$. *On sait que les solutions sont les fonctions de la forme*

$$y(x) = K \exp\left(\int \frac{1}{1 + e^x} dx \right) \ \text{où } K \in \mathbb{R}$$

On regarde l'indication qui nous dit que la dérivée de $\ln(1 + e^x)$ *est* $\dfrac{e^x}{1 + e^x}$ *donc* $\int \dfrac{1}{1 + e^x} dx = \int \dfrac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = x - \ln(1 + e^x)$. *Les solutions de* (E_1) *sont donc*

$$K \frac{e^x}{1 + e^x} \ \text{où } K \in \mathbb{R}$$

On fait ensuite la variation de la constante. On pose $y(x) = K(x) \dfrac{e^x}{1 + e^x}$. *On a* $y(x)$ *solution de* (E) *si et seulement si*

$$(e^x + 1) \times K'(x) \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

soit

$$K'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

On choisit $K(x) = \arctan x$. *Les solutions de* (E) *sont donc*

$$y(x) = (K + \arctan x) \frac{e^x}{1 + e^x} \ \text{où } K \in \mathbb{R}$$

2. *On résout* $(K + \arctan 0) \dfrac{e^0}{1 + e^0} = \dfrac{K}{2} = -\dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow K = -\dfrac{\pi}{2}$, *ainsi*

$$y_0(x) = \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Pour $x > 0$, *on a*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$y_0(x) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \frac{e^x}{1 + e^x}$$

3. *On a alors* $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x-1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *car* $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et par continuité de l'arctangente en* 0 *et du fait que* $\arctan 0 = 0$. *Donc*

$$y_0(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ou bien on écrit que $\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.26 *Pour la première l'équation caractéristique est* r^2+5r-6 *dont les racines sont* 1 *et* -6. *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$C_1e^t + C_2e^{-6t} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière, on pose $y(t) = z(t)\,e^t$. *La boite à* z *donne*

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
e^t	$e^{0t}=1$
e^{-6t}	e^{-7t}

qui donne l'équation en z : $z''+7z'=1$. *Cette équation admet comme solution* $z(t) = \dfrac{t}{7}$. *En définitive, les solutions sont*

$$C_1e^t + C_2e^{-6t} + \frac{te^t}{7} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Pour la seconde l'équation caractéristique est $r^2+4r+13$ *qui a pour racines* $-2+3i, -2-3i$. *Les solutions de l'équation homogène sont donc*

$$(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)\,e^{-2t} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière, on pose $y(t) = z(t)\,e^{-t}$. *La boite à* z *donne*

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
$e^{(-2+3i)t}$	$e^{(-1+3i)t}$
$e^{(-2-3i)t}$	$e^{(-1+3i)t}$

L'équation en z *est donc* $z'' + (?)\,z' + (-1+3i)\times(-1-3i)\,z = z'' + (?)\,z' + |-1+3i|^2\,z = 1$ *qui a pour solution* $z = \dfrac{1}{|-1+3i|^2} = \dfrac{1}{10}$. *Les solutions sont donc*

$$(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)\,e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{10} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Pour la dernière, les solutions de l'équation homogène sont connues depuis la classe de terminale :

$$C_1\cos t + C_2\sin t \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière, on pose cherche une solution de (E_c) : $y''+y = e^{2it}$ *dont on prend la partie réelle. Pour cela, on pose* $y(t) = z(t)\,e^{2it}$. *La boite à* z *donne*

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
e^{it}	e^{-it}
e^{-it}	e^{-3it}

L'équation en z *qui est associée à* (E_c) *est alors* $z'' + (?)\,z' + (-i)\times(-3i)\,z = z'' + (?)\,z' - 3z = 1$ *qui a pour solution* $z = \dfrac{1}{3}$ *et donne* $y(t) = -\dfrac{e^{2it}}{3}$. *On prend la partie réelle, soit* $-\dfrac{\cos 2t}{3}$ *pour avoir une solution particulière de* $y''+y=\cos 2t$. *En définitive les solutions de* $y''+y=\cos 2t$ *sont*

$$C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{\cos 2t}{3} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Exercice 7.27 *On résout sur* $I_1 =]0,1[$ *ou sur* $I_2 =]1,+\infty[$, *l'équation est équivalente à* $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{1}{\ln x}$. *Les fonctions* $a(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ *et* $b(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ *sont continues sur* I_k.

L'équation sans second membre est $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = 0$. *Elle admet sur* I_k *comme solution*

$$y(x) = C_k \exp\left(-\int \frac{dx}{x\ln x}\right)$$

Or $\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{u'}{u}$ *où* $u = \ln x$, *ainsi* $\int \dfrac{dx}{x\ln x} = \ln(|\ln x|)$. *Les solutions de l'équation sans second membre sont donc (quitte à changer* C_1 *en* $-C_1$ *sur* I_1*)*

$$y(x) = \frac{C_k}{\ln x} \text{ où } C_k \in \mathbb{R}$$

Pour obtenir une solution particulière, on utilise la variation de la constante : On cherche $y(x) = \dfrac{C(x)}{\ln x}$ *solution de l'équation différentielle sur* I_k, *alors*

$$\frac{C'(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \Longrightarrow C'(x) = 1$$

Ainsi

$$y_p(x) = x \text{ est une solution particulière}$$

Les solutions sur I_k *sont donc de la forme*

$$\frac{x + C_k}{\ln x} \text{ où } C_k \in \mathbb{R}$$

Solutions sur $\mathbb{R}$ *: Une solution sur* $]0,+\infty[$ *est une solution sur* I_1 *et sur* I_2, *et est continue, dérivable sur* $]0,+\infty[$ *donc en* $x = 1$. *Il existe donc* C_1 *et* C_2 *tels que*

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x + C_1}{\ln x} \text{ si } x < 0 \\ y(x) &= \frac{x + C_2}{\ln x} \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

Puisque y *est continue en* $x = 1$, *elle admet une limite en* $x = 1$ *(et cette limite doit être la valeur obtenue pour* $y(1)$ *lorsque l'on fait* $x = 1$ *dans l'équation différentielle , i.e.* $y(1) = 1$*).*
Or

$$\frac{x + C_1}{\ln x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } 1 + C_1 > 0 \\ +\infty \text{ si } 1 + C1 < 0 \\ ? \text{ si } 1 + C_1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } 1 + C_1 = 0$$

De même pour la limite en 1^+. *Donc* $C_1 = C_2 = -1$ *et* $y(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ *pour* $x \neq 1$, $y(1) = 1$. *Reste à prouver que cette fonction est dérivable en* $x = 1$.
Remarque : *Version courte de résolution. Si* y *est solution sur* $]0,+\infty[$ *alors pour* $x \in]0,+\infty[$

$$\ln(x)y' + \frac{y}{x} = (y\ln x)' \text{ ainsi } \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1 \Longleftrightarrow y\ln x = x + C$$

d'où pour $x \neq 1$,

$$y(x) = \frac{x + C}{\ln(x)}$$

Puisque y *a une limite en* $x = 1$, *la seule constante possible est* $C = -1$. *Reste à prouver la dérivabilité en* $x = 1 \cdots$
Pour montrer la dérivablité en $x = 1$, *on peut faire un DL en* $x = 1$ *à l'ordre 1 de la fonction définie par*

$$y(x) = \frac{x-1}{\ln x} \text{ et } y(1) = 1$$

Mais il y a plus simple. Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$, *alors* $f(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{h - \dfrac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)}{h} = 1 - \dfrac{h}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$.
Ainsi f *est continue dérivable en* $x=1$ *avec* $f(1)=1$, *donc* $y = \dfrac{1}{f}$ *est continue, dérivable en* $x=1$ *(avec* $y'(1) = -\dfrac{f'(1)}{f^2(1)} = \dfrac{1}{2}$*).*
Conclusion : y est solution sur $]0,+\infty[$ *de l'équation différentielle car elle est est dérivable sur* $]0,+\infty[$, *solution de l'équation différentielle sur* I_1 *et sur* I_2 *et en* $x=1$ *(car* $y(1)=1$*).*

2 Les techniques

Exercice 7.28 *On se place sur* $I_1 =]-\infty, 0[$ *ou sur* $I_2 =]0,+\infty[$. *On peut alors diviser par* x^2. *On résout donc*

$$y' + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right) y = \frac{1}{t^2}$$

