Équations différentielles

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre n est un entier naturel non nul et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

I — Généralités

Définition 1.1 — Équation différentielle
On appelle ***équation différentielle d'ordre n*** *(en abrégé é.d.) une équation de la forme*

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y'(t), y(t), t) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

où F est une fonction définie de $\mathbb{R}^{n+1} \times I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et y une fonction inconnue définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n fois dérivable.
On appelle ***solution*** *de l'équation différentielle toute fonction y de classe n fois dérivable sur I vérifiant l'équation différentielle.*

Définition 1.2 — Conditions initiales
Soit $(\mathscr{E})$ une é.d. d'ordre n.
On appelle ***conditions initiales*** *la donnée en un point t_0 de I des valeurs de $y(t_0)$, $y'(t_0)$, … $y^{(n-1)}(t_0)$.*
On parle aussi dans ce cas de ***conditions de Cauchy****.*
Résoudre le ***problème de Cauchy*** *c'est trouver une solution de l'é.d. $(\mathscr{E})$ qui vérifie les conditions.*
On appelle ***conditions au bord*** *la donnée, en n points t_0, t_1, …, t_{n-1} de I, de la valeur de la fonction $y(t_0)$, $y(t_1)$, … $y(t_{n-1})$. On parle alors de* ***conditions de Dirichlet****.*

Définition 1.3 — Équation différentielle linéaire
On appelle ***équation différentielle linéaire d'ordre n*** *un équation de la forme*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où a_0, a_1, …, a_{n-1} et b sont $n+1$ fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'équation $(\mathscr{E})$ est ***homogène*** *si le second membre est nul.*
On appelle ***équation homogène associée à $(\mathscr{E})$*** *l'équation*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\mathscr{E}_0)$$

Théorème 1.4 — Structure de l'ensemble des solutions d'une é.d. homogène
Soit $(\mathscr{E}_0)$ une é.d. linéaire homogène d'ordre n.
Son ensemble de solution S_0 est un sous-espace vectoriel de $D^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème 1.5 — Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle
Soit $(\mathscr{E})$ une é.d. linéaire d'ordre n.
Son ensemble de solution S est de la forme

$$S = \{z + y_0 \text{ avec } y \in S_0\}$$

où z est une solution de $(\mathscr{E})$ et S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

II — É.d. linéaires du premier ordre

Définition 2.1 — Équation différentielle du premier ordre
On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** *toute é.d. du type*

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2 — Solutions d'une é.d. linéaire homogène du premier ordre
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + a(x)y = 0$ est

$$S_0 = \left\{ f \quad : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C \exp\left(-A(x)\right) \end{array} \right. \right\}$$

où C est une constante réelle et A une primitive de a sur l'intervalle I.

Recherche d'une solution particulière On applique la **méthode de variation de la constante**. Elle consiste à chercher une solution de la forme

$$y = C(x) \times \exp\left(-A(x)\right)$$

On prouve que $C'(x) = b(x) \exp\left(A(x)\right)$ et n intégrant cette dernière ligne on exprime la fonction C et on en déduit ensuite y.

Théorème 2.3 — Problème de Cauchy – I
Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du premier ordre admet une unique solution.

III — É.d. linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 — Équation différentielle du second ordre
On appelle ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** *toute é.d. de la forme*

$$(\mathscr{E}) : ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a, b et c sont trois réels fixés, avec $a \neq 0$, et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 — Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

L'équation différentielle linéaire

$$(\mathscr{E}_0): \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

admet sur $\mathbb{R}$ *un ensemble de solutions* S_0 *qui dépend de deux paramètres réels.*
Soit $aX^2 + bX + c = 0$ *l'équation caractéristique de* $\mathscr{E}_0$*, et* $\Delta = b^2 - 4ac$ *son discriminant.*
Si $\Delta > 0$ *alors l'ensemble de solution de* $\mathscr{E}_0$ *s'écrit*

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \;\; avec \;\; C_1 \in \mathbb{R} \;\; et \;\; C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont les racines de l'équation caractéristique.*
Si $\Delta = 0$ *alors*

$$S_0 = \left\{x \mapsto C_1 x \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda x} \;\; avec \;\; C_1 \in \mathbb{R} \;\; et \;\; C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

où λ *est l'unique racine de l'équation caractéristique.*
Si $\Delta < 0$ *et si* $\lambda_1 = \lambda + \mathrm{i}\omega$ *et* $\lambda_2 = \lambda - \mathrm{i}\omega$ *sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors*

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{x \mapsto (C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x)\mathrm{e}^{\lambda x} \;\; avec \;\; C_1 \in \mathbb{R} \;\; et \;\; C_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi)\mathrm{e}^{\lambda x} \;\; avec \;\; A \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \varphi \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Théorème 3.3 — Problème de Cauchy – II

Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du second ordre à coefficients constants admet une unique solution.