

EXERCICES SUR LE PRODUIT SCALAIRE

G.EGUETHER

7 avril 2016

Table des matières

Avertissement	iii
1 GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE DANS L'ESPACE AFFINE A_3	1
2 PRODUIT SCALAIRE	39
2.1 Généralités	39
2.2 Espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$	64
2.3 Espaces de polynômes	71
2.4 Autres espaces	88
3 ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME	99
3.1 Généralités	99
3.2 Espaces de polynômes	108
3.3 Espaces de matrices	122
4 ENDOMORPHISME NORMAL	125
4.1 Généralités	125
4.2 Isométries	131
4.3 Endomorphismes autoadjoints - Matrices symétriques	156
4.4 Endomorphismes antiautoadjoints - Matrices antisymétriques	169
4.5 Projections orthogonales	175
5 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ POUR LES FONCTIONS	181
6 FORME QUADRATIQUE	191
6.1 Généralités	191
6.2 Valeurs propres	194
6.3 Réduction par la méthode de Gauss	202
6.4 Réduction par deux méthodes	213
6.5 Divers	222

Avertissement

On trouvera dans ce qui suit de nombreux exercices sur le produit scalaire et ses applications classés en cinq grands thèmes. On proposera pour chaque exercice une démonstration (parfois deux), mais il peut, bien sûr, y avoir d'autres moyens de procéder.

Des résultats de cours figurent dans certains exercices et pourront être utilisés à d'autres endroits.

Notations

Les espaces vectoriels E sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ considérés sont munis d'un produit scalaire noté $(\mid)$, linéaire par rapport à la **deuxième** variable et semi-linéaire par rapport à la **première**. En particulier, si λ est un scalaire et X et Y deux vecteurs de E ,

$$(i) \quad (\lambda X \mid Y) = \overline{\lambda} (X \mid Y) \quad \text{et} \quad (X \mid \lambda Y) = \lambda (X \mid Y)$$

ainsi que

$$(ii) \quad (Y \mid X) = \overline{(X \mid Y)}.$$

La norme d'un vecteur V est alors

$$\|V\| = \sqrt{(V \mid V)}.$$

Si F est un sous-espace de dimension finie n de E , et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , alors, la projection orthogonale de X sur F est

$$\text{pr}_F(X) = \sum_{k=1}^n (e_k \mid X) e_k.$$

Si E est de dimension finie n , et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , alors

$$X = \sum_{k=1}^n (e_k \mid X) e_k.$$

En confondant des vecteurs X et Y avec la matrice colonne de leurs coordonnées dans une base orthonormée, on a également

$$(X \mid Y) = {}^t \overline{X} Y.$$

Lorsque l'on construit une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ à partir d'une base $(V_1, \dots, V_n)$ par le procédé de Schmidt, on notera

$$\mathcal{E}_k = V_k - \sum_{r=1}^{k-1} (E_r \mid V_k) E_r,$$

et l'on aura

$$E_k = \frac{1}{\|\mathcal{E}_k\|} \mathcal{E}_k .$$

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, on dira que E est euclidien réel. Dans ce cas les barres de conjugaison disparaissent dans les formules (i) et (ii).

Si E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire, on dira que E est euclidien complexe ou hermitien.

Si i et j sont deux éléments d'un ensemble d'indices, on utilisera la notation de Kronecker δ_{ij} (ou δ_i^j) telle que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} .$$

Enfin la composée de deux endomorphismes f et g sera notée $f \circ g$ ou plus simplement fg

Des notations particulières peuvent être indiquées en têtes de chapitres ou de sections.

Chapitre 1

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE DANS L'ESPACE AFFINE A_3

Dans ce chapitre, l'espace affine A_3 de la géométrie associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On notera $M(x, y, z)$ le point M de A_3 de coordonnées (x, y, z) dans ce repère.

Tout sous-espace affine A de A_3 est associé à un sous-espace vectoriel noté $\vec{A}$.

Soit deux vecteurs

$$\vec{U}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{U}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Le produit scalaire $(\vec{U}_1 | \vec{U}_2)$ et le produit vectoriel $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ sont définis par

$$(\vec{U}_1 | \vec{U}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad \text{et} \quad \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

La norme d'un vecteur $\vec{U}$ est alors

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{(\vec{U} | \vec{U})},$$

et l'on a pour trois vecteurs, le produit mixte

$$(\vec{U}_1 | \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = \det(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3),$$

où le déterminant des vecteurs est pris dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs et a, b, c, d quatre nombres réels. Montrer que

$$(a\vec{U} + b\vec{V}) \wedge (c\vec{U} + d\vec{V}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Solution

On développe en utilisant le fait que $\vec{U} \wedge \vec{U}$ et $\vec{V} \wedge \vec{V}$ sont nuls, et que

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}.$$

On trouve

$$(a\vec{U} + b\vec{V}) \wedge (c\vec{U} + d\vec{V}) = (ad - bc)(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

Exercice 2

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs, et $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} (\vec{U} | \vec{U}) & (\vec{U} | \vec{V}) & (\vec{U} | \vec{W}) \\ (\vec{U} | \vec{V}) & (\vec{V} | \vec{V}) & (\vec{V} | \vec{W}) \\ (\vec{U} | \vec{W}) & (\vec{V} | \vec{W}) & (\vec{W} | \vec{W}) \end{bmatrix}.$$

Montrer que

$$\det A = \|\vec{W}\|^4.$$

Solution

D'après les propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire

$$A = \begin{bmatrix} \|\vec{U}\|^2 & (\vec{U} | \vec{V}) & 0 \\ (\vec{U} | \vec{V}) & \|\vec{V}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|\vec{W}\|^2 \end{bmatrix} = \|\vec{W}\|^2 \begin{bmatrix} \|\vec{U}\|^2 & (\vec{U} | \vec{V}) \\ (\vec{U} | \vec{V}) & \|\vec{V}\|^2 \end{bmatrix} = \|\vec{W}\|^2 \left[\|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 - (\vec{U} | \vec{V})^2 \right].$$

Mais

$$\|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 = (\vec{U} | \vec{V})^2 + \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2,$$

d'où le résultat.

Exercice 3 Distance d'un point à un plan

Soit Π un plan affine et M un point de A_3 . Montrer que la distance de M à Π est donnée par les formules suivantes :

1) lorsque le plan a pour équation $ux + vy + wz = h$, où les nombres u, v, w ne sont pas tous nuls, et M est le point de coordonnées (a, b, c)

$$d(M, \Pi) = \frac{|ua + vb + wc - h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

2) lorsque le plan est défini par un point A et deux vecteurs indépendants $\vec{U}$ et $\vec{V}$,

$$d(M, \Pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}, \vec{V})|}{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|},$$

3) lorsque le plan est défini par trois points distincts A, B, C ,

$$d(M, \Pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

Solution

1) Soit P et P_0 deux points du plan Π de coordonnées respectives (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) . On a alors

$$ux + vy + wz = h \quad \text{et} \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 = h,$$

et donc, par soustraction,

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0.$$

Si l'on pose $\vec{N} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, on a donc

$$(\vec{N} | \overrightarrow{P_0P}) = u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0,$$

et $\vec{N}$ est orthogonal au plan Π .

Si H est la projection orthogonale de M sur Π , de coordonnées (X, Y, Z) , le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{N}$. Il existe donc un réel λ tel que

$$X - a = \lambda u, \quad Y - b = \lambda v, \quad Z - c = \lambda w.$$

On obtient alors

$$uX + vY + wZ = ua + vb + wc + \lambda(u^2 + v^2 + w^2),$$

et comme H appartient à Π , on doit avoir

$$ua + vb + wc + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = h$$

ce qui détermine λ .

$$\lambda = \frac{h - (ua + vb + wc)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

La distance du point M au plan Π est alors

$$\|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2} = |\lambda| \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{|ua + vb + wc - h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

2) Décomposons le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$. On a

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{U} + \beta \vec{V} + \gamma \vec{U} \wedge \vec{V}$$

et dans ce cas, puisque $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{V}$ donc au plan Π , on a

$$d(M, \Pi) = |\gamma| \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|.$$

D'autre part

$$(\overrightarrow{AM} | \vec{U} \wedge \vec{V}) = \gamma \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2,$$

d'où

$$d(M, \Pi) = \frac{|(\overrightarrow{AM} | \vec{U} \wedge \vec{V})|}{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}, \vec{V})|}{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}.$$

3) On prend $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$, alors

$$d(M, \Pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

Mais, en raison des propriétés du déterminant,

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = -\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}),$$

d'où

$$d(M, \Pi) = \frac{|\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

On peut aussi remarquer que $|\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})|$ est six fois le volume du tétraèdre $MABC$ et que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ est le double de l'aire du triangle ABC , donc

$$d(M, \Pi) = 3 \frac{\mathcal{V}(MABC)}{\mathcal{A}(ABC)}.$$

Exercice 4 Distance d'un point à une droite

Soit D la droite engendrée par le vecteur directeur $\vec{X}$ et passant par le point A , et soit M un autre point. On appelle H la projection orthogonale de M sur D et Π le plan passant par M et orthogonal à D . En utilisant le théorème de Pythagore et l'exercice précédent, montrer que la distance $d(M, D)$ de M à D est donnée par la formule

$$d(M, D) = \frac{\sqrt{\|\vec{X}\|^2 \|\vec{MA}\|^2 - (\vec{X} | \vec{MA})^2}}{\|\vec{X}\|} = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{X}\|}{\|\vec{X}\|}.$$

En déduire que la distance $d(M, D)$ lorsque M est définie par deux points A et B distincts vaut

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|}{\|\vec{AB}\|}.$$

Solution

Le point H est également la projection de A sur le plan Π . Le théorème de Pythagore donne donc

$$\|\vec{MH}\|^2 + \|\vec{AH}\|^2 = \|\vec{MA}\|^2.$$

Mais $\|\vec{AH}\|$ est la distance de A au plan Π , que l'on peut calculer par la formule 1) de l'exercice précédent. Soit P un point du plan de coordonnées (x, y, z) , et (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M . L'équation du plan s'obtient en écrivant que $\vec{PM}$ est orthogonal à $\vec{X}$. Donc, si l'on a

$$\vec{X} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k},$$

alors

$$(\vec{PM} | \vec{X}) = u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0,$$

et, d'après l'exercice précédent, si A a pour coordonnées (a, b, c) , on obtient

$$\|\vec{AH}\| = \frac{|u(a - x_0) + v(b - y_0) + w(c - z_0)|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{|(\vec{AM} | \vec{X})|}{\|\vec{X}\|}.$$

et donc

$$\|\vec{MH}\|^2 = \|\vec{MA}\|^2 - \|\vec{AH}\|^2 = \|\vec{MA}\|^2 - \frac{(\vec{AM} | \vec{X})^2}{\|\vec{X}\|^2}.$$

On en déduit finalement

$$d(M, D) = \frac{\sqrt{\|\vec{X}\|^2 \|\vec{MA}\|^2 - (\vec{X} | \vec{MA})^2}}{\|\vec{X}\|},$$

mais, d'après les propriétés du produit vectoriel,

$$(\vec{U} | \vec{V})^2 + \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2,$$

et donc,

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{X}\|}{\|\vec{X}\|}.$$

Si l'on prend $\vec{X} = \vec{AB}$, puisque

$$\vec{MA} \wedge \vec{AB} = \vec{MA} \wedge (\vec{AM} + \vec{MB}) = \vec{MA} \wedge \vec{MB},$$

on obtient

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|}{\|\vec{AB}\|}.$$

Exercice 5 Formule du double produit vectoriel

On veut démontrer que pour trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ on a

$$(1) \quad (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} | \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{C}) \vec{A}.$$

1) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas colinéaires, pour quelle raison le vecteur $\vec{W} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ appartient-il au plan engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$?

2) Vérifier que la formule est vraie si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires.

3) On suppose que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est une base directe. En utilisant les vecteurs $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ construits à partir de ceux-ci par le procédé de Schmidt, montrer que la formule est vraie. Puis en déduire que la formule est vraie pour une base quelconque.

4) On suppose que $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont indépendants et que $\vec{C}$ appartient au plan qu'ils engendrent. Montrer par une méthode analogue à celle du 3) que la formule est encore vraie.