L'équation homogène a pour solution

$$\begin{aligned} y(x) &= C_k \exp\left(-\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt\right) \\ &= C_k \exp\left(\frac{1}{t} + \ln|t|\right) \\ &= C_k |t| \exp\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

mais sur I_k, t *a un signe constant, on peut donc enlever la valeur absolue (quitte à remplacer* C_1 *par son opposé, qui reste quelconque).*
On peut chercher une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. Cela conduit à

$$C'(t) = \frac{1}{t^3} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

dont la primitive n'est pas évidente (on peut s'en sortir en remarquant que $\dfrac{1}{t^3} = \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{t^2}$ *et que* $\left(-\dfrac{1}{t}\right)' = \dfrac{1}{t^2}$, *ce qui conduit à une intégration par parties).*
On peut aussi cherche y *sous la forme d'un polynôme. Si* $y(t) = a_n t^n + \cdots$, *alors*

$$t^2 y' + (1-t) y = n a_n t^{n+1} - a_n t^{n+1} + \cdots = 1$$

ce qui conduit à prendre $n=1$. *On pose alors* $y(t) = at + b$

$$t^2 y' + (1-t) y = (a-b) t + b$$

Ainsi

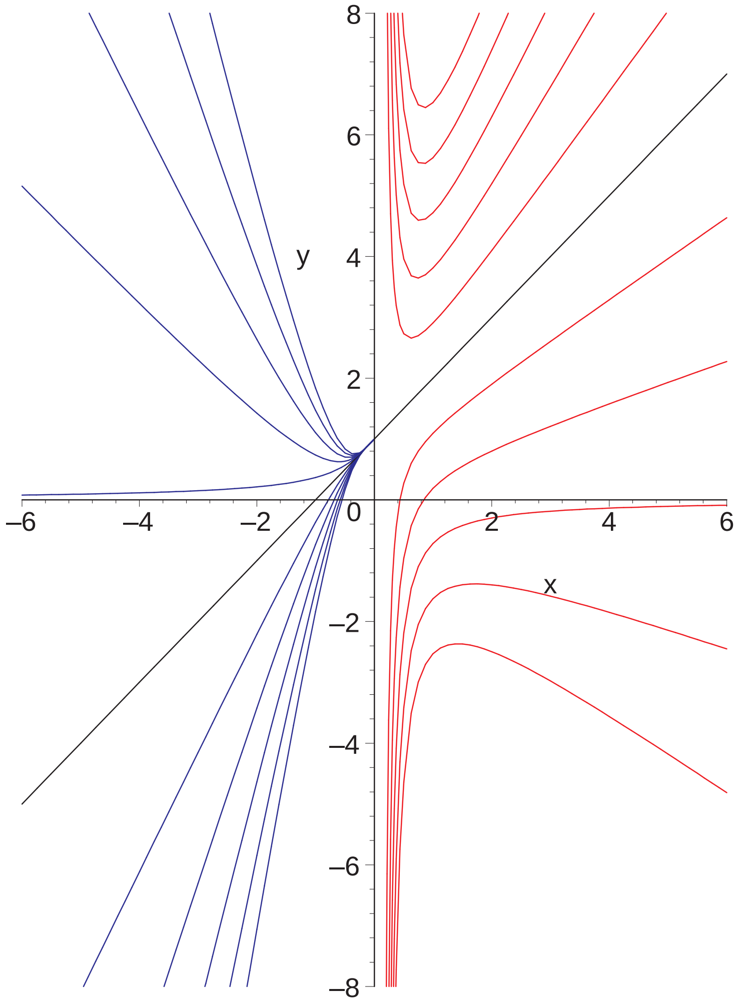
$$y(t) = t + 1$$

est une solution particulière.
Les solutions de (E) *sur* I_k *sont de la forme*

$$y(t) = C_k t \exp\left(\frac{1}{t}\right) + t + 1$$

<u>Solutions sur $\mathbb{R}$</u> : Si on trace quelques solutions, on constate que pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, *on doit prendre* $C_2 = 0$

et C_1 quelconque. Reste à le prouver



Analyse : Soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$, alors y est solution sur I_1. Il existe donc $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x < 0,\ y(x) = C_1 t \exp\left(\frac{1}{t}\right) + t + 1$$

de même, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0,\ y(x) = C_2 t \exp\left(\frac{1}{t}\right) + t + 1$$

La fonction y est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = y(0) = 1 \text{ (la valeur de } y(0) \text{ s'obtient avec } t = 0 \text{ dans } (E)\text{)}$$

On a $\exp\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0, t<0]{} 0$ *donc* $\lim_{t\to 0^-} y(t) = 1$ *pour tout* $C_1 \in \mathbb{R}$. *On a* $t\exp\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0, t>0]{} +\infty$ *donc* $\lim_{t\to 0^-} y(t) = \pm\infty$ *pour tout $C_2 \neq 0$ ($+\infty$ si $C_2 > 0$, $-\infty$ sinon). Une condition nécessaire est que $C_2 = 0$.*
On suppose maintenant $C_2 = 0$.
La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x = 0$. En particulier

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - 1}{t} = y'(0)$$

On a

$$\begin{aligned}
Si\ t &< 0,\ \frac{y(t)-1}{t} = C_1 \exp\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \xrightarrow[t\to 0, t<0]{} 1 \\
Si\ t &> 0,\ \frac{y(t)-1}{t} = 1 \xrightarrow[t\to 0, t<0]{} 1
\end{aligned}$$

Donc $y'(0) = 1$ et pour tout $C_1 \in \mathbb{R}$, y est dérivable en 0. En conclusion les solutions sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{cases} y(t) = C_1 t \exp\left(\frac{1}{t}\right) + t + 1 & si\ t < 0 \\ y(t) = t + 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 7.29 *On a $a(x) = 1 - x^2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$, $b(x) = 1 + x^2$ et $c(x) = e^x$. Les trois fonctions a, b et c sont continues. On se place sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$. L'équation homogène admet comme solution*

$$\begin{aligned}
y(x) &= K_i \exp\left(-\int \frac{1+x^2}{1-x^2} dx\right) \\
&= K_i \exp\left(\int \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx\right) \\
&= K_i e^x \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \ sur\ I_i
\end{aligned}$$

Sur I_k, la fraction $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ a un signe constant, on peut donc "enlever" les valeurs absolues.
Recherche d'une solution particulière. Par variation de la constante, on a (si $y_p(x) = K(x) e^x \frac{1-x}{1+x}$)

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right) K'(x) e^x \frac{1-x}{1+x} &= e^x \iff K'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\
&\implies K(x) = \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

d'où

$$y_p(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

Sur I_i les solutions sont donc

$$y(x) = K_i e^x \frac{1-x}{1+x} + \frac{e^x}{x+1}$$

Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, il existe K_1, K_2 et K_3 tels que

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(1-x) K_1 + 1}{1+x} e^x \ si\ x < -1 \\
y(x) &= \frac{(1-x) K_2 + 1}{1+x} e^x \ si\ -1 < x < 1 \\
y(x) &= \frac{(1-x) K_3 + 1}{1+x} e^x \ si\ x > 1
\end{aligned}$$

La fonction y est continue en $x = -1$ et en $x = 1$. On a donc

$$\lim_{x\to -1^-} y(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(1-x) K_1 + 1}{1+x} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x) K_2 + 1}{1+x} = \lim_{x\to -1^+} y(x)$$

Ceci impose $K_1 = -\dfrac{1}{2} = K_2$ *et ainsi*

$$y(x) = \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 1$$

(qui est bien dérivable en $x = -1$ *)*
La continuité en $x = 1$ *donne*

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = \frac{e}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)K_3+1}{1+x}e^x = \frac{e}{2}$$

La dérivabilité en $x = 1$ *donne*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{y(x)-\frac{e}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{y(x)-\frac{e}{2}}{x-1}$$

La limite de gauche est égale à la dérivée de $\dfrac{e^x}{2}$ *en* $x = 1$, *celle de droite vaut la dérivée de* $\dfrac{(1-x)K_3+1}{1+x}e^x$ *en* $x = 1$.
On obtient donc

$$\left(\frac{(1-x)K_3+1}{1+x}e^x\right)' = \frac{-K_3x^2+x-K_3}{(1+x)^2}e^x$$

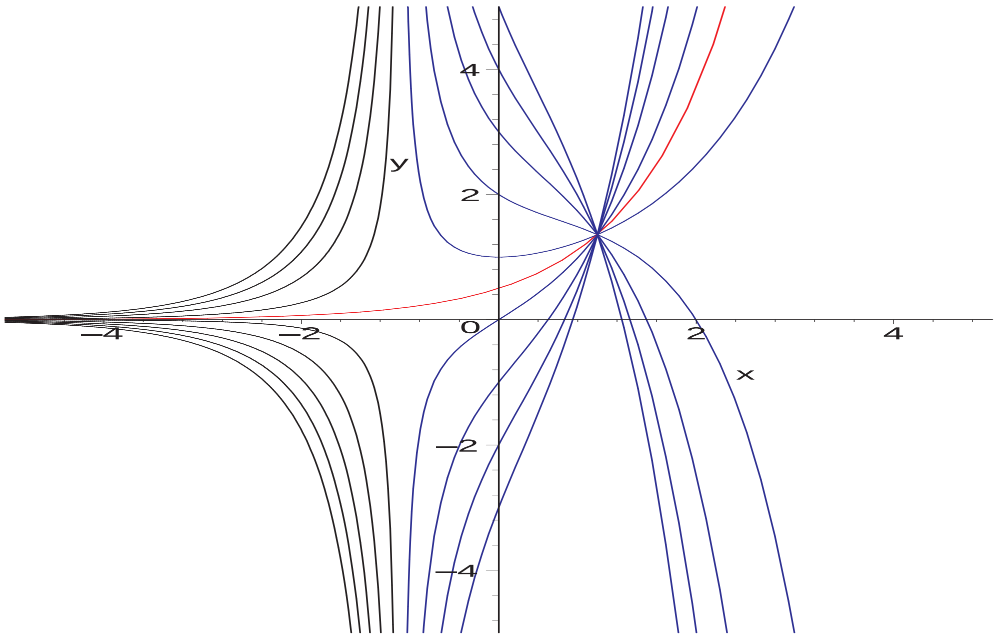
$$\frac{e}{2} = \frac{1-2K_3}{4}e$$

qui impose $K_3 = -\dfrac{1}{2}$ *et*

$$\frac{-\frac{1}{2}\times(1-x)+1}{1+x}e^x = \frac{1}{2}e^x$$

La seule solution sur $\mathbb{R}$ *est la fonction*

$$f(x) = \frac{e^x}{2}$$



Exercice 7.30 *Notons*

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(ax)e^{-x} \qquad (E)$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2$, *dont les solutions sont* $r = -1 + i$ *et* $r = -1 - i$. *La solution générale de l'équation homogène est donc*

