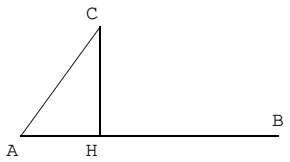
1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs :

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconque du plan ; on considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

On définit alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens ;

$\vec{u} \cdot \vec{v} = - AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Si l'angle de vecteurs ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est égale à θ , on a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \cos\theta$.

2. Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un est nul ou si l'angle de vecteurs ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est égale à $\pi/2$; dans ce cas, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

réciproquement, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors l'un des vecteurs est nul ou bien ils sont orthogonaux.

3. Autres écritures du produit scalaire :

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} ; \vec{v})$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Dans un repère orthonormé : $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$; alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

4. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :

Pour tout réel k, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

b) Egalités remarquables :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;

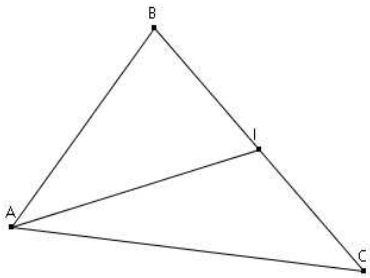
$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

c) Théorème de la médiane : On considère le triangle ABC et la médiane (AI) ; on a alors :

$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + 2\,BI^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$;

$AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - BI^2$.



d) Formule d'Al Kashi : Pour tout triangle ABC, on a

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times BC \cos(\widehat{ACB})$;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \cos(\widehat{ABC})$;

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$.

e) Formules des sinus : Pour tout triangle ABC non aplati, on a :

aire (ABC) = $\frac{1}{2}AC \times AB \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}AB \times BC \sin(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}AC \times BC \sin(\widehat{ACB})$ et

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{2\,aire(ABC)}.$$

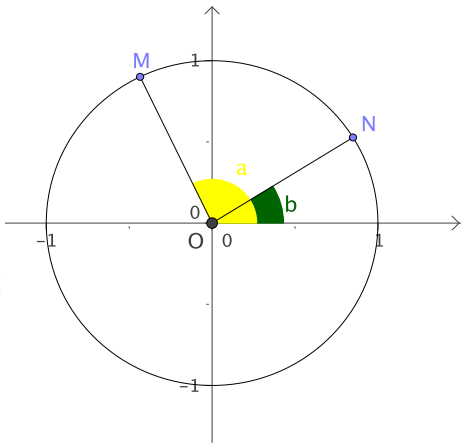
f) Exercices **:** Déterminer une mesure des angles du triangle ABC tel que AB = 5, AC = 7 et BC = 8. En déduire l'aire de ce triangle. Déterminer la longueur de la médiane [AI] et de la hauteur [AH].

Déterminer une mesure des angles du triangle DEF et la longueur EF sachant que DE = 6, DF = 12et $\widehat{EDF} = 60°$. En déduire l'aire de ce triangle. Déterminer la longueur de la médiane [FI] et de la hauteur [EH].

5. Formules d'addition et de duplication des angles

Propriétés: Pour tous réels a et b, on a:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$;
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
$\sin(a - b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$;
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$;
$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$.



Démonstration: On considère le cercle trigonométrique et les points M et N sur le cercle tels que les angles de vecteurs $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = a$ et $(\vec{i} ; \overrightarrow{ON}) = b$. Dessin ci-contre.
On sait que les coordonnées de M sont $(\cos a; \sin a)$ et celle de N sont $(\cos b; \sin b)$.
On sait que $(\overrightarrow{ON} ; \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{ON} ; \vec{i}) + (\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = (\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) - (\vec{i} ; \overrightarrow{ON}) = a - b$.
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes:
$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{ON} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$ et
$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}) = \cos(\overrightarrow{ON} ; \overrightarrow{OM}) = \cos(a - b)$.
Ainsi $\cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$ (1).
En remplaçant b par $-b$ dans la relation (1), on trouve :
$\cos(a + b) = \cos a \times \cos(-b) + \sin a \times \sin(-b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$ (2).
De plus, on sait que pour tout réel x , $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, d'où
$\sin(a - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a - b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) + b)) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \times \cos b - \sin(\frac{\pi}{2} - a) \times \sin b$ en utilisant la relation (2). Il vient $\sin(a - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \times \cos b - \sin(\frac{\pi}{2} - a) \times \sin b = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$ (3).
En remplaçant b par $-b$ dans la relation (3), on trouve :
$\sin(a + b) = \sin a \times \cos(-b) - \cos a \times \sin(-b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$ (4).