5) Déterminer les triplets $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ tels que

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}).$$

6) Soit quatre vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$. Calculer de deux manières

$$\vec{Z} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D}).$$

Si $\vec{A}, \vec{B}$ d'une part et $\vec{C}, \vec{D}$ d'autre part sont indépendants, que peut-on dire du vecteur $\vec{Z}$?

Solution

1) Le vecteur $\vec{W}$ est orthogonal à $\vec{A} \wedge \vec{B}$, et comme $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est orthogonal au plan engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, le vecteur $\vec{W}$ appartient également à ce plan. C'est donc une combinaison linéaire de $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est nul, donc $\vec{W}$ également. Si l'on a par exemple $\vec{B} = \lambda \vec{A}$, on obtient

$$(\vec{A} | \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{C}) \vec{A} = (\vec{A} | \vec{C}) (\lambda \vec{A}) - ((\lambda \vec{A}) | \vec{C}) \vec{A},$$

et comme λ se met en facteur, on trouve également $\vec{0}$.

3) Par le procédé de Schmidt on construit successivement

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \vec{A},$$

donc

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{I},$$

puis

$$\vec{J} = \vec{B} - (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \frac{1}{\|\vec{J}\|} \vec{J},$$

ce qui donne

$$\vec{B} = (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I} + \|\vec{J}\| \vec{J},$$

et enfin

$$\vec{K} = \vec{C} - (\vec{C} | \vec{I}) \vec{I} - (\vec{C} | \vec{J}) \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{K} = \frac{1}{\|\vec{K}\|} \vec{K},$$

ce qui donne

$$\vec{C} = (\vec{C} | \vec{I}) \vec{I} + (\vec{C} | \vec{J}) \vec{J} + \|\vec{K}\| \vec{K}.$$

La base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est orthonormée, et elle est directe si la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est directe, donc

$$\vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{K}.$$

On en déduit la relation

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{J}\| \vec{K},$$

puis

$$\vec{W} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \|\vec{A}\| \|\vec{J}\| \vec{K} \wedge \vec{C} = \|\vec{A}\| \|\vec{J}\| (\vec{C} | \vec{I}) \vec{J} - \|\vec{A}\| \|\vec{J}\| (\vec{C} | \vec{J}) \vec{I},$$

où encore, puisque $\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{I}$ et $\vec{J} = \|\vec{J}\| \vec{J}$,

$$\vec{W} = (\vec{C} | \vec{A}) \vec{J} - (\vec{C} | \vec{J}) \vec{A},$$

Remplaçons alors $\vec{J}$ par sa valeur, il vient

$$\vec{W} = (\vec{C} | \vec{A}) [\vec{B} - (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I}] - (\vec{C} | \vec{B} - (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I}) \vec{A},$$

et en développant

$$\vec{W} = (\vec{C} | \vec{A}) \vec{B} - (\vec{C} | \vec{A}) (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I} - (\vec{C} | \vec{B}) \vec{A} + (\vec{B} | \vec{I}) (\vec{C} | \vec{I}) \vec{A}.$$

Mais,

$$(\vec{B} | \vec{I}) (\vec{C} | \vec{I}) \vec{A} = \|\vec{A}\| (\vec{B} | \vec{I}) (\vec{C} | \vec{I}) \vec{I} = (\vec{C} | \vec{A}) (\vec{B} | \vec{I}) \vec{I},$$

et il reste

$$\vec{W} = (\vec{C} | \vec{A}) \vec{B} - (\vec{C} | \vec{B}) \vec{A}.$$

Si la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ n'est pas directe, alors la base $(\vec{A}, \vec{B}, -\vec{C})$ est directe. Donc

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (-\vec{C}) = (-\vec{C} | \vec{A}) \vec{B} - (-\vec{C} | \vec{B}) \vec{A}.$$

Alors en changeant tous les signes on retrouve la formule voulue.

4) Si $\vec{C}$ appartient au plan engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, on peut encore construire $\vec{I}$ et $\vec{J}$. On a cette fois $\vec{\mathcal{K}} = \vec{0}$ et l'on posera alors $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$. Dans ces conditions le calcul du 3) est encore valable, puisque l'on a de nouveau $\vec{\mathcal{K}} = \|\vec{\mathcal{K}}\| \vec{K}$.

5) On écrit

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = -(\vec{B} \wedge \vec{C}) \wedge \vec{A},$$

et on applique la formule obtenue (1). On obtient alors

$$(2) \quad \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{C} | \vec{A}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{A}) \vec{C}$$

Soit un triplet de vecteurs $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ tel que

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}).$$

En utilisant les formules (1) et (2), l'égalité se traduit par

$$(\vec{A} | \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{C}) \vec{A} = (\vec{C} | \vec{A}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{A}) \vec{C},$$

ou encore par

$$(\vec{B} | \vec{C}) \vec{A} - (\vec{B} | \vec{A}) \vec{C} = \vec{0}.$$

qui a lieu si et seulement si l'on se trouve dans un des deux cas suivants :

(i) le vecteur $\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et $\vec{C}$,

(ii) $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont colinéaires.

C'est vrai en particulier si l'un des vecteurs est nul.

6) On peut appliquer soit la formule (1) soit la formule (2). On obtient dans le premier cas

$$\vec{Z} = (\vec{A} | \vec{C} \wedge \vec{D}) \vec{B} - (\vec{B} | \vec{C} \wedge \vec{D}) \vec{A},$$

et dans le second

$$\vec{Z} = (\vec{D} | \vec{A} \wedge \vec{B}) \vec{C} - (\vec{C} | \vec{A} \wedge \vec{B}) \vec{D}.$$

Le vecteur $\vec{Z}$ appartient donc au plan engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et au plan engendré par $\vec{D}$ et $\vec{C}$, c'est-à-dire à la droite intersection de ces deux plans.

Exercice 6 Formule du produit scalaire de deux produits vectoriels

Soit quatre vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$. On veut montrer que

$$(\vec{A} \wedge \vec{B} | \vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C}).$$

1) Montrer que la formule est vraie si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires.

2) On suppose que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et de norme 1. En écrivant les vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{D}$ dans la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$, montrer que la formule est vraie dans ce cas.

3) On suppose que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ forment un système libre. En utilisant les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ construits à partir de $(\vec{A}, \vec{B})$ par le procédé de Schmidt, montrer que la formule est encore vraie dans ce cas.

Solution

1) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires le membre de gauche est nul.

Si $\vec{A}$ est nul, les deux membres sont nuls. Si $\vec{A}$ n'est pas nul, il existe λ tel que $\vec{B} = \lambda \vec{A}$. Alors

$$(\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C}) = (\vec{A} | \vec{C})(\lambda \vec{A} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\lambda \vec{A} | \vec{C}),$$

et en mettant λ en facteur, on obtient 0.

2) Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et de norme 1, la base $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est orthonormée directe. Alors, en écrivant

$$\vec{C} = (\vec{C} | \vec{A})\vec{A} + (\vec{C} | \vec{B})\vec{B} + \lambda \vec{A} \wedge \vec{B},$$

et

$$\vec{D} = (\vec{D} | \vec{A})\vec{A} + (\vec{D} | \vec{B})\vec{B} + \mu \vec{A} \wedge \vec{B},$$

on obtient

$$\vec{C} \wedge \vec{D} = [(\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C})] \vec{A} \wedge \vec{B} + \alpha \vec{A} + \beta \vec{B},$$

où α et β sont deux nombres qu'il est inutile de calculer, et donc

$$(\vec{A} \wedge \vec{B} | \vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C}),$$

ce qui donne le résultat voulu.

3) Par le procédé de Schmidt on construit successivement

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \vec{A},$$

donc

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{I},$$

puis

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{B} - (\vec{B} | \vec{I})\vec{I} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \frac{1}{\|\vec{\mathcal{J}}\|} \vec{\mathcal{J}},$$

ce qui donne

$$\vec{B} = (\vec{B} | \vec{I})\vec{I} + \|\vec{\mathcal{J}}\|\vec{J},$$

donc

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{\mathcal{J}}\| \vec{I} \wedge \vec{J}.$$

Comme $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont orthogonaux et de norme 1, on applique 2), et

$$(\vec{I} \wedge \vec{J} | \vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{I} | \vec{C})(\vec{J} | \vec{D}) - (\vec{I} | \vec{D})(\vec{J} | \vec{C}).$$

Alors

$$S = (\vec{A} \wedge \vec{B} | \vec{C} \wedge \vec{D}) = \|\vec{A}\| \|\vec{\mathcal{J}}\| [(\vec{I} | \vec{C})(\vec{J} | \vec{D}) - (\vec{I} | \vec{D})(\vec{J} | \vec{C})],$$

ou encore

$$S = (\vec{A} | \vec{C})(\vec{\mathcal{J}} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{\mathcal{J}} | \vec{C}).$$

On remplace alors $\vec{\mathcal{J}}$ par sa valeur

$$S = (\vec{A} | \vec{C})[(\vec{B} - (\vec{B} | \vec{I})\vec{I}) | \vec{D}] - (\vec{A} | \vec{D})[(\vec{B} - (\vec{B} | \vec{I})\vec{I}) | \vec{C}].$$

En développant, il vient

$$S = (\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C}) - (\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{I})(\vec{I} | \vec{D}) + (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{I})(\vec{I} | \vec{C}).$$

Mais

$$(\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{I})(\vec{I} | \vec{D}) = \|\vec{A}\|(\vec{I} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{I})(\vec{I} | \vec{D}) = (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{I})(\vec{I} | \vec{C}),$$

donc on obtient bien

$$S = (\vec{A} | \vec{C})(\vec{B} | \vec{D}) - (\vec{A} | \vec{D})(\vec{B} | \vec{C}).$$

Exercice 7

Soit $\vec{A}$ un vecteur non nul et $\vec{B}$ un autre vecteur. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\vec{X} \wedge \vec{A} = \vec{B}$$

ait une solution et résoudre cette équation.

Solution

Le vecteur $\vec{X} \wedge \vec{A}$ est orthogonal à $\vec{A}$. Donc une condition nécessaire est que $(\vec{A} | \vec{B})$ soit nul.

Supposons cette condition satisfaite. Si $\vec{B}$ est non nul, les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{B}$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Cherchons une solution de la forme

$$\vec{X} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{A} \wedge \vec{B} + \nu \vec{B}.$$

On a

$$\vec{X} \wedge \vec{A} = \mu (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{A} + \nu \vec{B} \wedge \vec{A}.$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel (exercice 5),

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \vec{B} - (\vec{B} \mid \vec{A}) \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \vec{B}$$

d'où

$$\vec{B} = \mu \|\vec{A}\|^2 \vec{B} - \nu \vec{A} \wedge \vec{B}.$$

Comme $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ est une base, cette égalité a lieu si et seulement si

$$\mu \|\vec{A}\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \nu = 0,$$

d'où les solutions

$$\vec{X} = \lambda \vec{A} + \frac{1}{\|\vec{A}\|^2} \vec{A} \wedge \vec{B},$$

où λ est un nombre réel quelconque.

Cette solution reste valable si $\vec{B}$ est nul, car $\vec{X} \wedge \vec{A}$ est nul si et seulement si $\vec{X}$ est colinéaire à $\vec{A}$.

La condition $(\vec{A} \mid \vec{B}) = 0$ est donc suffisante pour avoir une solution.

Exercice 8

Trouver la distance d entre deux plans parallèles P_1 et P_2

- 1) si P_i est défini par l'équation $ux + vy + wz = t_i$ où u, v et w ne sont pas tous nuls ;
- 2) si P_i est défini par un de ses points A_i et deux vecteurs indépendants $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Solution

1) Le vecteur $\vec{U}_0 = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ est orthogonal à P_1 et P_2 . Soit H_1 dans P_1 et H_2 sa projection sur P_2 . Alors

$$\overrightarrow{H_1 H_2} = \lambda \vec{U}_0.$$

Par ailleurs

$$(\overrightarrow{OH_1} \mid \vec{U}_0) = t_1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OH_2} \mid \vec{U}_0) = t_2,$$

et par soustraction

$$(\overrightarrow{H_1 H_2} \mid \vec{U}_0) = t_2 - t_1 = \lambda \|\vec{U}_0\|^2.$$

Donc

$$\overrightarrow{H_1 H_2} = \frac{t_2 - t_1}{\|\vec{U}_0\|^2} \vec{U}_0,$$

puis

$$d = \|\overrightarrow{H_1 H_2}\| = \frac{|t_2 - t_1|}{\|\vec{U}_0\|} = \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

2) Dans ce cas d est la distance de A_1 à P_2 et donc, d'après une formule vue plus haut, (exercice 3, 2))

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{U}, \vec{V})|}{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}.$$

Exercice 9

Soit un plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ où u et v ne sont pas tous les deux nuls.