$$(K_1\cos(x) + K_2\sin(x))e^{-x}$$

On cherche une solution particulière y_p à l'équation

$$y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+ia)x} \tag{E_c}$$

alors $\operatorname{Im} y_p$ *est solution de l'équation* (E)
Si $-1+ia$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique (i.e.* $a^2 \neq 1$*), on cherche* $y_c(x) = \alpha e^{(-1+ia)x}$*. Alors* y_p *est solution de* (E_c)

$$\begin{aligned} &\iff \alpha\left((-1+ia)^2 + 2(-1+ia) + 2\right) = 1 \\ &\iff \alpha\left(1 - a^2\right) = 1 \end{aligned}$$

d'où

$$y_c(x) = \frac{1}{1-a^2} e^{(-1+ia)x}$$

une solution particulière de (E) *est alors*

$$y_p(x) = \frac{1}{1-a^2} e^{-x} \sin ax$$

Si $a^2 = 1$*, on sait que l'on peut chercher une solution de* (E_c) *sous la forme* $y_c(x) = \alpha x e^{(-1+ia)x}$*.*
On pose $y_c(x) = z_c(x) e^{(-1+ia)x}$ *et on écrit la boite à* z*.*

$y_c(x)$	$z_c(x)$
$e^{(-1+ia)x}$	1
$e^{(-1-ia)x}$	e^{-2iax}

L'équation en z *est donc*

$$z_c'' + 2iaz_c' = 1$$

Une solution est

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{2ia} x = -\frac{ix}{2a} \\ y_c &= -\frac{ix}{2a} e^{(-1+ia)x} \end{aligned}$$

et une solution particulière de (E) *est alors*

$$y_p(x) = -\frac{1}{2a} x e^{-x} \cos ax$$

En résumé les solutions de (E) *sont*

$$\text{Si } a^2 \neq 1,\ y(x) = (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) e^{-x} + \frac{1}{1-a^2} e^{-x} \sin ax,\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Si } a^2 = 1,\ y(x) = (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x)) e^{-x} - \frac{1}{2a} x e^{-x} \cos ax,\ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.31 *Il s'agit d'une équation à variable séparables.*
Soit y *une telle solution pour* x *proche de* π*, on a* $y(x) \neq \frac{\pi}{2}$ *(par continuité en* π*). Ainsi* $y' + \cos(y) = 0 \iff \frac{y'}{\cos(y)} = -1 \implies \int \frac{dy}{\cos(y)} = -\int dx$*. Un calcul simple donne*

$$\int \frac{dy}{\cos(y)} = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -x + C$$

Avec $y(\pi) = 0$*, on obtient* $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 = -\pi + C$*. Ainsi*

$$\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi - x$$

soit

$$y = 2\arctan\left(e^{\pi-x}\right) - \frac{1}{2}\pi$$

On peut vérifier que

$$\frac{d}{dx}\left(2\arctan\left(e^{\pi-x}\right) - \frac{1}{2}\pi\right) = -2\frac{e^{\pi-x}}{e^{2\pi-2x}+1} = \frac{-1}{\operatorname{ch}(\pi-x)}$$

et avec

$$\begin{aligned}\cos(\arctan(u)) &= \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}\\ \sin(\arctan(u)) &= \frac{u}{\sqrt{(1+u^2)}}\end{aligned}$$

on a bien

$$\begin{aligned}\cos\left(2\arctan\left(e^{\pi-x}\right) - \frac{1}{2}\pi\right) &= 2\sin\left(\arctan\left(e^{\pi-x}\right)\right)\cos\left(\arctan\left(e^{\pi-x}\right)\right)\\ &= 2\frac{e^{\pi-x}}{1+\left(e^{\pi-x}\right)^2}\end{aligned}$$

Exercice 7.32 *L'équation homogène admet comme équation caractéristique $r^2-2r+1=(r-1)^2$. Les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x) = K_1e^x + K_2xe^x$$

On pose $y(x) = z(x)e^x$ afin de déterminer une solution particulière. La boite à z donne

$y(x)$	$z(x)$
e^x	1
xe^x	x

l'équation en z est donc

$$z'' = \ln x$$

d'où

$$\begin{aligned}z'(x) &= \int \ln x dx + C_1\\ z(x) &= \int (x\ln x - x + C_1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2\end{aligned}$$

Une solution particulière est

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^x$$

La solution de l'équation différentielle de départ est donc

$$y(x) = \frac{x^2e^x}{4}(2\ln x - 3) + K_1e^x + K_2xe^x$$

Remarquer que cette fonction peut être prolongée en 0 en une fonction $\mathcal{C}^1$ en $x=0$, mais sûrement pas dérivable deux fois en 0 !

Exercice 7.33 *L'équation homogène est*

$$y'' - 2ay' + \left(a^2+1\right)y = 0$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2ar + \left(a^2+1\right)$. *Le discriminant réduit est* $\Delta' = a^2 - \left(a^2+1\right) = -1$. *On en déduit les racines :* $a+i$ *et* $a-i$.
Les solutions ***réelles*** *de l'équation homogène sont donc*

$$y_0(x) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\, e^{at}$$

On applique le principe de superposition, on cherche une solution particulière de

$$y'' - 2ay' + \left(a^2+1\right) y = e^{at} \tag{7.1}$$

On pose $y(t) = e^{ax} z(t)$ *et on écrit la boite à* z

$y \xrightarrow[\times e^{-at}]{} z$	
$e^{(a+i)t}$	e^{it}
$e^{(a-i)t}$	e^{-it}

L'équation en z *est donc*

$$z'' + z = t$$

dont une solution est $z(t) = t$. *Une solution particulière de* (7.1) *est donc*

$$y(t) = te^{at}$$

On cherche une solution particulière de

$$y'' - 2ay' + \left(a^2+1\right) y = \sin t \tag{7.2}$$

Pour cela on considère

$$y'' - 2ay' + \left(a^2+1\right) y = e^{it}$$

on pose $y(t) = z(t)\, e^{it}$, *la boite à* z *donne*

$y \xrightarrow[\times e^{-it}]{} z$	
$e^{(a+i)t}$	e^{at}
$e^{(a-i)t}$	e^{a-2it}

L'équation en z *est donc*

$$z'' - (a + a - 2i)\, z' + a\,(a-2i)\, z = 1 \tag{7.3}$$

Si $a \neq 0$, *une solution est* $z = \dfrac{1}{a\,(a-2i)} = \dfrac{a+2i}{a\,(a^2+4)}$, *une solution de* (7.2) *est alors*

$$y(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{a+2i}{a\,(a^2+4)} e^{it}\right) = \frac{1}{a\,(a^2+4)} (a \sin t + 2\cos t)$$

Si $a = 0$, *l'équation* (7.3) *s'écrit*

$$z'' + 2iz' = 1$$

dont une solution est $z = -\dfrac{it}{2}$, *une solution de* (7.2) *est alors*

$$y(t) = \operatorname{Im}\left(-\frac{it}{2} e^{it}\right) = -\frac{1}{2} t \cos t$$

En résumé

$$\begin{array}{lll} \text{Si } a \neq 0, & \text{les solutions de } (E) \text{ sont} & y(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\, e^{at} + te^{at} + \dfrac{1}{a\,(a^2+4)} (a \sin t + 2\cos t) \\ \text{Si } a = 0 & \text{les solutions de } (E) \text{ sont} & y(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + t - \dfrac{1}{2} t \cos t \\ & & \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Exercice 7.34 *On a un problème car x est nul en 0. On se place donc sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ou sur $I_2 =]0, +\infty[$. On résout alors $y' - \frac{n}{x}y = 0$. La fonction $a(x) = \frac{n}{x}$ est continue sur I_k pour $k \in \{1, 2\}$ donc, sur I_k les solutions de l'équations sont*

$$\begin{aligned} y(x) &= C_k \exp\left(-\int \frac{n}{x}dx\right) = C_k \exp(n \ln|x|) \\ &= C_k \exp \ln|x|^n \\ &= C_k |x|^n \end{aligned}$$

