FICHE RECAPITULATIVE EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1) La solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $ay' + by = 0$ est

$$\boxed{y = Ce^{rt}}$$

où $r = -\frac{b}{a}$ est la solution de l'*équation caractéristique* $ar + b = 0$ et C est une constante.

2) La solution générale de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est

$$\boxed{y = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)}$$

où A et B sont deux constantes (équation de l'oscillateur harmonique).

3) Pour résoudre l'équation du second ordre homogène à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$,avec $a \neq 0$, on forme d'abord l'*équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$ en remplaçant y par 1, y' par r et y'' par r^2, où $r \in \mathbb{R}$.

On distingue trois cas, suivant la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique.

a) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines *réelles* distinctes $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, et la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrit

$$\boxed{y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

où A et B sont des constantes.

b) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a une *racine double* $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. Alors la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est

$$\boxed{y = e^{rt}\left(At + B\right)}$$

où A et B sont des constantes.

c) Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux *racines complexes conjuguées,* notées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$, et la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrit

$$\boxed{y = e^{\alpha t}\left[A\sin\left(\beta t\right) + B\cos\left(\beta t\right)\right]}$$

où A et B sont des constantes.

4) La *méthode de résolution* d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants *avec second membre* est la suivante :

a) Recherche de la solution générale y_g de l'équation sans second membre $(ESSM)$ associée par utilisation de l'équation caractéristique (EC).

b) Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation avec second membre.

c) Utilisation de la formule $y = y_g + y_p$.

5) Dans le cas où le second membre est une constante, on cherche y_p sous la forme d'une *constante.*

6) Dans le cas où le second membre est une fonction sinusoïdale $A\sin\omega t$ ou $A\cos\omega t$, on utilise les formules $\cos\omega t = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$ et $\sin\omega t = \mathrm{Im}\left(e^{i\omega t}\right)$, et on cherche la solution complexe $\underline{y_p}$ de l'équation complexe associée sous la forme $\underline{y_p} = Ce^{i\omega t}$.

7) *Principe de superposition* : une solution particulière d'une équation différentielle linéaire dont le second membre se présente sous la forme d'une *somme* est la somme des solutions particulières.