- 1) Trouver un vecteur directeur $\vec{U}$ des horizontales du plan.
- 2) Trouver un vecteur directeur $\vec{V}$ des lignes de plus grande pente (orthogonales aux horizontales).
- 3) Trouver l'angle des lignes de plus grande pente avec la verticale.
- 4) Calculer les éléments précédents lorsque le plan est défini par les trois points $A(1, 1, -1)$, $B(5, -2, -1)$ et $C(4, -5, 2)$.

Solution

1) Les lignes horizontales sont telles que $z = c$. Elles ont donc pour équations

$$\begin{cases} ux + vy &= -t - wz \\ z &= c \end{cases},$$

et un vecteur directeur $\vec{U}$ vérifie le système

$$\begin{cases} ux + vy &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}.$$

On peut prendre par exemple

$$\vec{U} = v \vec{i} - u \vec{j}.$$

2) Les lignes orthogonales aux précédentes sont orthogonales au vecteur $\vec{U}$, donc ont pour équations

$$\begin{cases} ux + vy + wz &= -t \\ vx - uy &= c' \end{cases},$$

et un vecteur directeur $\vec{V}$ vérifie le système

$$\begin{cases} ux + vy + wz &= 0 \\ vx - uy &= 0 \end{cases},$$

Si

$$x = \lambda u \quad \text{et} \quad y = \lambda v$$

on a

$$\lambda(u^2 + v^2) + wz = 0,$$

et l'on peut prendre par exemple

$$\vec{V} = -wu \vec{i} - wv \vec{j} + (u^2 + v^2) \vec{k}.$$

En particulier

$$\|\vec{V}\|^2 = w^2(u^2 + v^2) + (u^2 + v^2)^2 = (u^2 + v^2)(u^2 + v^2 + w^2).$$

3) En calculant le cosinus de l'angle que font les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{k}$ on obtient

$$\cos(\widehat{\vec{V} | \vec{k}}) = \frac{(\vec{V} | \vec{k})}{\|\vec{V}\| \|\vec{k}\|} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

4) Pour obtenir l'équation du plan, on écrit que les vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ sont liés, c'est-à-dire que leur déterminant est nul. On a donc

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -9(x-1) - 12(y-1) - 15(z+1) = 0,$$

ce qui donne, après simplification,

$$3x + 4y + 5z = 2.$$

On obtient alors, comme vecteur directeur des horizontales

$$\vec{U} = 4\vec{i} - 3\vec{j},$$

comme vecteur directeur des lignes de plus grande pente

$$\vec{V}' = -15\vec{i} - 20\vec{j} + 25\vec{k},$$

ou en simplifiant

$$\vec{V} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Enfin

$$\cos(\widehat{\vec{V} | \vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc $(\widehat{\vec{V} | \vec{k}})$ a pour mesure

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 10

Soit les plans P_1 et P_2 d'équations respectives

$$2x + 3y - z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + z - 4 = 0.$$

Trouver une base orthonormée directe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ telle que $\vec{I}$ soit parallèle à P_1 et $\vec{J}$ soit parallèle à P_1 et P_2 .

Trouver les coordonnées du point $A(1, -1, 2)$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Solution

Le vecteur $\vec{J}$ doit appartenir à la droite vectorielle $\vec{D}$ intersection des plans vectoriels $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$. Sachant que les vecteurs

$$\vec{U}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{U}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

sont orthogonaux à P_1 et P_2 respectivement, le vecteur $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ appartient à $\vec{D}$. Donc

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Et on obtient $\vec{J}$ en normant ce vecteur, soit

$$\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{35}} (5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}).$$

Ensuite, on cherche $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{J}$ et dans $\vec{P}_1$. Ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}.$$

En additionnant les équations on trouve $x = 0$, et le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{j} + 3\vec{k}$, donc, en le normant,

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{j} + 3\vec{k}).$$

Pour avoir une base orthonormée directe, on prend alors

$$\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{350}} (10\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{14}} (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}).$$

Les coordonnées de A dans le nouveau repère sont alors

$$(\vec{OA} | \vec{I}) = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad , \quad (\vec{OA} | \vec{J}) = \frac{10}{\sqrt{35}} \quad , \quad (\vec{OA} | \vec{K}) = -\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Exercice 11

Soit $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ et $D(2, 2, 2)$ quatre points de A_3 .

- 1) Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan BCD . Ecrire une équation de ce plan et déterminer les coordonnées de A' , projection orthogonale de A sur le plan.
- 2) Déterminer de même les coordonnées de B' , C' , D' , projections orthogonales respectives de B sur le plan ACD , de C sur le plan ABD et de D sur le plan ABC .
- 3) Montrer que les droites AA' , BB' , CC' et DD' sont concourantes en un point H que l'on déterminera.

Solution

1) On a

$$\overrightarrow{BD} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Un vecteur orthogonal au plan BCD est $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{CD}$. On a donc

$$\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

Le plan BCD a pour équation

$$x + y - 3z = \alpha$$

et on détermine α en écrivant que le plan contient B , ce qui donne

$$x + y - 3z = -2.$$

La droite orthogonale au plan passant par A se paramètre par

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 1 \\ z = -3\lambda \end{cases},$$

et l'intersection de cette droite avec le plan vérifie

$$(\lambda + 1) + (\lambda + 1) + 9\lambda = -2$$

d'où

$$\lambda = -\frac{4}{11}.$$

Le point A' a donc pour coordonnées $\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{12}{11}\right)$.

2) Etant donné que les coordonnées des points B et C se déduisent de celles de A par permutation circulaire, les coordonnées de B' et C' se déduiront de même de celles de A' par les mêmes permutations. Donc B' a pour coordonnées $\left(\frac{7}{11}, \frac{12}{11}, \frac{7}{11}\right)$ et C' a pour coordonnées $\left(\frac{12}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11}\right)$.

Par ailleurs le plan ABC a pour équation évidente

$$x + y + z = 2,$$

et OD est orthogonale au plan. Les coordonnées de D' sont donc toutes égales et vérifient l'équation précédente, donc D' a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3) Les droites AA' , BB' , CC' et DD' se paramètrent respectivement par

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + 1 \\ y = \lambda_1 + 1 \\ z = -3\lambda_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \lambda_2 + 1 \\ y = -3\lambda_2 \\ z = \lambda_2 + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -3\lambda_3 \\ y = \lambda_3 + 1 \\ z = \lambda_3 + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \lambda_4 \\ y = \lambda_4 \\ z = \lambda_4 \end{cases}.$$

Si l'on cherche l'intersection des deux premières, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/4$ et le point d'intersection H qui a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, appartient aussi à CC' ($\lambda_3 = -1/4$) et à DD' ($\lambda_4 = 3/4$). Les quatre droites sont donc concourantes en H .

Exercice 12

Soit P le plan d'équation $2x - 3y - z = 1$, et $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$.

Trouver deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ tels que

- i) la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est orthonormée directe ,
- ii) $\vec{I}$ est parallèle à P ,
- iii) le premier coefficient de $\vec{I}$ est positif.

Ecrire dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ les coordonnées du point $A(1, 3, 5)$.

Solution

Un vecteur $\vec{I}$ orthogonal à $\vec{K}$ vérifie

$$(\vec{I} | \vec{K}) = -x + 2y + z = 0.$$

S'il est dans P , il vérifie aussi

$$2x - 3y - z = 0.$$

Il appartient donc à la droite vectorielle d'équations

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}.$$

En additionnant ces équations on trouve $x - y = 0$, puis $z = -x$, et un vecteur directeur de cette droite est alors $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

On norme alors ce vecteur et l'on obtient

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}).$$

Ce vecteur vérifie aussi la condition iii).

Pour avoir une base orthonormée directe, il suffit de prendre

$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3\vec{i} - 3\vec{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sont alors

$$(\vec{OA} | \vec{I}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad (\vec{OA} | \vec{J}) = -\frac{6}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\vec{OA} | \vec{K}) = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 13

Soit P le plan d'équation $x - 3y + 4z = 0$. Trouver une base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormée directe telle que $\vec{I}$ et $\vec{J}$ soient parallèles à P et $\vec{I}$ soit horizontal.

Solution

Si $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont parallèles à P , alors $\vec{K}$ est orthogonal à P . Or, le vecteur $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ est orthogonal à P et, en le normant, on peut prendre

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}).$$

On cherche un vecteur orthogonal à $\vec{K}$ et horizontal. Il vérifie donc

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On peut prendre par exemple

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{i} + \vec{j}).$$

Pour avoir une base orthonormée directe, il suffit de prendre

$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{2\sqrt{65}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{65}}(-4\vec{i} + 12\vec{j} + 10\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{65}}(-2\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}).$$

Exercice 14

Soit le vecteur

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3} \vec{k}).$$

Trouver une base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormée directe telle que $\vec{K}$ soit horizontal.

Solution

Le vecteur $\vec{K}$ est de la forme

$$\vec{K} = a \vec{i} + b \vec{j}.$$

Il doit être orthogonal à $\vec{I}$, donc

$$(\vec{K} | \vec{I}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (a + b) = 0.$$

alors

$$\vec{K} = a(\vec{i} - \vec{j}).$$

Enfin $\vec{K}$ doit être de norme 1, ce qui donne

$$\|\vec{K}\|^2 = 2a^2 = 1,$$

et finalement, une solution possible est

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} - \vec{j}).$$

Enfin

$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} (-\sqrt{3} \vec{i} - \sqrt{3} \vec{j} + 2 \vec{k}).$$

Exercice 15

Soit les vecteurs

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} - \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{J} = \alpha \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \beta \vec{k}.$$

Trouver les bases $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ orthonormées directes.

Solution

Tout d'abord

$$0 = (\vec{I} | \vec{J}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

donc

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ensuite

$$\|\vec{J}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{3} = \beta^2 + \frac{2}{3} = 1,$$

d'où,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

et les deux vecteurs possibles

$$\vec{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad \text{et} \quad \vec{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}).$$

Alors, le troisième vecteur s'obtient comme produit vectoriel des deux autres, donc

$$\vec{K}_1 = \vec{I} \wedge \vec{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}),$$

et

$$\vec{K}_2 = \vec{I} \wedge \vec{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Exercice 16

Soit D la droite définie par les équations

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x - 4y + z = 1 \end{cases}.$$

Trouver la projection orthogonale du point $A(-3, 2, 3)$ sur D et la distance de A à D .

Solution

En soustrayant la première équation à la seconde, on obtient

$$x - 3y = 1,$$

puis en remplaçant dans la première

$$5y + 2 + z = 0.$$

cela permet d'obtenir un paramétrage de D

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda - 2 \end{cases}.$$

Un vecteur directeur de la droite est donc

$$\vec{U} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}.$$

et le plan P orthogonal à D passant par A a pour équation

$$3x + y - 5z = 3x_A + y_A - 5z_A = -22.$$

La projection cherchée est l'intersection de D et de P . On a donc

$$3(3\lambda + 1) + \lambda - 5(-5\lambda - 2) = -22,$$

d'où l'on tire $\lambda = -1$, et donc H a pour coordonnées $(-2, -1, 3)$.

Alors

$$\overrightarrow{AH} = \vec{i} - 3\vec{j},$$

et

$$d(A, D) = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{10}.$$

Exercice 17

Soit P le plan d'équation $2x - y + 5z = 7$ et les points $A(1, -2, 3)$ et $B(5, 2, 7)$. Trouver les points M du plan tels que le triangle ABM soit équilatéral.