Sur $]-\infty, 0[$, quitte à changer C_1 en $-C_1$, les solutions sont donc de la forme $C_1 x^n$, et sur $]0, +\infty[$ elles sont de la forme $C_2 x^n$.
On peut maintenant chercher les solutions sur $\mathbb{R}$.
Si y est une solution sur $\mathbb{R}$, y est une solution sur I_1 et sur I_2. Il existe donc deux constantes C_1 et C_2 tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x^n \text{ pour } x < 0 \\ &= C_2 x^n \text{ pour } x > 0 \end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = y(0)$$

Or puisque $n > 0$

$$y(x) \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

ceci quelques soient les valeurs de C_1 et C_2. Donc

$$y(0) = 0$$

Et ceci n'impose aucune condition ni sur C_1, ni sur C_2.
Mais y doit également être dérivable en 0, donc

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = y'(0)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= C_1 \frac{x^n}{x} = C_1 x^{n-1} \text{ si } x < 0 \xrightarrow[t \to 0^-]{} \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ C_1 \text{ si } n = 1 \end{cases} \\ \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= C_2 \frac{x^n}{x} = C_2 x^{n-1} \text{ si } x > 0 \xrightarrow[t \to 0^-]{} \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ C_2 \text{ si } n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi pour $n = 1$, il faut que $C_1 = C_2$, et alors $y(x) = C_1 x$ qui est clairement solution de $xy' - y = 0$.
Pour $n \geq 2$, les fonctions définies par $y(x) = C_1 x^n$ pour $x < 0$, $y(x) = C_2 x^n$ pour $x > 0$, $y(0) = 0$ sont alors continues, dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 0$ et solutions de $xy' - ny = 0$ (car elles le sont sur I_1 et I_2 et en 0).

Exercice 7.35 *On a un problème car t s'annule en 0. On se place donc sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ou sur $I_2 =]0, +\infty[$. On résout alors $y' + \frac{1 + t^2}{t^2}y = 0$. La fonction $\frac{1 + t^2}{t^2}$ est continue sur I_k, les solutions sur I_k sont donc*

$$\begin{aligned} y(t) &= C_k \exp\left(-\int \frac{1 + t^2}{t^2}dt\right) = C_k \exp\left(-\int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt\right) \\ &= C_k \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

On peut maintenant chercher les solutions sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors y est une solution sur I_1, il existe donc C_1 tel que $\forall t < 0$, $y(t) = C_1 \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right)$. Mais y est aussi une solution sur I_2, il existe donc C_2 tel que $\forall t > 0$,

$y(t) = C_2 \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right)$.
Puisque y est une solution sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable en 0 donc continue en 0. On a donc

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = y(0)$$

Or pour $t < 0$, $y(t) = C_1 \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right) = C_1 e^{-t} e^{\frac{1}{t}}$, puisque $e^t \xrightarrow[t\to 0^-]{} 1$, $\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} -\infty$ et que $e^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$, on en déduit que

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = 0 \text{ (et donc } y(0) = 0\text{)}$$

En revanche, pour $t > 0$, $y(t) = C_2 \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right) = C_2 e^{-t} e^{\frac{1}{t}}$, et $\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$, $e^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$ donc, si $C_2 \neq 0$, on a

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \pm\infty \text{ (}+\infty \text{ si } C_2 > 0 \text{ et } -\infty \text{ si } C_2 < 0\text{)}$$

On en déduit qu'une condition nécessaire est que $C_2 = 0$. On a donc $y(t) = 0$ pour $t > 0$ et $y(0) = 0$.
Une solution sur $\mathbb{R}$ est également une fonction dérivable, en particulier y doit être dérivable en 0. On a donc

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = y'(0)$$

Pour $t > 0$, on a vu que $y(t) = 0$, ainsi $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = 0$ admet pour limite 0. Ceci prouve que $y'(0) = 0$.
Pour $t < 0$, on a $y(t) = C_1 e^{-t} e^{\frac{1}{t}}$, ainsi $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \dfrac{C_1 e^{-t} e^{\frac{1}{t}}}{t} = -C_1 e^{-t} \times \dfrac{-1}{t} e^{\frac{1}{t}}$.
En posant $X = -\dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} \infty$, on a d'après les croissances comparées, $\dfrac{-1}{t} e^{\frac{1}{t}} = X e^{-X} \xrightarrow[X\to +\infty]{} 0$ donc $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0$ ceci quelque soit la valeur de C_1.
On peut maintenant faire la synthèse. On vient de montrer que la fonction y définie par $y(t) = C_1 \exp\left(-t + \frac{1}{t}\right)$ pout $t < 0$ et $y(t) = 0$ pout $t \geq 0$
- est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.(en particulier en 0).
- est solution de l'équation différentielle sur I_1 et I_2.
- est continue et dérivable en 0 avec $y(0) = y'(0) = 0$.
- puisque $0^2 y'(0) + (1 + 0^2) y(0) = 0$, est encore solution en $x = 0$,
elle est donc solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc ces fonctions où C_1 est un réel quelconque.

Exercice 7.36 *Les solutions de équation homogènes sont (l'équation caractéristique est $r^2 + 1$ qui a pour solutions i et $-i$) :*

$$y(x) = A\cos x + B\sin x$$

On résout $y'' + y = e^{i\omega x}$ et on prend la partie imaginaire d'une solution particulière. Pour cela, on pose $y(x) = z(x) e^{i\omega x}$. La boite à z donne

$y \xleftarrow[\times e^{i\omega x}]{} z$	
e^{ix}	$e^{(i-i\omega)x}$
e^{-ix}	$e^{(-i-i\omega)x}$

L'équation en z est donc

$$z'' - (i - i\omega - i - i\omega) z' + (i - i\omega)(-i - i\omega) z = 1$$

soit

$$z'' + 2i\omega z' + (1 - \omega^2) z = 1$$

Si $\omega^2 \neq 1$, on a $z = \dfrac{1}{1 - \omega^2}$ et $y(x) = \dfrac{e^{i\omega x}}{1 - \omega^2}$. Une solution particulière de $y'' + y = \sin \omega x$ est donc

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\omega x}}{1 - \omega^2}\right) = \frac{\sin \omega x}{1 - \omega^2}$$

Si $\omega^2 = 1$, *on obtient*

$$z'' + 2i\omega z' = 1$$

on prend donc $z' = \dfrac{1}{2i\omega}$ *(on peut diviser par* ω, *car* $\omega^2 = 1$ *donc* ω *n'est pas nul), on choisit* $z(x) = -\dfrac{ix}{2\omega} \Longrightarrow y(x) = -\dfrac{ixe^{i\omega x}}{2\omega}$. *Une solution particulière de* $y'' + y = \sin \omega x$ *est donc*

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{ixe^{i\omega x}}{2\omega}\right) = -\frac{x\cos \omega x}{2\omega}$$

En résumé, les solutions sont

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos x + B\sin x + \frac{\sin \omega x}{1-\omega^2} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 \neq 1 \\ y(x) &= A\cos x + B\sin x - \frac{x\cos \omega x}{2\omega} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 = 1 \end{aligned}$$

Exercice 7.37 *C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est* $r^2 - (1+a)r + a$ *dont les solutions (évidentes) sont* 1 *et* a. *On a donc deux cas.*
Premier cas $a \neq 1$. *Les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{ax} \text{ où } (C_1, C_1) \in \mathbb{R}^2$$

Second cas $a = 1$. *Les solutions de l'équation homogène sont*

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x \text{ où } (C_1, C_1) \in \mathbb{R}^2$$

Pour trouver une solution particulière, on pose $y(x) = e^x z(x)$. *On écrit alors la boite à* z
Premier cas $a \neq 1$

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
e^x	$1 = e^{0x}$
e^{ax}	$e^{(a-1)x}$

On obtient alors les racines de l'équation caractéristique en z *qui sont* 0 *et* $a-1$, *d'où l'équation en* z

$$z'' - (a-1)z' = 1$$

dont une solution est $z'(x) = \dfrac{1}{a-1}$ *qui donne* $z(x) = \dfrac{x}{a-1}$ *et les solutions pour* y

$$y(x) = \frac{xe^x}{a-1} + C_1e^x + C_2e^{ax} \text{ où } (C_1, C_1) \in \mathbb{R}^2$$