En prenant $a = b$ dans la relation (2), il vient $\cos(2a) = \cos a \times \cos a + \sin a \times \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$ (5).
En prenant $a = b$ dans la relation (4), il vient $\sin(2a) = \sin a \times \cos a + \cos a \times \sin a = 2\cos a \sin a$ (5).

Exemple: Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. On sait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc
$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et
$\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. Equations cartésiennes dans le plan

a) Equation d'une droite dans le plan :

Propriété: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère un point A(x_A ; y_A) et un vecteur $\vec{u}$ (a ; b) ; la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (de direction celle du vecteur) a une équation de la forme $bx - ay + c = 0$.

Démonstration : Pour tout point M(x ; y) de la droite (d), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc leur coordonnées sont proportionnelles : $(x - x_A)b - (y - y_A)a = 0$ et en développant l'expression, on obtient $bx - ay + ay_A - bx_A = 0$; il suffit de poser : $c = ay_A - bx_A$.

b) Vecteur normal à une droite :

Définition: Un vecteur est normal à une droite (d) si sa direction est orthogonale à celle de la droite (d).

Propriété: Si (d) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}$ (a ; b) est normal à (d).

Démonstration : Pour tout point M(x ; y) et M'(x' ; y') distincts de (d), on a $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c = 0$, par soustraction, on obtient $a(x' - x) + b(y' - y) = 0$; donc le vecteur $\vec{n}$ (a ; b) est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$ puisque leur produit scalaire est nul, donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à (d) .

Réciproquement : une droite (d) de vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b) a pour équation $ax + by + c = 0$.

Démonstration : Soit A(x_A ; y_A) et $\vec{n}$ (a ; b) ; soit (d) la droite passant par A et orthogonal à $\vec{n}$; pour tout point M(x ; y) de (d), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, et en développant le membre de gauche, on obtient $ax + by - ax_A - by_A = 0$; il suffit de poser : $c = - ax_A - by_A$.

Propriété : Deux droites (d) et (d') du plan, d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Démonstration : Le vecteur $\vec{n}$ (a ; b) est un vecteur normal de (d) et le vecteur $\vec{n}'$ (a' ; b') est un vecteur normal de (d'). (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux, équivalent à $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, équivalent à $aa' + bb' = 0$.

c) Equation d'un cercle :

Cercle défini par son centre et son rayon : Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère un point A(x_A ; y_A) et un réel $r > 0$; le cercle de centre A et de rayon r a pour équation : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

Démonstration : Pour tout point M(x ; y) du cercle, on a AM = r, soit AM² = r^2 , soit $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

Cercle défini par un diamètre : Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) ; le cercle de diamètre [AB] est défini par l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Démonstration : Pour tout point M(x ; y) du cercle, le triangle ABM est rectangle en M, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux; donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. Son équation s'établit à partir de la relation :
$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Exemples **:** a) Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(2 ; 1) et B(-3 ; 3). Déterminer une équation de la droite (AB), une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par A, une équation de la médiatrice de [AB], une équation du cercle de centre A et de rayon AB, une équation du cercle de diamètre [AB].

b) Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(1 ; 3), B(3 ; -2) et C(-2 ; 0). Déterminer une équation des hauteurs, des médiatrices du triangle ABC ; en déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre de ABC.