Solution

On constate que

$$\overrightarrow{AB} = 4(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{U},$$

et que le milieu H de AB a pour coordonnées $(3, 0, 5)$. Le point M cherché se trouve dans le plan médiateur du segment AB , donc dans le plan passant par H et orthogonal à U . Ce plan a pour équation

$$x + y + z = x_H + y_H + z_H = 8.$$

Donc les coordonnées de M vérifient le système

$$\begin{cases} x + y + z &= 8 \\ 2x - y + 5z &= 7 \end{cases}.$$

En additionnant ces deux équations, on trouve

$$3x + 6z = 15,$$

donc

$$x = -2z + 5,$$

et en remplaçant dans la première équation

$$y - z + 5 = 8,$$

ce qui permet de paramétrer la droite définie par le système précédent par

$$\begin{cases} x &= -2\lambda + 5 \\ y &= \lambda + 3 \\ z &= \lambda \end{cases}.$$

Le point M est sur cette droite. Il reste à écrire que

$$\|AM\|^2 = \|AB\|^2,$$

pour déterminer M . On obtient

$$(-2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 5)^2 + (\lambda - 3)^2 = 3 \times 4^2,$$

d'où

$$6\lambda^2 - 12\lambda + 2 = 0.$$

On obtient deux valeurs de λ possibles

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

et donc les deux points de coordonnées

$$\left(3 - 2\frac{\sqrt{6}}{3}, 4 + \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(3 + 2\frac{\sqrt{6}}{3}, 4 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Exercice 18

Soit D la droite définie par les équations

$$\begin{cases} 2x - y + 5z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \end{cases}.$$

Trouver la distance du point $A(5, 6, 0)$ à D . Trouver les points M de D tels que la distance de A à M soit égale à 5.

Solution

En additionnant ces deux équations, on trouve

$$3x + 6z = 6,$$

donc

$$x = -2z + 2,$$

et en remplaçant dans la seconde équation

$$-z + y = 2,$$

ce qui permet de paramétrer la droite par

$$\begin{cases} x &= -2\lambda + 2 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= \lambda \end{cases}.$$

La droite a comme vecteur directeur

$$\vec{U} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Soit B le point de la droite de coordonnées $(2, 2, 0)$. On a alors

$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 4\vec{j},$$

puis

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{U} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Alors, d'après la formule de l'exercice 4,

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{U}\|}{\|\vec{U}\|} = \sqrt{\frac{146}{6}} = \sqrt{\frac{73}{3}}.$$

Si M est sur D , on a

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (3 + 2\lambda)^2 + (\lambda - 4)^2 + \lambda^2,$$

donc, le point M cherché doit vérifier

$$(3 + 2\lambda)^2 + (\lambda - 4)^2 + \lambda^2 = 25,$$

soit

$$6\lambda^2 + 4\lambda = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2/3,$$

et les deux points possibles de coordonnées $(2, 2, 0)$ et $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 19

Soit

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V} = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Calculer $\|\vec{U} - \vec{V}\|$, $(\vec{U} + \vec{V} \mid 2\vec{U} - \vec{V})$, $(\vec{U} - 3\vec{V}) \wedge \vec{V}$.

Solution

On a successivement

$$\vec{U} - \vec{V} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \quad \text{et} \quad \|\vec{U} - \vec{V}\| = 5\sqrt{2}.$$

Ensuite

$$\vec{U} + \vec{V} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad 2\vec{U} - \vec{V} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k},$$

d'où

$$(\vec{U} + \vec{V} | 2\vec{U} - \vec{V}) = -7 + 14 - 18 = -11.$$

Enfin

$$(\vec{U} - 3\vec{V}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 13\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Exercice 20

Soit

$$\vec{U} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Calculer $\|\vec{U}\|$, $\|\vec{V}\|$, $(\vec{U} | \vec{V})$ et trouver un vecteur de norme 1 orthogonal à la fois à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Solution

On a successivement

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{5}.$$

Ensuite

$$(\vec{U} | \vec{V}) = 1.$$

Comme $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est orthogonal à la fois à $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on calcule

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Ce vecteur a pour norme

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \sqrt{14},$$

et donc le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \vec{U} \wedge \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{14}} (-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

convient.

Exercice 21

Déterminer la projection orthogonale H du point $A(1, 7, 3)$ sur le plan P d'équation $x - 2y + 4z = 5$. Vérifier que $d(A, P) = \|\vec{AH}\|$. Déterminer le symétrique orthogonal S de A par rapport à P .

Solution

Le vecteur $\vec{U} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ est un vecteur directeur des normales au plan. La droite AH se paramètre donc par

$$\begin{cases} x &= \lambda + 1 \\ y &= -2\lambda + 7 \\ z &= 4\lambda + 3 \end{cases}.$$

On détermine l'intersection avec P en remplaçant dans l'équation du plan. On obtient

$$(1 + \lambda) - 2(7 - 2\lambda) + 4(3 + 4\lambda) = 5,$$

d'où $\lambda = 2/7$, ce qui donne le point H de coordonnées $\left(\frac{9}{7}, \frac{45}{7}, \frac{29}{7}\right)$. Alors

$$\|\vec{AH}\| = |\lambda| \|\vec{U}\| = \frac{2}{7} \sqrt{21}.$$

On retrouve cette valeur en utilisant la formule de l'exercice 3, 1)

$$d(A, P) = \frac{|x_A - 2y_A + 4z_A - 5|}{\|\vec{U}\|} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2}{7} \sqrt{21}.$$

Si S est le symétrique orthogonal de A par rapport à P , on écrit que le milieu du segment AS est H , ce qui donne

$$\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{9}{7}, \quad \frac{1}{2}(y + 7) = \frac{45}{7}, \quad \frac{1}{2}(z + 3) = \frac{29}{7},$$

d'où S a pour coordonnées $\left(\frac{11}{7}, \frac{41}{7}, \frac{37}{7}\right)$.

Exercice 22

Déterminer la projection orthogonale H du point $A(-1, 3, 2)$ sur le plan P d'équation $x - 2y + 2z = 6$ ainsi que le symétrique orthogonal S de A par rapport à P .

Solution

Le vecteur $\vec{U} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ est un vecteur directeur des normales au plan. La droite AH se paramètre donc par

$$\begin{cases} x &= \lambda - 1 \\ y &= -2\lambda + 3 \\ z &= 2\lambda + 2 \end{cases}.$$

On détermine l'intersection avec P en remplaçant dans l'équation du plan. On obtient

$$(-1 + \lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 6 ,$$

d'où $\lambda = 1$, ce qui donne le point H de coordonnées $(0, 1, 4)$.

Si S est le symétrique orthogonal de A par rapport à P , on écrit que le milieu du segment AS est H , ce qui donne

$$\frac{1}{2}(x - 1) = 0 \quad , \quad \frac{1}{2}(y + 3) = 1 \quad , \quad \frac{1}{2}(z + 2) = 4 ,$$

d'où S a pour coordonnées $(1, -1, 6)$.

Exercice 23

Déterminer la projection orthogonale H du point $A(1, 2, -1)$ sur la droite D définie par le point $B(3, 2, 1)$ et le vecteur directeur $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, ainsi que le symétrique orthogonal S de A par rapport à D . Quelle est la distance de A à D ?

Le plan passant par A et orthogonal à D a pour équation

$$x + y + 2z = x_A + y_A + 2z_A = 1 .$$

La droite D est paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \lambda + 3 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= 2\lambda + 1 \end{cases} .$$

On détermine l'intersection avec P en remplaçant dans l'équation du plan. On obtient

$$(3 + \lambda) + (2 + \lambda) + 2(1 + 2\lambda) = 1 ,$$

d'où $\lambda = -1$, ce qui donne le point H de coordonnées $(2, 1, -1)$.

Si S est le symétrique orthogonal de A par rapport à D , on écrit que le milieu du segment AS est H , ce qui donne

$$\frac{1}{2}(x + 1) = 2 \quad , \quad \frac{1}{2}(y + 2) = 1 \quad , \quad \frac{1}{2}(z - 1) = -1 ,$$

d'où S a pour coordonnées $(3, 0, -1)$.

Alors

$$d(A, D) = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2} .$$

Exercice 24

Soit le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $2x - y + 5z = 0$ et le vecteur $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

- 1) Trouver les vecteurs orthogonaux à $\vec{P}$.
- 2) Trouver les vecteurs de $\vec{P}$ orthogonaux à $\vec{V}$.
- 3) A quelle condition les vecteurs de $\vec{P}$ peuvent-ils faire un angle θ donné compris entre 0 et π avec le vecteur $\vec{V}$?
- 4) Déterminer ces vecteurs pour la plus petite valeur de θ possible.
- 5) Chercher l'angle de $\vec{V}$ avec la droite orthogonale à $\vec{P}$. Que remarque-t-on ?
- 6) Déterminer les vecteurs lorsque $\theta = \pi/4$.

Solution

1) Les vecteurs orthogonaux à P sont les multiples de $\vec{W} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

2) Les vecteurs de $\vec{P}$ orthogonaux à $\vec{V}$ vérifient le système

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Ce sont les vecteurs d'une droite vectorielle. En additionnant ces équations il vient

$$3x + 6z = 0.$$

Alors si $z = 1$, on trouve $x = -2$ et $y = 1$. Le vecteur $-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite.

3) Un vecteur $\vec{U}$ de $\vec{P}$ fera un angle θ avec $\vec{V}$, si

$$(\vec{U} | \vec{V}) = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos \theta.$$

Le problème étant invariant par multiplication par un nombre $\lambda > 0$, cherchons un vecteur de module 1. Il doit vérifier le système

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + z = \sqrt{3} \cos \theta \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

En additionnant les deux premières lignes il vient, après simplification,

$$x = -2z + \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}$$

puis

$$y = z + 2 \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}.$$

Alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6z^2 + 5 \frac{\cos^2 \theta}{3} = 1.$$

L'équation de variable z a une solution si et seulement si

$$6z^2 = 1 - 5 \frac{\cos^2 \theta}{3} \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$|\cos \theta| \leq \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

4) Comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, l'angle est minimal lorsque le cosinus est maximal, c'est-à-dire

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

et dans ce cas $z = 0$, puis $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$. On a aussi

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

5) Si l'on calcule le cosinus de l'angle des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$, on obtient

$$\cos(\widehat{\vec{V}, \vec{W}}) = \frac{(\vec{V} | \vec{W})}{\|\vec{V}\| \|\vec{W}\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

On trouve donc un angle de $\pi/2 - \theta$. On a alors

$$(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) + (\widehat{\vec{V}, \vec{W}}) = (\widehat{\vec{U}, \vec{W}}) = \pi/2,$$

ce qui implique que les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont coplanaires.

6) Si $\theta = \pi/4$, le nombre z est racine de l'équation

$$6z^2 + \frac{5}{6} = 1,$$

ce qui donne $z = \pm 1/6$. On en tire les vecteurs générateurs de deux demi-droites dont les vecteurs répondent à la question

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{6}\right).$$

Exercice 25

Soit P et Q les plans d'équations respectives

$$x - 3y + z = 1 \quad \text{et} \quad 2x - y + 3z = 0.$$

et A le point de coordonnées $(1, 0, 3)$. Soit D la perpendiculaire à P passant par A . Trouver l'intersection de D et de Q .

Solution

Un vecteur directeur de D est $\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. La droite est paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \lambda + 1 \\ y &= -3\lambda \\ z &= \lambda + 3 \end{cases}.$$

En remplaçant dans l'équation de Q , on trouve

$$2(\lambda + 1) + 3\lambda + 3(\lambda + 3) = 0,$$

ce qui donne $\lambda = -11/8$. Les coordonnées de l'intersection sont donc $\left(-\frac{3}{8}, \frac{33}{8}, \frac{13}{8}\right)$.

Exercice 26

Soit $A(1, 0, 4)$, $B(2, 1, 3)$, $C(1, 4, 1)$, $D(2, 1, 5)$, $E(0, 1, 2)$, cinq points de A_3 et Δ la perpendiculaire au plan BCD passant par A . Trouver l'intersection de Δ et du plan CDE .

Solution

Un vecteur directeur $\vec{U}$ de Δ est colinéaire à $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DB}$. On a

$$\overrightarrow{DC} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DB} = -2\vec{k},$$

donc

$$\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j}.$$

On peut donc prendre

$$\vec{U} = 3\vec{i} + \vec{j}.$$

La droite Δ est alors paramétrée par

$$\begin{cases} x &= 3\lambda + 1 \\ y &= \lambda \\ z &= 4 \end{cases}.$$

Le point M de Δ appartient au plan CDE si et seulement si le système $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ est lié. On obtient

$$\overrightarrow{DM} = (3\lambda - 1)\vec{i} + (\lambda - 1)\vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = -2\vec{i} - 3\vec{k},$$

et l'on écrit que le déterminant est nul

$$\det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \begin{vmatrix} 3\lambda - 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -9(3\lambda - 1) + 5(\lambda - 1) - 6 = -2(11\lambda + 1).$$

On trouve $\lambda = -1/11$ et le point cherché a pour coordonnées $\left(\frac{8}{11}, -\frac{1}{11}, 4\right)$.