Second cas $a = 1$

$y \underset{\times e^x}{\longleftarrow} z$	
e^x	$1 = e^{0x}$
xe^x	$x = xe^{0x}$

Ce qui signifie que l'équation caractéristique a une racine double 0. *D'où l'équation en* z : $z'' = 1$ *qui donne* $z'(x) = x$ *et* $z(x) = \dfrac{x^2}{2}$ *et enfin les solutions en* y

$$y(x) = \frac{x^2e^x}{2} + C_1e^x + C_2xe^x \text{ où } (C_1, C_1) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 7.38 *On a $f(0)=0$ immédiatement, ensuite $f'(x)=1+f(x)^2\neq 0$. En dérivant l'égalité $f'(x)^2-f(x)^2$, il vient*

$$2f''f'-2ff'=0$$

ce qui après division par f' (qui n'est jamais nul) donne

$$f''=f$$

Ainsi f est de la forme $A\operatorname{ch}+B\operatorname{sh}$. Les conditions initiales $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ donnent alors

$$f=\operatorname{sh}$$

Si on enlève la condition $f'(0)=1$ (et donc $f(0)=0$), on a alors

$$\begin{aligned} f'^2-f^2 &= (A\operatorname{sh}+B\operatorname{ch})^2-(A\operatorname{ch}+B\operatorname{sh})^2\\ &= (A\operatorname{sh}+B\operatorname{ch}-A\operatorname{ch}-B\operatorname{sh})(A\operatorname{sh}+B\operatorname{ch}+A\operatorname{ch}+B\operatorname{sh})\\ &= (A(\operatorname{sh}-\operatorname{ch})+B(\operatorname{ch}-\operatorname{sh}))(A(\operatorname{sh}+\operatorname{ch})+B(\operatorname{ch}+\operatorname{sh}))\end{aligned}$$

Or

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^x \text{ et } \operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}x$$

donc

$$f'(x)^2-f(x)^2=(B-A)e^{-x}\times(B+A)e^x=B^2-A^2$$

Les solutions sont donc de la forme

$$f(x)=A\operatorname{ch}x+B\operatorname{sh}x \text{ où } B^2-A^2=1$$

Ceci incite à poser $B=\varepsilon\operatorname{ch}a$, $A=\operatorname{sh}a$ où ε est le signe de B. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}a\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}(x+a) \text{ si } B>0\\ f(x) &= \operatorname{sh}a\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}(x-a) \text{ si } B<0\end{aligned}$$

En conclusion les solutions sont toutes les fonctions de la forme

$$\operatorname{sh}(x+a) \text{ où } a\in\mathbb{R}$$

Enfin, on peut supposer f simplement $\mathcal{C}^1$, en effet $f'(x)=\pm\sqrt{1+f(x)^2}$, mais si f' est continue alors il ne peut avoir de changement de signe (car $\sqrt{1+u^2}\geq 1$, s'il y a changement de signe, il y discontinuité, on passe d'une quantité plus grande que 1 à une quantité plus petite que -1). On a donc un signe constant. Ceci signifie que $f'(x)=+\sqrt{1+f(x)^2}$ ou $f'(x)=-\sqrt{1+f(x)^2}$. Mais alors $f'(x)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables, et on est ramené au cas précédent.

Remarque 1 : *On peut en fait simplement supposer f dérivable sur $\mathbb{R}$, mais il faut connaître le théorème de Darboux qui dit qu'une fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Dans ce cas, on ne peut avoir de changement de signe dans l'expression $f'(x)=\pm\sqrt{1+f(x)^2}$ (sinon f' s'annule), et on poursuit la preuve de la même manière$\cdots$).*

Remarque 2 : *Si on écrit que f est de la forme $f(x)=\alpha e^x+\beta e^{-x}$ (en tant que solution de $f''-f=0$), l'égalité $f'^2-f^2=1$ conduit alors à*

$$\left(\alpha e^x-\beta e^{-x}\right)^2-\left(\alpha e^x+\beta e^{-x}\right)^2=-4\alpha\beta=1$$

ce qui est une condition trés simple sur α et β que l'on peut écrire sous la forme $2\alpha=-\dfrac{1}{2\beta}$ d'où $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(2\alpha e^x+2\beta e^{-x}\right)=\dfrac{1}{2}\left(2\alpha e^x-\dfrac{1}{2\alpha e^x}\right)$. Puisque α est quelconque, les solutions sont de la forme (en posant $2\alpha=\varepsilon e^a$ où ε est un signe)

$$f(x)=\varepsilon\operatorname{sh}(x+a)$$

on retrouve bien les mêmes solutions (ouf).

Exercice 7.39

1. *Il suffit de remplacer dans l'équation différentielle, on obtient alors*

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ \left(\alpha^2(1+2x)+\alpha(4x-2)-8\right)e^{\alpha x}\\ &= \left(2x\alpha(\alpha+2)+\left(\alpha^2-2\alpha-8\right)\right)\\ &= (\alpha+2)(2\alpha x+\alpha-4)e^{\alpha x}=0\end{aligned}$$

Si on choisit $\alpha=-2$, on a alors une solution.

La fonction $x\mapsto e^{-2x}$ est solution.

2. *On remplace, on a alors $y'(x)=-2e^{-2x}z(x)+e^{-2x}z'(x)$ et $y''(x)=4e^{-2x}z(x)-4e^{-2x}z'(x)+e^{-2x}z''(x)$, ainsi*

$$\begin{aligned}&(1+2x)y''+(4x-2)y'-8y\\ =\ &(1+2x)\times\left(4e^{-2x}z-4e^{-2x}z'+e^{-2x}z''\right)\\ &+(4x-2)\times\left(-2e^{-2x}z+e^{-2x}z'\right)\\ &-8e^{-2x}z\\ =\ &e^{-2x}\left((1+2x)z''-(4x+6)z'\right)\end{aligned}$$

Puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par z :

$$(1+2x)z''-(4x+6)z'=0$$

3. *Sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, l'équation différentielle vérifiée par z est équivalente à, en posant $Z=z'$*

$$Z'-2\frac{(3+2x)}{(1+2x)}Z=0 \qquad (E_Z)$$

qui est une équation différentielle du premier ordre. Les solutions de E_Z sont ($x\mapsto-2\dfrac{(3+2x)}{(1+2x)}$ est continue sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$).

$$Z(x)=C\exp\left(-\int-2\frac{(3+2x)}{(1+2x)}dx\right)\ \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

Or

$$\begin{aligned}\int\frac{(3+2x)}{(1+2x)}dx &= \int\frac{(2+1+2x)}{(1+2x)}dx=\int\frac{2dx}{1+2x}+\int dx\\ &= \ln|1+2x|+x+K\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}z'(x) &= Z(x)=C_1\exp(2\ln(1+2x)+2x)\ \text{ sur}\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[,\ \text{où } C\in\mathbb{R}\\ &= C(1+2x)^2e^{2x}\end{aligned}$$

Pour avoir $z(x)$, il suffit d'intégrer !

$$z(x)=C\int(1+2x)^2e^{2x}dx$$

On intègre par parties en dérivant le polynôme (les fonctions sont bien $\mathcal{C}^1$).

$$\begin{aligned}\int(1+2x)^2e^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}(1+2x)^2e^{2x}\right]-\frac{1}{2}\int4(1+2x)e^{2x}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(2x+1)^2-2\int(1+2x)e^{2x}dx\end{aligned}$$

Une autre intégration par parties (on dérive encore le polynôme)

$$\begin{aligned}\int (1+2x)\,e^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}(1+2x)\,e^{2x}\right] - \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}(1+2x)\,e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C_2 \text{ où } C_2 \in \mathbb{R} \\ &= xe^{2x} + C_2 \text{ où } C_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

d'où

$$z(x) = C\int (1+2x)^2 e^{2x}dx = C\left(\frac{1}{2}e^{2x}(2x+1)^2 - 2xe^{2x}\right) + C_2 = \frac{C}{2}\left(4x^2+1\right)e^{2x} + C_2$$

Et les solutions de l'équation différentielle initilale sont (en posant $C_1 = \dfrac{C}{2}$*).*

$$y(x) = C_1\left(1+4x^2\right) + C_2e^{-2x} \text{ où}\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