Exercice 27

1) Soit une droite D définie par le point A et le vecteur $\vec{U}$ et une droite D' définie par le point A' et le vecteur $\vec{U}'$. Montrer que si les deux droites ne sont pas parallèles, il existe un unique point H sur D et un unique point H' sur D' tels que

$$d(D, D') = \|\overrightarrow{HH'}\|.$$

Que peut-on dire des points H et H' ?

2) Déterminer $d(D, D')$ lorsque $A(1, 2, -1)$, $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $A'(1, 0, 2)$, $\vec{U}' = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Solution

1) Un point M de D et un point M' de D' vérifient les relations

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{U} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'M'} = \lambda' \vec{U}'.$$

On a donc

$$\|\overrightarrow{M'M}\|^2 = \|\lambda \vec{U} - \lambda' \vec{U}' + \overrightarrow{A'A}\|^2 = (\lambda \vec{U} - \lambda' \vec{U}' + \overrightarrow{A'A} | \lambda \vec{U} - \lambda' \vec{U}' + \overrightarrow{A'A}).$$

Cette expression est minimale lorsque les dérivées partielles par rapport à λ et λ' sont nulles. Cela donne deux équations

$$(\lambda \vec{U} - \lambda' \vec{U}' + \overrightarrow{A'A} | \vec{U}) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda \vec{U} - \lambda' \vec{U}' + \overrightarrow{A'A} | \vec{U}') = 0.$$

Ces deux équations s'écrivent encore

$$(\overrightarrow{M'M} | \vec{U}) = 0 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M'M} | \vec{U}') = 0,$$

et les points H et H' pour lesquels on a un minimum sont tels que la droite HH' soit orthogonale à la fois à D et à D' .

Le système obtenu devient

$$\begin{cases} \lambda \|\vec{U}\|^2 - \lambda' (\vec{U} | \vec{U}') &= (\overrightarrow{AA'} | \vec{U}) \\ \lambda (\vec{U} | \vec{U}') - \lambda' \|\vec{U}'\|^2 &= (\overrightarrow{AA'} | \vec{U}') \end{cases}.$$

Son déterminant vaut

$$\Delta = -\|\vec{U}\|^2 \|\vec{U}'\|^2 + (\vec{U} | \vec{U}')^2.$$

Lorsque les droites D et D' ne sont pas parallèles, le déterminant est non nul et il existe une solution et une seule.

2) Les droites D et D' sont paramétrées par

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -\lambda' + 1 \\ y = 2\lambda' \\ z = \lambda' + 2 \end{cases},$$

et donc

$$\overrightarrow{HH'} = (-\lambda' - \lambda) \vec{i} + (2\lambda' - \lambda - 2) \vec{j} + (\lambda' - 2\lambda + 3) \vec{k}.$$

Ecrivons que $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ cela donne un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} (\overrightarrow{HH'} | \vec{U}) = 3\lambda' - 6\lambda + 4 = 0 \\ (\overrightarrow{HH'} | \vec{U'}) = 6\lambda' - 3\lambda - 1 = 0 \end{cases}.$$

On obtient

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{2}{3},$$

d'où H et H' ont pour coordonnées respectives $(2, 3, 1)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

Alors

$$\overrightarrow{HH'} = -\frac{5}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}),$$

et

$$d(D, D') = \|\overrightarrow{HH'}\| = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 28

Soit les points $A(1, 3, 0)$, $B(2, 1, 4)$, $C(3, 1, 4)$. Calculer l'aire du triangle ABC et la distance de A à la droite BC .

Solution

On a

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{i},$$

donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Alors

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{5}.$$

Cette norme donne l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. L'aire du triangle ABC est la moitié de celle-ci. Donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{5}.$$

Alors, d'après l'exercice 4

$$d(A, BC) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|}{\|\vec{BC}\|} = 2\sqrt{5}.$$

Exercice 29

Calculer la distance de la parabole C d'équation $y = x^2$ tracée dans le plan d'équation $z = 0$ au plan P d'équation $x + 3y - z + 1 = 0$. Déterminer les points de C et de P pour lesquels cette distance est atteinte.

Solution

Soit M un point de la parabole de coordonnées $(x, x^2, 0)$. La distance de M au plan P est donnée, d'après la formule de l'exercice 3, 1), par

$$d(M, P) = \frac{|x + 3x^2 + 1|}{\sqrt{11}}.$$

Comme $3x^2 + x + 1$ est toujours positif, on a donc

$$d(M, P) = f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{\sqrt{11}}.$$

et la distance est minimale, lorsque f' s'annule, c'est-à-dire pour $x = -1/6$, ce qui donne

$$d(C, P) = f(-1/6) = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Le point de la parabole où la distance minimale est obtenue est le point A de coordonnées $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, 0\right)$.

La droite orthogonale à P passant par A est paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \lambda - \frac{1}{6} \\ y &= 3\lambda + \frac{1}{36} \\ z &= -\lambda \end{cases}.$$

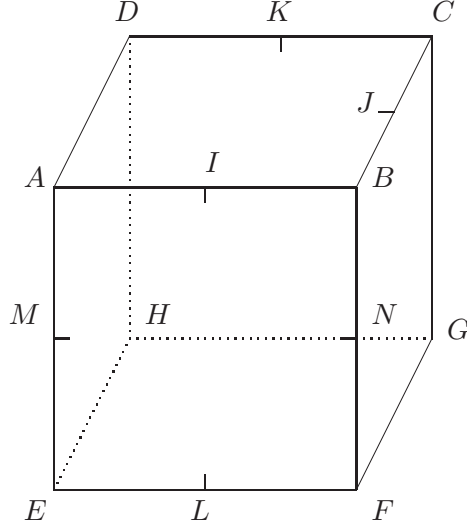
L'intersection de cette droite avec le plan est obtenue en remplaçant dans l'équation de P , donc

$$x + 3y - z + 1 = \lambda - \frac{1}{6} + 9\lambda + \frac{1}{12} + \lambda + 1 = 11\lambda + \frac{11}{12} = 0,$$

d'où $\lambda = -1/12$. Le point B du plan où la distance minimale est obtenue a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{12}\right)$.

Exercice 30 Exercices dans un cube

La figure ci-contre représente un cube de côté a .



On supposera dans la suite que le repère orthonormé direct de A_3 choisi est $(H, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{HE}$, $\vec{j}$ à $\overrightarrow{HG}$ et $\vec{k}$ à $\overrightarrow{HD}$.

Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AF} | \overrightarrow{BH})$. Qu'en déduit-on pour les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BH}$?

Solution

Les points A, B, F, H ont pour coordonnées respectives $(a, 0, a)$, (a, a, a) , $(a, a, 0)$ et $(0, 0, 0)$. Donc

$$\overrightarrow{AF} = a\vec{j} - a\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} = -a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k},$$

et le produit scalaire $(\overrightarrow{AF} | \overrightarrow{BH})$ est nul. Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont donc orthogonaux.

Calculer la distance de A à la droite DF .

Solution

Le point D a pour coordonnées $(0, 0, a)$. On a

$$\overrightarrow{AD} = -a\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = a\vec{i} + a\vec{j} - a\vec{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ a & a & -a \end{vmatrix} = -a^2 \vec{j} - a^2 \vec{k}.$$

D'où, avec la formule de l'exercice 4,

$$d(A, DF) = \frac{\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{DF}\|}{\|\overrightarrow{DF}\|} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

Calculer la distance de I à la droite ND .

Solution

Les points I et N ont pour coordonnées respectives $(a, a/2, a)$ et $(a, a, a/2)$. On a

$$\overrightarrow{IN} = \frac{a}{2} \vec{j} - \frac{a}{2} \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ND} = -a \vec{i} - a \vec{j} + \frac{a}{2} \vec{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{IN} \wedge \overrightarrow{ND} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a/2 & -a/2 \\ -a & -a & a/2 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{4} \vec{i} - \frac{a^2}{2} \vec{j} + \frac{a^2}{2} \vec{k}.$$

D'où, avec la formule de l'exercice 4,

$$d(I, ND) = \frac{\|\overrightarrow{IN} \wedge \overrightarrow{ND}\|}{\|\overrightarrow{ND}\|} = \frac{3a^2/4}{3a/2} = \frac{a}{2}.$$

Calculer la distance de M à la droite DF .

Solution

Le point M a pour coordonnées $(a, 0, a/2)$. On a

$$\overrightarrow{MD} = -a \vec{i} + \frac{a}{2} \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = a \vec{i} + a \vec{j} - \frac{a}{2} \vec{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & a/2 \\ a & a & -a \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{2} \vec{i} - \frac{a^2}{2} \vec{j} - a^2 \vec{k}.$$

D'où, avec la formule de l'exercice 4,

$$d(M, DF) = \frac{\|\overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{DF}\|}{\|\overrightarrow{DF}\|} = \frac{\sqrt{3}a^2/2}{\sqrt{3}a} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Calculer la distance de M à la droite NK .

Solution

Le point K a pour coordonnées $(0, a/2, a)$. On a

$$\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NK} = -a\overrightarrow{i} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} + \frac{a}{2}\overrightarrow{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{NK} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & a & 0 \\ -a & -a/2 & a/2 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}\overrightarrow{i} + a^2\overrightarrow{k}.$$

D'où, avec la formule de l'exercice 4,

$$d(M, NK) = \frac{\|\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{NK}\|}{\|\overrightarrow{NK}\|} = \frac{\sqrt{5}a^2/2}{\sqrt{3}a/\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}a.$$

Calculer l'aire du triangle IDF .

Solution

On a

$$\overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{i} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IF} = \frac{a}{2}\overrightarrow{j} - a\overrightarrow{k},$$

d'où

$$\overrightarrow{ID} \wedge \overrightarrow{IF} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -a & -a/2 & 0 \\ 0 & a/2 & -a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}\overrightarrow{i} - a^2\overrightarrow{j} - \frac{a^2}{2}\overrightarrow{k}.$$

Alors

$$\|\overrightarrow{ID} \wedge \overrightarrow{IF}\| = \sqrt{\frac{3}{2}}a^2,$$

et

$$\mathcal{A}_{IDF} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{ID} \wedge \overrightarrow{IF}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}a^2.$$

Calculer la distance de F à la droite ID .

Solution

On a, avec la formule de l'exercice 4,

$$d(F, ID) = \frac{\|\overrightarrow{FI} \wedge \overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{ID}\|} = \frac{\sqrt{3}a^2/\sqrt{2}}{\sqrt{5}a/2} = \sqrt{\frac{6}{5}}a.$$

Calculer la distance de I au plan AKN .

Solution

On a

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{a}{2}\overrightarrow{j} \quad , \quad \overrightarrow{AK} = -a\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\overrightarrow{j} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = a\overrightarrow{j} - \frac{a}{2}\overrightarrow{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AN} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -a & a/2 & 0 \\ 0 & a & -a/2 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{4}\overrightarrow{i} - \frac{a^2}{2}\overrightarrow{j} - a^2\overrightarrow{k}.$$

Puis

$$\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{IA} | \overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AN}) = \frac{a^3}{4},$$

et enfin, d'après l'exercice 3,

$$d(I, AKN) = \frac{|\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AN})|}{\|\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AN}\|} = \frac{a^3/4}{\sqrt{21}a^2/4} = \frac{a}{\sqrt{21}}.$$

Calculer la distance de J au plan IKG .

Solution

Le point J a pour coordonnées $(a/2, a, a)$, donc

$$\overrightarrow{JI} = \frac{a}{2}\overrightarrow{i} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} \quad , \quad \overrightarrow{IK} = -a\overrightarrow{i} \quad , \quad \overrightarrow{IG} = -a\overrightarrow{i} + \frac{a}{2}\overrightarrow{j} - a\overrightarrow{k}.$$

Alors

$$\overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{IG} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -a & 0 & 0 \\ -a & a/2 & -a \end{vmatrix} = -a^2\overrightarrow{j} - \frac{a^2}{2}\overrightarrow{k}.$$

$$\det(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IG}) = (\overrightarrow{JI} | \overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{IG}) = \frac{a^3}{2},$$

et enfin, d'après l'exercice 3,

$$d(J, IKG) = \frac{|\det(\vec{JI}, \vec{IK}, \vec{IG})|}{\|\vec{IK} \wedge \vec{IG}\|} = \frac{a^3/2}{\sqrt{5} a^2/2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Soit un point $P(x, y, z)$. Calculer l'aire du triangle PML . Lorsque P décrit le segment DC quand l'aire de PML est-elle maximale ? minimale ?

Solution

Le point L a pour coordonnées $(a, a/2, 0)$, donc

$$\vec{ML} = \frac{a}{2} \vec{j} - \frac{a}{2} \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{PM} = (a-x) \vec{i} - y \vec{j} + \left(\frac{a}{2} - z\right) \vec{k}.$$

$$\begin{aligned} \vec{PM} \wedge \vec{ML} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a-x & -y & -z+a/2 \\ 0 & a/2 & -a/2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{a}{2}y + \frac{a}{2}\left(z - \frac{a}{2}\right)\right) \vec{i} + \frac{a}{2}(a-x) \vec{j} + \frac{a}{2}(a-x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Alors l'aire du triangle PML vaut

$$\frac{1}{2} \|\vec{PM} \wedge \vec{ML}\| = \frac{a}{4} \left(\left(y + z - \frac{a}{2}\right)^2 + 2(x-a)^2 \right)^{1/2}.$$

Sur le segment DC , on a $x = 0$ et $z = a$, et l'aire du triangle PML vaut donc

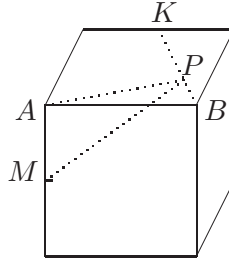
$$\frac{1}{2} \|\vec{PM} \wedge \vec{ML}\| = \frac{a}{4} \left(y^2 + ay + \frac{9a^2}{4} \right)^{1/2}.$$

On obtient ainsi une fonction croissante de y sur $[0, a]$.

Le minimum est obtenu si $y = 0$, c'est-à-dire lorsque P est en D et l'aire vaut alors $3a^2/8$.

Le maximum est obtenu si $y = a$, c'est-à-dire lorsque P est en C et l'aire vaut alors $\sqrt{17} a^2/8$.

Comment choisir un point P sur le segment KB pour que la pente de la droite MP soit maximale ?



Solution

Appelons θ l'angle des droites PA et PM . En remarquant que le triangle MAP est rectangle en A , on a donc

$$\tan \theta = \frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{a/2}{\|\overrightarrow{AP}\|}.$$

L'angle θ est maximal lorsque $\|\overrightarrow{AP}\|$ est minimal, c'est-à-dire lorsque P est la projection de A sur la droite BK .

On a

$$\overrightarrow{KB} = a\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j},$$

et le vecteur $\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ est un vecteur directeur de la droite KB . Le plan orthogonal à KB passant par A a pour équation

$$x + \frac{y}{2} = x_A + \frac{y_A}{2} = a.$$

La droite est paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \frac{\lambda}{2} + \frac{a}{2} \\ z &= a \end{cases}.$$

L'intersection de ce plan avec la droite vérifie donc

$$\lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{a}{2} \right) - a = 0,$$

d'où l'on tire $\lambda = 3a/5$, et l'on trouve le point P de coordonnées $\left(\frac{3a}{5}, \frac{4a}{5}, a\right)$.

Calculer le volume du tétraèdre $DBEG$.

Solution

Le volume du tétraèdre est le sixième du volume de parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}).$$

Or

$$\overrightarrow{DB} = a\vec{i} + a\vec{j}, \quad \overrightarrow{DE} = a\vec{i} - a\vec{k}, \quad \overrightarrow{DG} = a\vec{j} - a\vec{k},$$

d'où

$$\det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}) = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} = 2a^3,$$

donc

$$\mathcal{V} = \frac{a^3}{3}.$$

Comment choisir un point P sur le segment AD pour que le volume du tétraèdre $PICF$ soit maximal ? minimal ? Quel est le point du segment AD le plus proche du plan ICF ?

Solution

Le point P a pour coordonnées $(x, 0, a)$. On a

$$\overrightarrow{CP} = x\vec{i} - a\vec{j}, \quad \overrightarrow{CI} = a\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j}, \quad \overrightarrow{CF} = a\vec{i} - a\vec{k},$$

d'où

$$\det(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CF}) = \begin{vmatrix} x & -a & 0 \\ a & -a/2 & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix} = x \frac{a^2}{2} - a^3 = \frac{a^2}{2} (x - 2a).$$

Sur le segment AD , on a $0 \leq x \leq a$, donc

$$\mathcal{V} = \frac{a^2}{12} (2a - x).$$

Le maximum est obtenu en $x = 0$, c'est-à-dire quand P est en D , et vaut $a^3/6$, et le minimum en $x = a$, c'est-à-dire quand P est en A , et vaut $a^3/12$.

Puisque la base ICF est constante, le volume minimum correspond à la hauteur minimum. Le point le plus proche du plan ICF est donc A .

Chapitre 2

PRODUIT SCALAIRE

2.1 Généralités

Exercice 31

A quelle condition définit-on un produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$ en posant, si $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$,

$$(X | X') = a \bar{x}x' + b \bar{y}x' + b' \bar{x}y' + c \bar{y}y' ?$$

Solution

Tout d'abord

$$(X | X') - \overline{(X' | X)} = (a - \bar{a})\bar{x}x' + (b' - \bar{b})\bar{x}y' + (b - \bar{b}')\bar{y}x' + (c - \bar{c})\bar{y}y'.$$

Cette expression doit être nulle quels que soient X et X' . En prenant $X = X' = (1, 0)$, on trouve $a - \bar{a} = 0$, et en prenant $X = X' = (0, 1)$, on obtient cette fois $c - \bar{c} = 0$. Donc a et c sont réels. Enfin, en prenant $X = (1, 0)$ et $X' = (0, 1)$ on obtient $b' - \bar{b} = 0$.

Si l'on a ces conditions, alors,

$$(X | X') = a \bar{x}x' + b \bar{y}x' + \bar{b} \bar{x}y' + c \bar{y}y',$$

avec a et c réels et, dans ce cas,

$$(X | X') = \overline{(X' | X)}.$$

En confondant X avec la matrice $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on a encore

$$(X | X') = {}^t \bar{X} A X'$$

où

$$A = \begin{bmatrix} a & \bar{b} \\ b & c \end{bmatrix}.$$

On constate que

$${}^t\overline{A} = A.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(X) = X^2 - (a + c)X + ac - |b|^2.$$

Son discriminant

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - |b|^2) = (a - c)^2 + 4|b|^2$$

est positif et le polynôme a deux racines réelles λ et μ . En dehors du cas $A = aI$, les racines sont distinctes. Si V et W sont des vecteurs propres associés à λ et μ respectivement, on a

$$(V | W) = {}^t\overline{V}AW = {}^t\overline{V}(\mu W) = \mu {}^t\overline{V}W,$$

et aussi

$$(V | W) = {}^t\overline{V}{}^t\overline{A}W = {}^t\overline{A}VW = {}^t\overline{\lambda}VW = \lambda {}^t\overline{V}W.$$

Il en résulte que ${}^t\overline{V}W$ est nul. Alors (V, W) constitue une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$, et on peut choisir les vecteurs de norme 1, pour le produit scalaire usuel. Lorsque $A = aI$, on prend n'importe quelle base orthonormée. On a alors

$$(V | V) = \lambda \quad \text{et} \quad (W | W) = \mu.$$

En écrivant dans cette base

$$X = \alpha V + \beta W \quad \text{et} \quad X' = \alpha' V + \beta' W,$$

on obtient

$$(X | X') = \lambda \overline{\alpha} \alpha' + \mu \overline{\beta} \beta'.$$

En particulier

$$(X | X) = \lambda |\alpha|^2 + \mu |\beta|^2.$$

Alors, cette expression est toujours strictement positive si et seulement si λ et μ sont strictement positifs. Puisque

$$\lambda + \mu = a + c \quad \text{et} \quad \lambda \mu = ac - |b|^2,$$

la condition équivaut à

$$a + c > 0 \quad \text{et} \quad ac - |b|^2 > 0.$$

Alors

$$ac > |b|^2 \geq 0,$$

donc a , c , $a + c$ sont de même signe, et la condition devient

$$a > 0 \quad \text{et} \quad ac > |b|^2.$$

Finalement, on obtient un produit scalaire si et seulement si a et c sont des réels strictement positifs, $b' = \overline{b}$ et $ac > |b|^2$.

Dans le cas réel, la condition est que a et c soient des réels strictement positifs, $b' = b$ et $ac > b^2$.

Exercice 32

Soit E un espace euclidien réel et f un endomorphisme de E . Soit B l'application définie sur E^2 par

$$B(X, Y) = (f(X) | f(Y)).$$

A quelle condition B est-elle un produit scalaire sur E ?

Solution

L'application B est linéaire symétrique et

$$B(X, X) = (f(X) | f(X)) \geq 0.$$

Si cette expression est nulle, on en déduit que $f(X)$ est nul. On aura un produit scalaire si et seulement si $f(X) = 0$ implique $X = 0$, c'est-à-dire si et seulement si f est injective.

Exercice 33

Soit E un espace vectoriel réel et B une application bilinéaire définie sur E^2 qui soit telle que, pour tout X non nul $B(X, X)$ soit strictement positif. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$(X | Y) = \frac{1}{2} (B(X, Y) + B(Y, X)).$$

Solution

L'application est alors bilinéaire symétrique et

$$(X | X) = B(X, X) > 0$$

si X est non nul.

Exercice 34

Soit E un espace euclidien de dimension finie n et ℓ une forme linéaire sur E . Montrer qu'il existe un unique vecteur e tel que, pour tout X de E ,

$$\ell(X) = (e | X).$$

En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, muni du produit vectoriel rendant la base canonique orthonormée, montrer que le résultat précédent est faux pour la forme linéaire $\ell : P \rightarrow P(1)$.

Solution

Le noyau de ℓ est un sous-espace de dimension $n - 1$ de E . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit une base de $\text{Ker } \ell$. Alors, pour tout vecteur X de E ,

$$X = \sum_{k=1}^n (e_k | X) e_k ,$$

et, puisque $\ell(e_k)$ est nul si $1 \leq k \leq n - 1$, on obtient

$$\ell(X) = (e_n | X) \ell(e_n) .$$

Donc, si l'on pose

$$e = \overline{\ell(e_n)} e_n ,$$

on a

$$\ell(X) = (e | X) .$$

S'il existe deux vecteurs e et f tels que, pour tout X ,

$$\ell(X) = (e | X) = (f | X) ,$$

alors, pour tout X ,

$$(e - f | X) = 0 ,$$

et $e - f$ est orthogonal à E donc est nul. Il en résulte l'unicité.

S'il existait un polynôme

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

tel que, pour tout polynôme P ,

$$P(1) = (P | Q) ,$$

en prenant $P = X^n$, on aurait, pour tout entier n ,

$$1 = (X^n | Q) = a_n .$$

Donc Q ne serait pas un polynôme, d'où une contradiction.

Exercice 35

Soit E une espace euclidien réel. Soit a et b dans E et $m = \frac{a+b}{2}$. Soit x dans E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) $\|x - a\| = \|x - b\|$;
- ii) $x - m$ est orthogonal à $a - b$.

Solution

On a

$$\begin{aligned}
 (x - m | a - b) &= (x | a - b) - \frac{1}{2} (a + b | a - b) \\
 &= (x | a) - (x | b) - \frac{1}{2} \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|b\|^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\|b\|^2 - 2(x | b) + \|x\|^2) - \frac{1}{2} (\|a\|^2 - 2(x | a) + \|x\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\|x - b\|^2 - \|x - a\|^2) .
 \end{aligned}$$

Donc, le produit scalaire $(x - m | a - b)$ est nul si et seulement si $\|x - a\| = \|x - b\|$.

Exercice 36

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Soit $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ une famille de formes linéaires sur E . A quelle condition définit-on un produit scalaire sur E en posant

$$(X | Y) = \sum_{k=1}^r \ell_k(X) \ell_k(Y) ?$$

2) On suppose que $k = n$ et que $(X | Y)$ est un produit scalaire. Quelle base orthonormée obtient-on de manière naturelle pour ce produit scalaire ?