4. *La première condition donne*

$$C_1 + C_2 = 1$$

L'équation de la tangente est $Y - y(0) = y'(0)(X-0)$ *soit*

$$Y - 1 = y'(0)\,X$$

elle doit couper l'axe Ox *en* $X = 1$*, donc pour* $Y = 0$*, on doit avoir* $X = 1$*, ce qui donne*

$$y'(0) = -1$$

ainsi

$$C_1(8x) - 2C_2e^{-2x}\big|_{x=0} = -2C_2 = -1$$

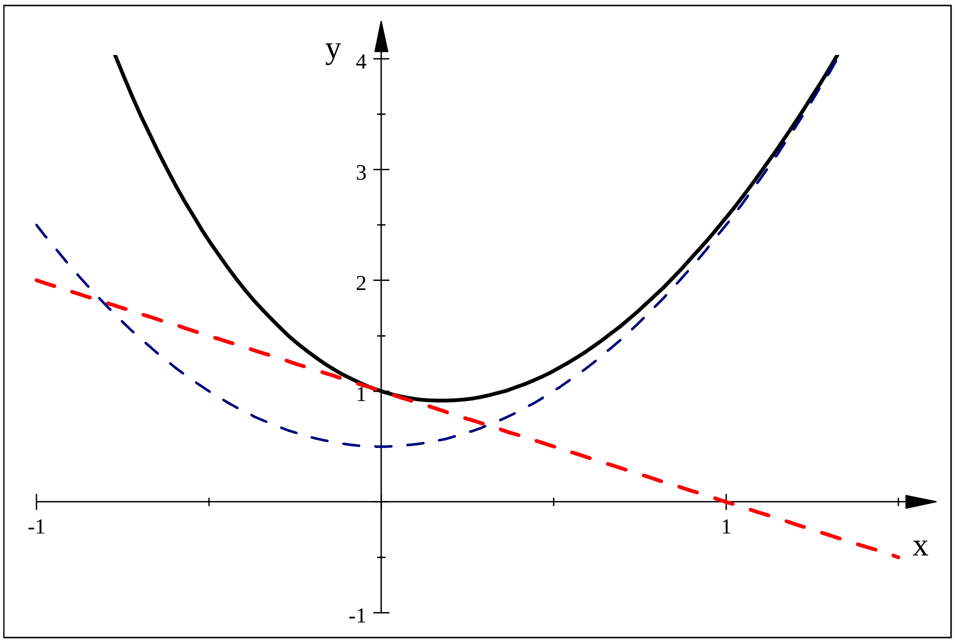
d'où

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

La solution est

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1+4x^2\right) + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Voici son graphe ainsi que celui de sa tangente à l'origine et le graphe (en pointillées) de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(1+4x^2\right)$ *qui est une parabole asymptote en* $+\infty$*.*



Exercice 7.40 *Si f et g sont solutions alors pour $x=0$, on a $g(0)=0$ et $f(0)=1$. On dérive les équations pour obtenir*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+g'(x) \\ g(x) &= 1+f'(x) \end{aligned}$$

On pose alors $u(x)=f(x)+g(x)$ et $v(x)=f(x)-g(x)$ Ainsi u et v sont solutions de

$$\begin{aligned} u'-u &= -2 \\ v'+v &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \\ v(0) &= 1 \end{aligned}$$

On a donc $u(x)=C_1e^x+2$ et $v(x)=C_2e^{-x}$. On détermine C_1 et C_2 avec les conditions initiales, ce qui donne $C_2=1$ et $C_1=-1$. Puis

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)+v(x)}{2}=\frac{2-e^x+e^{-x}}{2} \\ &= 1-\operatorname{sh}(x) \\ g(x) &= \frac{u(x)-v(x)}{2}=\frac{2-e^x-e^{-x}}{2} \\ &= 1-\operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

3 Les exotiques

Exercice 7.41 *C'est une équation différentielle du premier ordre. Les fonctions a,b et c sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On résout donc sur $\mathbb{R}$.*
La solution de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} y(x) &= K\exp\left(-\int\frac{(x-1)^2}{1+x^2}dx\right) \\ &= K\exp\left(-\int\frac{x+1-2x}{1+x^2}dx\right) \\ &= K\exp\left(\int\left(-1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx\right) \\ &= K\exp\left(-x+\ln\left|1+x^2\right|\right) \\ &= Ke^{-x}\left(1+x^2\right)\ \text{car } 1+x^2>0 \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière polynomiale $P(x)$. L'examen des degrés indique que P est de degré 1. Si $P(x)=ax+b$, on remplace

$$\left(1+x^2\right)a+(x-1)^2(ax+b)=x^3-x^2+x+1\iff a=1\text{ et }b=0$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y_K(x)=x+Ke^{-x}\left(1+x^2\right)\ \text{ où } K\in\mathbb{R}$$

(on a bien $y_K(0)=K$).

1. *Puisque*
$$\left(1+x^2\right)y_K'(x)+(x-1)^2y_K(x)=x^3-x^2+x+1$$
si $x=0$, on a
$$y_K'(1)=1$$
Les courbes intégrales ont même tangente parallèle à $y=x$ (qui n'est rien d'autre que $y_0(x)$).

2. *On a* $K\dfrac{e^{-x}}{1+x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, *donc* $y_K(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$ *et* $y_K(x)-x=K\dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$ *est du signe de* K. *Les courbes intégrales ont toutes la même asymptotes, elles sont au dessus de* $y_0(x)=x$ *si* $K>0$, *en dessous sinon (elles ne peuvent pas se couper).*
3. *On a*

$$\begin{aligned} y_K'(x) &= K\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\left(1+x^2\right)+x\right)\\ &= -K(x-1)^2e^{-x}+1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} y_K''(x) &= K\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}\left(1+x^2\right)+x\right)\\ &= Ke^{-x}(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Il y a deux points où la dérivée seconde s'annule et change de signe (pour $K\neq 0$*) :* $x=1$ *et* $x=3$.
Les tangentes en $x=1$ *sont parallèles (elles se coupent à l'infini) à* $y_0(x)$.
La tangente à y_K *en* $x=3$ *a pour équation*

$$\begin{aligned} Y &= y_K(3)+y_K'(3)(X-3)\\ &= y_K(3)+\frac{3^3-3^2+3+1-(3-1)^2y_K(3)}{1+3^2}(X-3)\\ &= \left(-\frac{2}{5}X+\frac{11}{5}\right)y_K(3)+\frac{11}{5}x-\frac{33}{5} \end{aligned}$$

Pour $X=\dfrac{11}{2}$, *on constate que* $Y=\dfrac{11}{2}$ *(on ne calcule pas* Y *car* $y_0(x)=x$ *est une solution). Les tangentes en* $x=3$ *se coupent toutes en* $A=\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{11}{2}\right)$.
4. *Déterminons les points d'abscisse* x *où* $y_K'(x)=0$.

$$\begin{aligned} y_K'(x) &= 0\Longrightarrow\left(1+x^2\right)\times 0+(x-1)^2y_K(x)=x^3-x^2+x+1\\ &\Longrightarrow y_K(x)=\frac{x^3-x^2+x+1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Les point à tangentes horizontale des courbes intégrales sont tous situés sur la courbe

$$\varphi(x)=\frac{x^3-x^2+x+1}{(x-1)^2}$$

Remarquez que φ *a une asymptote en* $x=1$ *(pour* $x=1$ *la tangente est parallèle à* $y=x$, *donc jamais horizontale).*
La question qui se pose est de savoir si tous les points de cette courbe sont des points à tangentes horizontale. Pour cela il suffit de prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$, *il existe* $K\in\mathbb{R}$ *tel que* $y_K'(x)=0$. *Or*

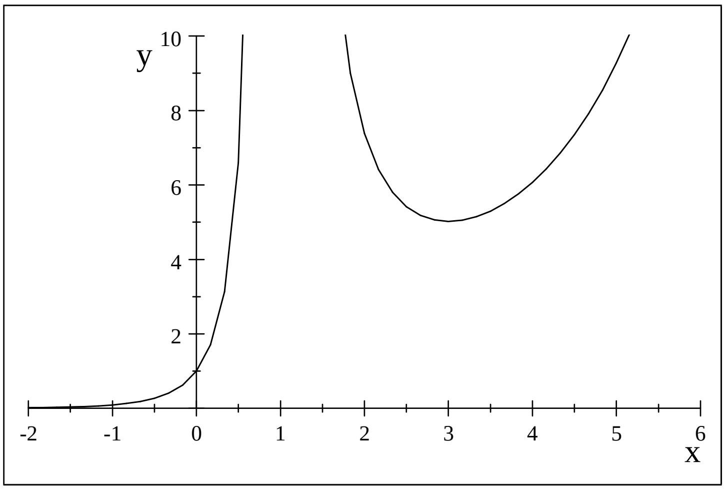
$$\begin{aligned} y_K'(x) &= -K(x-1)^2e^{-x}+1=0\\ &\Longleftrightarrow K=\frac{e^x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi le point $M=(x,\varphi(x))$ *est un point à tangente horizontale de* y_K *pour* $K=\dfrac{e^x}{(x-1)^2}$. *Au passage cela prouve que* y_K *a un point à tangente horizontale si et seulement si* $K>0$.
5. *Le point à tangente horizontale est aussi un point d'inflexion si et seulement si* $x=3\Longrightarrow K=\dfrac{e^3}{4}$.