Solution

1) On obtient une forme bilinéaire de manière évidente, et

$$(X | X) = \sum_{k=1}^r \ell_k(X)^2 \geq 0 .$$

Lorsque cette expression est nulle, on a alors $\ell_k(X) = 0$ qui est nul pour tout k . Ceci donne un système homogène de r équations à n inconnues. Ce système a une solution unique si et seulement si il est de rang n et la solution est nulle dans ce cas. Donc on obtient un produit scalaire si et seulement si le rang du système de formes linéaires vaut n . En particulier on doit donc avoir $r \geq n$.

2) Comme le système de n formes linéaires est de rang n , il possède une base duale $(V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs de E . On a donc

$$\ell_i(V_j) = \delta_{ij} .$$

Alors la base est automatiquement une base orthonormée pour le produit scalaire. En effet

$$(V_i | V_j) = \sum_{k=1}^r \ell_k(V_i) \ell_k(V_j) = \sum_{k=1}^r \delta_{ki} \delta_{kj} .$$

Lorsque $i \neq j$, tous les termes de la somme sont nuls et

$$(V_i | V_j) = 0.$$

Lorsque $i = j$ un seul terme est non nul lorsque $k = i = j$ et donc

$$(V_i | V_i) = \delta_{ii}\delta_{ii} = 1.$$

La base $(V_1, \dots, V_n)$ est bien orthonormée.

Exercice 37

Soit E un espace euclidien complexe. On peut considérer aussi E comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ que l'on notera $\mathcal{E}$.

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ en posant

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re}(X | Y),$$

et que, si X et Y sont orthogonaux dans E , ils le sont aussi dans $\mathcal{E}$.

2) On suppose E de dimension n . Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , alors $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

3) On prend $E = \mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire usuel. Trouver une base orthonormée de l'orthogonal de $(1, i)$ dans E , puis dans $\mathcal{E}$.

Solution

1) Si λ est un nombre réel

$$\langle X, \lambda Y \rangle = \operatorname{Re}(X | \lambda Y) = \operatorname{Re}(\lambda(X | Y)) = \lambda \operatorname{Re}(X | Y) = \lambda \langle X, Y \rangle.$$

et

$$\langle X, Y_1 + Y_2 \rangle = \operatorname{Re}(X | Y_1 + Y_2) = \operatorname{Re}((X | Y_1) + (X | Y_2)) = \operatorname{Re}(X | Y_1) + \operatorname{Re}(X | Y_2) = \langle X, Y_1 \rangle + \langle X, Y_2 \rangle.$$

On a donc la linéarité par rapport à la deuxième variable. De plus

$$\langle Y, X \rangle = \operatorname{Re}(Y | X) = \operatorname{Re}(\overline{(X | Y)}) = \operatorname{Re}(X | Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a donc une forme bilinéaire symétrique. Enfin

$$\langle X, X \rangle = \operatorname{Re}(X | X) = \|X\|^2.$$

Donc $\langle X, X \rangle$ est positif et s'annule si et seulement si X est nul. On a donc bien défini ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. De plus la norme d'un vecteur est la même dans E et dans $\mathcal{E}$.

Si X et Y sont orthogonaux dans E ,

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re}(X | Y) = \operatorname{Re} 0 = 0,$$

donc X et Y sont orthogonaux dans $\mathcal{E}$.

2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors, quels que soient les nombres complexes μ et ν et les indices k et ℓ distincts, μe_k et νe_ℓ sont orthogonaux dans E donc dans $\mathcal{E}$, et

$$\|e_k\| = \|ie_k\| = 1.$$

Par ailleurs

$$\langle e_k, ie_k \rangle = \operatorname{Re}(e_k | ie_k) = \operatorname{Re}(i(e_k | e_k)) = \operatorname{Re} i = 0.$$

Il en résulte que $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une famille orthonormée de vecteurs de $\mathcal{E}$.

Soit X un vecteur de $\mathcal{E}$. On le décompose dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k,$$

et, si l'on écrit, $\xi_k = \mu_k + i\nu_k$ où μ et ν sont réels, on obtient

$$X = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k + \sum_{k=1}^n \nu_k (ie_k),$$

ce qui montre que $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$. C'est donc une base orthonormée.

3) Cherchons l'ensemble F des vecteurs orthogonaux à $(1, i)$ dans E . Comme E est de dimension 2, l'ensemble est une droite vectorielle. Si $X = (x, y)$ est orthogonal à $(1, i)$, on a

$$0 = ((1, i) | (x, y)) = x - iy,$$

donc $X = (iy, y)$ et F est la droite vectorielle engendrée par $(i, 1)$. Une base orthonormée est alors constituée du vecteur

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (i, 1).$$

Cherchons l'ensemble $\mathcal{F}$ des vecteurs orthogonaux à $(1, i)$ dans $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est de dimension 4, l'ensemble est sous-espace de dimension 3. Si $X = (x, y)$ est orthogonal à $(1, i)$, on a

$$0 = \langle (1, i), (x, y) \rangle = \operatorname{Re}((1, i) | (x, y)) = \operatorname{Re}(x - iy) = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2) - i(y_1 + iy_2)) = x_1 + y_2,$$

où x_1, x_2, y_1, y_2 sont réels. Donc

$$X = (x_1 + ix_2, y_1 - ix_1) = x_1(1, -i) + x_2(i, 0) + y_1(0, 1),$$

et $\mathcal{F}$ est le sous-espace engendré par $(1, -i), (i, 0), (0, 1)$. Ces trois vecteurs sont orthogonaux dans $\mathcal{E}$. En effet, $(i, 0)$ et $(0, 1)$ sont orthogonaux dans E donc dans $\mathcal{E}$, et par ailleurs

$$\langle (1, -i), (i, 0) \rangle = \operatorname{Re}((1, -i) | (i, 0)) = \operatorname{Re} i = 0 \quad \text{et} \quad \langle (1, -i), (0, 1) \rangle = \operatorname{Re}((1, -i) | (0, 1)) = \operatorname{Re} i = 0.$$

En les normant, on obtient la base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathcal{F}$, où

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \quad , \quad u_2 = (i, 0) \quad u_3 = (0, 1) .$$

Remarquons que F est bien inclus dans $\mathcal{F}$.

Exercice 38

Soit E une algèbre réelle commutative d'élément neutre e et ℓ une forme linéaire sur E telle que $\ell(X^2)$ soit strictement positif pour tout X non nul de E et $\ell(e) = 1$.

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$(X | Y) = \ell(XY) ,$$

et que e est unitaire pour ce produit scalaire.

2) On définit une forme bilinéaire symétrique B en posant

$$B(X, Y) = (X - \ell(X)e | Y - \ell(Y)e) .$$

Cette forme est-elle un produit scalaire ?

3) Montrer que

$$B(X, Y) = \ell(XY) - \ell(X)\ell(Y) .$$

4) Donner un exemple où la situation de l'énoncé est réalisée.

Solution

1) La forme est bilinéaire symétrique, et par hypothèse $(X | X) = \ell(X^2)$ est strictement positif si X est non nul. C'est donc bien un produit scalaire.

De plus

$$(X | e) = \ell(Xe) = \ell(X) \quad \text{et} \quad (e | e) = \ell(e) = 1 .$$

2) La forme bilinéaire B est positive. Mais

$$Q(X) = \|X - \ell(X)e\|^2$$

s'annule lorsque

$$X = \ell(X)e ,$$

ce qui implique que X appartient à la droite vectorielle engendrée par e . Réciproquement, si l'on a

$$X = \lambda e$$

alors

$$\ell(X) = \lambda \ell(e) = \lambda ,$$

et donc

$$Q(X) = \|X - \ell(X)e\|^2 = \|X - \lambda e\|^2 = 0.$$

Donc B n'est pas un produit scalaire.

3) En développant,

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \ell((X - \ell(X)e)(Y - \ell(Y)e)) \\ &= \ell(XY + \ell(X)\ell(Y)e - \ell(X)Y - \ell(Y)X) \\ &= \ell(XY) + \ell(X)\ell(Y) - 2\ell(X)\ell(Y) \\ &= \ell(XY) - \ell(X)\ell(Y). \end{aligned}$$

4) Si l'on prend l'algèbre des fonctions continues sur $[0, 1]$, dont le neutre est la fonction constante 1 et si l'on pose

$$\ell(X) = \int_0^1 X(t) dt,$$

on est exactement dans les conditions de l'énoncé, puisque

$$\int_0^1 dt = 1,$$

et $\int_0^1 X(t)^2 dt$ est strictement positif si X n'est pas la fonction nulle.

On définit donc un produit scalaire sur E en posant

$$(X | Y) = \int_0^1 X(t)Y(t) dt.$$

Exercice 39 Déterminant de Gram

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des vecteurs d'un espace euclidien réel E . Les vecteurs $(X_1, \dots, X_k)$ engendrent un sous-espace F_k de E . On note $M(X_1, \dots, X_n)$ la matrice symétrique, appelée matrice de Gram, dont les coefficients sont $(X_i | X_j)$, et $G(X_1, \dots, X_n)$ son déterminant.

1) Montrer que si σ est une permutation de $(1, 2, \dots, n)$ alors

$$G(X_1, \dots, X_n) = G(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

2) Soit $V(X_1, \dots, X_n)$ la matrice des vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ dans une base orthonormée. Montrer que

$$M(X_1, \dots, X_n) = {}^tV(X_1, \dots, X_n)V(X_1, \dots, X_n).$$

En déduire que $G(X_1, \dots, X_n)$ est positif, et que $G(X_1, \dots, X_n)$ est nul si et seulement si le système $(X_1, \dots, X_n)$ est lié.

3) Montrer que si A est un vecteur orthogonal à F_n et si B appartient à F_n , alors

$$G(X_1, \dots, X_n, A + B) = \|A\|^2 G(X_1, \dots, X_n).$$

4) En déduire que si le système $(X_1, \dots, X_n)$ est libre,

$$d(X, F_n) = \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_n, X)}{G(X_1, \dots, X_n)}}.$$

5) On suppose que le système $(X_1, \dots, X_n)$ est libre. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la famille orthonormale construite à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ par le procédé de Schmidt. Montrer que

$$\|\mathcal{O}_i\| = d(X_i, F_{i-1}) = (X_i | E_i).$$

En déduire le déterminant de la matrice de passage P de la base $(E_1, \dots, E_n)$ à la base $(X_1, \dots, X_n)$.

6) On note $D_{ip}(X_1, \dots, X_p)$ le cofacteur de $(X_i | X_p)$ dans la matrice de Gram $M(X_1, \dots, X_p)$. Montrer que le coefficient de E_p sur X_i est

$$\frac{D_{ip}(X_1, \dots, X_p)}{\sqrt{G(X_1, \dots, X_p)G(X_1, \dots, X_{p-1})}}.$$

Solution

1) On passe du déterminant $G(X_1, \dots, X_n)$ au déterminant $G(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ en appliquant la permutation σ à la fois aux lignes et aux colonnes de $G(X_1, \dots, X_n)$. On obtient donc le même déterminant, avec le même signe.

2) Si X_i a pour coordonnées dans une base orthonormée $(x_{1i}, \dots, x_{ni})$, on a alors

$$V(X_1, \dots, X_n) = [x_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si

$${}^tV(X_1, \dots, X_n)V(X_1, \dots, X_n) = [c_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n},$$

alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} = (X_i | X_j).$$

On a donc

$${}^tV(X_1, \dots, X_n)V(X_1, \dots, X_n) = M(X_1, \dots, X_n),$$

et en prenant le déterminant

$$(\det V(X_1, \dots, X_n))^2 = G(X_1, \dots, X_n),$$

donc $G(X_1, \dots, X_n)$ est positif. De plus $G(X_1, \dots, X_n)$ est nul si et seulement si $\det V(X_1, \dots, X_n)$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si le système $(X_1, \dots, X_n)$ est lié.