6. *Déterminons le nombre de points à tangente horizontale de* $y_K(x)$*. Il suffit de déterminer les valeurs de* x *telles que* $K = \frac{e^x}{(x-1)^2}$*. Pour cela on étudie rapidement*

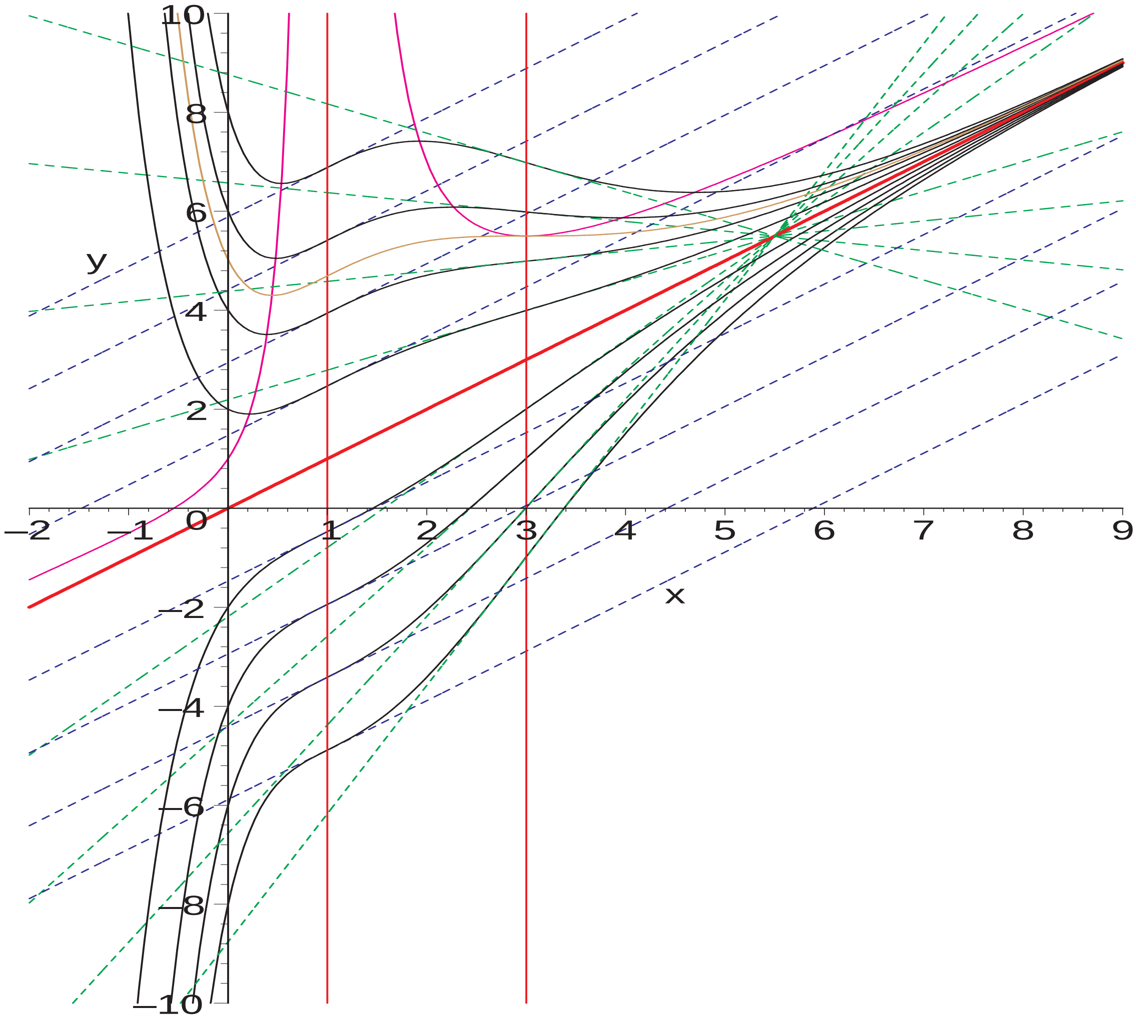
$$g(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$$

La fonction g *est continue, dérivable de dérivée égale à* $g'(x) = e^x \frac{x-3}{(x-1)^3}$ *(oh ! oh ! $x = 3$ qui resurgit). Le graphe de* g *est donc*



Graphe de g

On en déduit que :



Pour $K < g(3) = \dfrac{e^3}{4}$*,il y a un point à tangente horizontale.*

Pour $K = \dfrac{e^3}{4}$*, il y a deux points à tangentes horizontales.*

Pour $K > \dfrac{e^3}{4}$*, il y a trois points à tangentes horizontales.*

Exercice 7.42 *On remplace* x *et* y *par* 0 *pour obtenir* $f(0) = 2f(0)$ *d'où* $f(0) = 0$*. L'équation fonctionnelle s'écrit aussi*

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} \\ &= f(x)\frac{\mathrm{e}^{h}-1}{h} + \frac{f(h)}{h}\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} &= \frac{\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^0}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \\ & \frac{f(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(0)\end{aligned}$$

on en déduit , en passant à la limite

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)+f'(0)\,e^{x}$$

On résout alors l'équation différentielle $y'-y=\lambda\,\mathrm{e}^{x}$*, la solution générale de l'équation homogène est* $y(x)\,\mathrm{e}^{x}$*. On cherche une solution par la méthode de la variation de la constante en posant* $y(x)=K(x)\,\mathrm{e}^{x}$*. On obtient alors* $K'(x)\,\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}$ *d'où* $K'(x)=\lambda$*. On choisit* $K(x)=\lambda x$*, en ainsi* $y(x)=\lambda x\,\mathrm{e}^{x}$ *est solution de* $y'-y=\lambda\,\mathrm{e}^{x}$*.*
Les solutions de $y'-y=\lambda\,\mathrm{e}^{x}$ *sont donc*

$$y(x)=(\lambda x+K)\,\mathrm{e}^{x} \text{ où } K\in\mathbb{R}$$

Cela ne veut pas dire que ces fonctions sont solutions de (E)*. Pour déterminer les solutions, on calcule*

$$(\lambda(x+y)+K)\,\mathrm{e}^{x+y}-(\lambda x+K)\,\mathrm{e}^{x}\,e^{y}-(\lambda y+K)\,\mathrm{e}^{x}\,e^{y}=Ke^{x+y}$$

qui doit être nul (n'oublions pas aussi que $f(0)=0$*). Cela impose* $K=0$*. Les solutions sont donc*

$$y(x)=\lambda xe^{x} \text{ où } \lambda\in\mathbb{R}$$

Exercice 7.43 *Analyse : On a* $(fg)'=f'g+fg'$*, si* $(fg)'=f'g'$ *alors*

$$f'g+fg'=f'g' \Longleftrightarrow (f-f')\,g'+f'g=0 \Longleftrightarrow \left(e^{x^2}-2xe^{x^2}\right)g'+2xe^{x^2}g=0$$

Ainsi g *est solution de l'équation différentielle (car* $\mathrm{e}^{x^2}\neq 0$*)*

$$(1-2x)\,y'+2xy=0$$

On se place sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ *afin de diviser par* $1-2x$*, l'équation s'écrit alors*

$$y'+\frac{2x}{1-2x}y=0$$

La solution générale est alors

$$y(x)=K\exp\left(-\int\frac{2x}{1-2x}dx\right)$$

Or

$$\begin{aligned}\int-\frac{2x}{1-2x}dx &= \int\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx\\ &= x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|\end{aligned}$$

On choisit donc

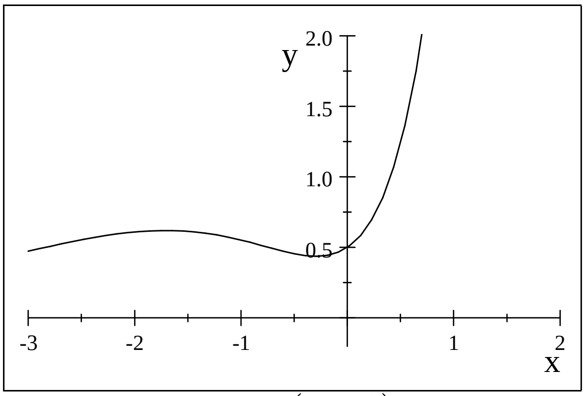
$$g(x)=\sqrt{2x-1}e^{x}$$

Exercice 7.44 *On résout l'équation différentielle* $y''-2y'+y=2e^{x}$*. L'équation caractéristique est* $r^2-2r+1=(r-1)^2=0$*, les solutions de l'équation homogène sont donc* $(c+bx)\,e^{x}$ *où* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*. On pose* $y(x)=z(x)\,e^{x}$*. La "boite à z" donne*

$y(x)$	$z(x)$
e^{x}	1
xe^{x}	x

l'équation en z *est donc* $z''=2$*, une solution est* $z(x)=x^2$*. La fonction* f *est donc de la forme* $f(x)=\left(x^2+bx+c\right)e^{x}$ *et* $f'(x)=\left(x^2+(2+b)\,x+b+c\right)e^{x}$

1. *Si* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ *alors* $\Delta_f = b^2 - 4c < 0$, *mais* $\Delta_{f'} = (2+b)^2 - 4(b+c) = b^2 - 4c + 4$ *n'a alors aucune raison d'être négatif. Par exemple, il suffit de prendre* $b = 0$, $c = \dfrac{1}{2}$ *alors* $\Delta_f = -\dfrac{1}{2}$ *et* $\Delta_{f'} > 0$. *Dans ce cas* f' *prend des valeurs négatives alors que* f *non. On a représenté en dessous le graphe de* f *pour* $b = 0$ *et* $c = \dfrac{1}{2}$, *on constate que* f *est positive mais non strictement croissante (ce qui prouve que* f' *n'est pas strictement positive).*



Graphe de $\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right) e^x$

2. *Si* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ *alors* $\Delta_{f'} = b^2 - 4c + 4 < 0$ *et donc* $\Delta_f = \Delta_{f'} - 4 < 0$ *ce qui implique que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

4 Les olympiques

Exercice 7.45 *Si* f *est solution alors* $x \mapsto f(\lambda - x)$ *est dérivable (composée de fonctions dérivables), ce qui prouve que* f *est deux fois dérivables.*
Analyse : En dérivant, on obtient alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -k^2 f(x)$. *Ainsi* $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$.
Synthèse : Une telle fonction est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Ak\cos(kx) - Bk\sin(kx) = k\left(A\sin(\lambda - kx) + B\cos(\lambda - kx)\right)$$

Devant cette expression, il semble judicieux d'écrire f *sous la forme*

$$f(x) = G\cos(kx + \varphi)$$

f *est ainsi solution si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-Gk\sin(kx + \varphi) = Gk\cos(k(\lambda - x) + \varphi)$$

Si $G \neq 0$, *on obtient*

$$\begin{aligned} & \sin(kx + \varphi) + \cos(k\lambda - kx + \varphi) \\ = \; & \cos\left(\frac{\pi}{2} - kx - \varphi\right) + \cos(k\lambda - kx + \varphi) \end{aligned}$$

soit en utilisant $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\lambda}{2} - \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - kx\right) = 0$$

ce qui impose $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{k\lambda}{2} - \varphi = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \Longleftrightarrow \varphi = -\dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}k\lambda - n\pi$ *L'ensemble des solutions est donc*

$$\left\{ f(x) = G\cos\left(k\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right),\ G \in \mathbb{R} \right\}$$

car $G\cos\left(k\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\dfrac{\pi}{4}-n\pi\right)=(-1)^n G\cos\left(k\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$ *et si* G *décrit* $\mathbb{R}$, $(-1)^n G$ *aussi.*

Exercice 7.46 *On a* $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$. *L'équation de la tangente en un point d'une courbe intégrale est*

$$Y-y(x)=y'(x)(X-x)$$

Soit x *tel que* $b(x)\neq 0$, *l'équation différentielle peut s'écrire*

$$\begin{aligned}\frac{c(x)}{b(x)}-y(x) &= y'(x)\times\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)\\ &= y'(x)\times\left(x+\frac{a(x)}{b(x)}-x\right)\end{aligned}$$

Toutes les tangentes se coupent donc au point

$$M=\left(\frac{a(x)}{b(x)}+x,\frac{c(x)}{b(x)}\right)\ \text{si } b(x)\neq 0$$

Si $b(x)=0$, *les tangentes sont toutes parallèles.*
Si l'équation différentielle admet une solution affine, le point M *décrit cette solution particulière et si* $b(x)=0$, *les tangentes sont parallèles à cette solution.*

Exercice 7.47 *On se place sur* $I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. *L'équation sans second membre admet pour solutions*

$$y(x)=K_1\sin 2x+K_2\cos 2x$$

On cherche une solution particulière en posant $y(x)=z(x)\sin 2x$ *(essayez donc l'autre ...). On écrit la "boite à z"*

$y(x)$	$z(x)$
$\sin 2x$	1
$\cos 2x$	$\operatorname{cotan}(2x)$

La première colonne donne les solutions de l'équation homogène en y, *la seconde les solutions de l'équation homogène en* z.
L'équation en z *admet* $z(x)=1$ *comme solution donc ne comporte pas de terme en* z. *Elle est donc de la forme*

$$\sin(2x)z''+a(x)z'=2\tan x$$

On sait que $z(x)=\operatorname{cotan}2x$ *est solution de l'équation homogène. Si on pose* $u(x)=z'(x)$, *alors* $\dfrac{-2}{\sin^2 2x}=(\operatorname{cotan}2x)'$ *est solution de*

$$\sin(2x)u'+a(x)u=0$$

On cherche donc $u(x)=\dfrac{2K(x)}{\sin^2 2x}$ *par variation de la constante. On obtient alors*

$$\sin(2x)\times\frac{2K'(x)}{\sin^2 2x}=2\tan x\Longrightarrow K'(x)=\tan x\times\sin 2x=2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

On choisit $K(x)=x-\dfrac{\sin 2x}{2}$, *puis*

$$\begin{aligned}u(x) &= z'(x)=\frac{2K(x)}{\sin^2 2x}\\ &= \frac{2x-\sin 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2x}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin 2x}\end{aligned}$$

Or avec une intégration par parties

$$\begin{array}{ccc} f(x)=2x & f'(x)=2 & \\ g'(x)=\dfrac{1}{\sin^2 2x} & g(x)=-\dfrac{1}{2}\operatorname{cotan}2x & f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sin^2 2x}dx &= -x\operatorname{cotan}2x+\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx \\ &= -x\operatorname{cotan}2x+\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C \end{aligned}$$

et le changement de classe $\mathcal{C}^1$ $t=\tan x$ *donne*

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ dx &= \frac{1}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

$$\int\frac{1}{\sin 2x}dx=\int\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C$$

d'où

$$\begin{aligned} z(x) &= -x\operatorname{cotan}2x+\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|-\frac{1}{2}\ln|\tan x|+C \\ &= -x\operatorname{cotan}2x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin x\cos x}{\tan x}\right|+C \\ &= -x\operatorname{cotan}2x+\ln|\cos x|+C' \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P(x) &= \left(-\frac{x}{2}\operatorname{cotan}2x+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\times\sin 2x \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{\sin 2x}{2}\ln|\cos x| \end{aligned}$$

La solution générale est

$$y(x)=K_1\sin 2x+K_2\cos 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{\sin 2x}{2}\ln|\cos x|$$

Remarque : *On s'est bien gardé de préciser sur quel intervalle les calculs sont valides. En fait, peut importe, on a trouvé une fonction (analyse) dont on peut vérifier qu'elle est bien solution particulière sur* I_k.

Exercice 7.48

1. *On a*

$$e^x\alpha'(x)\alpha(x)+e^x\beta'(x)\beta(x)=-x\beta(x)\alpha(x)+x\alpha(x)\beta(x)=0$$

Or $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x)\neq 0$ *donc*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha'(x)\alpha(x)+\beta'(x)\beta(x)=\frac{1}{2}\left(\alpha^2(x)+\beta^2(x)\right)'=0$$

On en déduit que la fonction $x\mapsto\alpha^2(x)+\beta^2(x)$ *est constante sur* $\mathbb{R}$. *Or elle vaut* 1 *en* $x=0$, *donc* $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha^2(x)+\beta^2(x)=0$.

2. *En dérivant la première égalité, on a*

$$e^x\alpha''(x) + e^x\alpha'(x) = -\beta(x) - x\beta'(x)$$

En multipiant par x, on obtient

$$xe^x\alpha''(x) + xe^x\alpha'(x) = -x\beta(x) - x^2\beta'(x)$$

Or on a

$$\left\{\begin{array}{c} e^x\alpha'(x) = -x\beta(x) \\ \\ e^x\beta'(x) = x\alpha(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} -x\beta(x) = e^x\alpha'(x) \\ \\ -x^2\beta'(x) = -x^3e^{-x}\alpha(x) \end{array}\right.$$

d'où

$$xe^x\alpha''(x) + xe^x\alpha'(x) = e^x\alpha'(x) - x^3e^{-x}\alpha(x)$$

soit

$$xe^x\alpha''(x) + (x-1)e^x\alpha'(x) + x^3e^{-x}\alpha(x) = 0$$

En divisant par $e^x \neq 0$, on a

$$x\alpha''(x) + (x-1)\alpha'(x) + x^3e^{-2x}\alpha(x) = 0$$

3. *Le changement de fonction indiqué par la première question est le suivant. On pose $\alpha(x) = \cos\omega(x)$ et $\beta(x) = \sin\omega(x)$ avec $\omega(0) = 0$. Alors*

$$\left\{\begin{array}{c} e^x\alpha'(x) = -x\beta(x) \\ \\ e^x\beta'(x) = x\alpha(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} -e^x\omega'(x)\sin\omega(x) = -x\sin\omega(x) \\ \\ e^x\omega'(x)\cos\omega x = x\cos\omega(x) \end{array}\right.$$

puisque $\sin u$ et $\cos u$ ne sont jamais nul en même temps, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \omega'(x) = xe^{-x}$$

d'où (avec $\omega(0) = 0$)

$$\omega(x) = \int_0^x xe^{-x}dx = 1 - e^{-x}(x+1)$$

Conclusion

$$\begin{array}{rcl} \alpha(x) & = & \cos\left(1 - e^{-x}(x+1)\right) \\ \beta(x) & = & \sin\left(1 - e^{-x}(x+1)\right) \end{array}$$