3) Remarquons tout d'abord, puisque A est orthogonal aux vecteurs $X_1, \dots, X_n$ et aussi à B , que

$$(A + B | X_j) = (B | X_j) \quad \text{et} \quad (A + B | A + B) = (A | A) + (B | B).$$

Alors

$$G(X_1, \dots, X_n, A + B) = \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_1 | X_n) & (X_1 | A + B) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (X_n | X_1) & \dots & (X_n | X_n) & (X_n | A + B) \\ (A + B | X_1) & \dots & (A + B | X_n) & (A + B | A + B) \end{vmatrix},$$

d'où

$$G(X_1, \dots, X_n, A + B) = \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_1 | X_n) & (X_1 | A + B) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (X_n | X_1) & \dots & (X_n | X_n) & (X_n | A + B) \\ (B | X_1) & \dots & (B | X_n) & (A | A) + (B | B) \end{vmatrix}.$$

Alors, en raison de la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne,

$$G(X_1, \dots, X_n, A + B) = \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_1 | X_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (X_n | X_1) & \dots & (X_n | X_n) & 0 \\ (B | X_1) & \dots & (B | X_n) & (A | A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_1 | X_n) & (X_1 | B) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (X_n | X_1) & \dots & (X_n | X_n) & (X_n | B) \\ (B | X_1) & \dots & (B | X_n) & (B | B) \end{vmatrix}.$$

Mais, puisque le système $(X_1, \dots, X_n, B)$ est lié, le second déterminant, qui n'est autre que $G(X_1, \dots, X_n, B)$, est nul et le premier se développe par rapport à la dernière colonne, ce qui donne

$$G(X_1, \dots, X_n, A + B) = \|A\|^2 \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_1 | X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (X_n | X_1) & \dots & (X_n | X_n) \end{vmatrix} = \|A\|^2 G(X_1, \dots, X_n).$$

4) Si la projection orthogonale de X_n sur le sous-espace F_{n-1} est B , alors le vecteur $A = X_n - B$ est orthogonal aux vecteurs de F_{n-1} et il résulte de la formule précédente que

$$G(X_1, X_2, \dots, X_n) = \|A\|^2 G(X_1, \dots, X_{n-1}).$$

Si le système $(X_1, \dots, X_n)$ est libre alors $G(X_1, \dots, X_n)$ est strictement positif. Si maintenant on projette un vecteur X orthogonalement sur F_n , alors

$$G(X_1, \dots, X_n, X) = \|X - \text{pr}_{F_n}(X)\|^2 G(X_1, \dots, X_n) = d(X, F_n)^2 G(X_1, \dots, X_n),$$

d'où la formule

$$d(X, F_n) = \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_n, X)}{G(X_1, \dots, X_n)}}.$$

5) Le procédé de Schmidt construit des vecteurs $(E_1, \dots, E_n)$ tels que, pour tout $i \leq n$ le système $(E_1, \dots, E_i)$ engendre aussi F_i . On construit le vecteur $\mathcal{E}_i$ tel que $X_i - \mathcal{E}_i$ soit la projection de X_i sur F_{i-1} , et donc

$$d(X_i, F_{i-1}) = \|\mathcal{E}_i\|,$$

puis on norme $\mathcal{E}_i$, ce qui donne finalement

$$X_i = \sum_{k=1}^{i-1} (X_i | E_k) E_k + \|\mathcal{E}_i\| E_i,$$

d'où

$$(X_i | E_i) = \|\mathcal{E}_i\|.$$

La matrice de passage P de la base $(E_1, \dots, E_n)$ à la base $(X_1, \dots, X_n)$ a pour vecteurs colonnes les coordonnées de X_i dans la base $(E_1, \dots, E_n)$. C'est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $\|\mathcal{E}_i\|$ et

$$\det P = \prod_{i=1}^n \|\mathcal{E}_i\|.$$

Mais

$$\|\mathcal{E}_i\| = d(X_i, F_{i-1}) = \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_i)}{G(X_1, \dots, X_{i-1})}},$$

d'où

$$\det P = \sqrt{G(X_1, \dots, X_n)}.$$

6) Si l'on décompose E_p dans la base $(X_1, \dots, X_p)$, on a

$$E_p = \sum_{i=1}^p \lambda_{pi} X_i,$$

alors, si $1 \leq j \leq p$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_{pi} (X_i | X_j) = (E_p | X_j),$$

et cette somme est nulle si $p > j$. On obtient ainsi un système de p équations à p inconnues $(\lambda_{p1}, \dots, \lambda_{pp})$ qui s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_p | X_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (X_1 | X_p) & \dots & (X_p | X_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} \\ \vdots \\ \lambda_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E_p | X_1) \\ \vdots \\ (E_p | X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (E_p | X_p) \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de ce système n'est autre que $G(X_1, \dots, X_p)$. On a alors

$$\lambda_{pi} = \frac{\Delta_i}{G(X_1, \dots, X_p)},$$

où Δ_i est le déterminant obtenu en remplaçant dans $G(X_1, \dots, X_p)$ la i -ème colonne par le second membre

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_{i-1} | X_1) & 0 & (X_{i+1} | X_1) & \dots & (X_p | X_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_1 | X_{p-1}) & \dots & (X_{i-1} | X_{p-1}) & 0 & (X_{i+1} | X_{p-1}) & \dots & (X_p | X_{p-1}) \\ (X_1 | X_p) & \dots & (X_{i-1} | X_p) & (E_p | X_p) & (X_{i+1} | X_p) & \dots & (X_p | X_p) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la i -ème colonne, on trouve

$$\Delta_i = (E_p | X_p)(-1)^{i+p} \begin{vmatrix} (X_1 | X_1) & \dots & (X_{i-1} | X_1) & (X_{i+1} | X_1) & \dots & (X_p | X_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (X_1 | X_{p-1}) & \dots & (X_{i-1} | X_{p-1}) & (X_{i+1} | X_{p-1}) & \dots & (X_p | X_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui apparaît est le mineur de $(X_i | X_p)$ dans $G(X_1, \dots, X_p)$ et donc

$$\Delta_i = (E_p | X_p) D_{ip}(X_1, \dots, X_p).$$

Mais

$$(E_p | X_p) = \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_p)}{G(X_1, \dots, X_{p-1})}},$$

d'où

$$\lambda_{pi} = D_{ip}(X_1, \dots, X_p) \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_p)}{G(X_1, \dots, X_{p-1})}} \frac{1}{G(X_1, \dots, X_p)} = \frac{D_{ip}(X_1, \dots, X_p)}{\sqrt{G(X_1, \dots, X_p)G(X_1, \dots, X_{p-1})}}.$$

En particulier,

$$\lambda_{pp} = \sqrt{\frac{G(X_1, \dots, X_{p-1})}{G(X_1, \dots, X_p)}} = \frac{1}{\|\mathcal{E}_p\|},$$

ce qui est normal puisque, la matrice P^{-1} étant triangulaire, ses éléments diagonaux sont les inverses de ceux de P .

Exercice 40

Soit $(V_1, \dots, V_n)$ des vecteurs d'un espace euclidien de dimension n . Montrer que dans une base orthonormée

$$|\det(V_1, \dots, V_n)| \leq \|V_1\| \dots \|V_n\|.$$

Solution

Tout d'abord, si les vecteurs $(V_1, \dots, V_n)$ sont deux à deux orthogonaux et si A est la matrice de ces vecteurs dans une base orthonormée, alors le même calcul que dans l'exercice précédent montre que A^*A est la matrice diagonale

$$A^*A = \begin{bmatrix} \|V_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|V_n\|^2 \end{bmatrix},$$

et

$$|\det A|^2 = \det(A^*A) = \|V_1\|^2 \dots \|V_n\|^2,$$

d'où

$$|\det A| = \|V_1\| \dots \|V_n\|.$$

Soit maintenant $(V_1, \dots, V_n)$ un système quelconque. Si le système est lié le déterminant est nul est l'on a bien

$$|\det(V_1, \dots, V_n)| = 0 \leq \|V_1\| \dots \|V_n\|.$$

Si le système est libre on construit un système de vecteurs orthonormés par le procédé de Schmidt

$$\mathcal{E}_k = V_k - \sum_{j=1}^{k-1} (E_j | V_k) E_j \quad \text{et} \quad E_k = \frac{1}{\|\mathcal{E}_k\|} \mathcal{E}_k.$$

Le système $(E_1, \dots, E_{k-1})$ engendre le même sous-espace que $(V_1, \dots, V_{k-1})$. Alors le vecteur $\mathcal{E}_k$ est obtenu en ajoutant à V_k une combinaison linéaire des vecteurs $(E_1, \dots, E_{k-1})$ c'est-à-dire une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, \dots, V_{k-1}$ ce qui ne change pas le déterminant et il en résulte que

$$\det(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) = \det(V_1, \dots, V_n).$$

D'autre part

$$V_k = \mathcal{E}_k + \sum_{j=1}^{k-1} (E_j | V_k) E_j = \|\mathcal{E}_k\| E_k + \sum_{j=1}^{k-1} (E_j | V_k) E_j,$$

donc, puisque les vecteurs E_k forment une base orthonormée,

$$\|V_k\|^2 = \|\mathcal{E}_k\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (E_j | V_k)^2 \geq \|\mathcal{E}_k\|^2.$$

Alors

$$|\det(V_1, \dots, V_n)| = |\det(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)| = \|\mathcal{E}_1\| \dots \|\mathcal{E}_n\| \leq \|V_1\| \dots \|V_n\|,$$

d'où le résultat.

Exercice 41 Généralisation du produit vectoriel

Soit $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E réel de dimension $n \geq 1$, donnant l'orientation. Soit $(V_1, \dots, V_{n-1})$ une famille de $n-1$ vecteurs de E .

1) Montrer qu'il existe un vecteur unique

$$X = \Phi(V_1, \dots, V_{n-1})$$

tel que, pour tout Y de E ,

$$(X | Y) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y),$$

et que ce vecteur est le même dans toute base orthonormée directe.

2) Montrer que l'application Φ de E^{n-1} dans E ainsi définie possède les propriétés suivantes :

- (i) Φ est une application multilinéaire alternée ;
 - (ii) $\Phi(V_1, \dots, V_{n-1})$ est orthogonal à tous les vecteurs V_i ;
 - (iii) $\Phi(V_1, \dots, V_{n-1})$ est nul si et seulement si le système $(V_1, \dots, V_{n-1})$ est lié ;
 - (iv) Si le système $(V_1, \dots, V_{n-1})$ est libre, alors le système $(V_1, \dots, V_{n-1}, \Phi(V_1, \dots, V_{n-1}))$ est une base directe de E .
 - (v) $\|\Phi(V_1, \dots, V_{n-1})\|^2 = G(V_1, \dots, V_{n-1})$ (déterminant de Gram, voir exercice précédent).
 - (vi) Formellement, dans une base orthonormée directe $(E_1, \dots, E_n)$ de E , le vecteur $\Phi(V_1, \dots, V_{n-1})$ s'obtient en calculant le déterminant D dont les premières lignes sont les coordonnées des vecteurs V_i dans $\mathcal{B}$ et la dernière est $(E_1, \dots, E_n)$.
- 3) Qu'obtient-on lorsque E est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel ?
- 4) Calculer X pour les vecteurs $V_1 = (1, 1, 0, 0)$, $V_2 = (1, 0, 1, 1)$ et $V_3 = (1, 1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Solution

- 1) L'application qui à un vecteur Y de E associe $\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y)$ est une forme linéaire (voir ex. 34). Donc il existe un unique vecteur X tel que

$$(X | Y) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y).$$

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée directe, alors la matrice de passage est une matrice orthogonale de déterminant 1 et

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y) = \det_{\mathcal{B}'}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y).$$

Ce déterminant ne dépend donc pas de la base orthonormée directe choisie.

- 2) Etudions les propriétés de Φ .

- (i) Si l'on a, pour tout Y

$$(\Phi(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) | Y) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, Y)$$

et

$$(\Phi(W_1, V_2, \dots, V_{n-1}) | Y) = \det_{\mathcal{B}}(W_1, V_2, \dots, V_{n-1}, Y),$$

alors, d'après les propriétés du déterminant et du produit scalaire on obtient

$$(\lambda \Phi(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) + \Phi(W_1, V_2, \dots, V_{n-1}) | Y) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda V_1 + W_1, V_2, \dots, V_{n-1}, Y).$$

et par unicité

$$\lambda \Phi(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) + \Phi(W_1, V_2, \dots, V_{n-1}) = \Phi(\lambda V_1 + W_1, V_2, \dots, V_{n-1}),$$

ce qui montre la linéarité de Φ par rapport à la première variable. La même démonstration peut se faire pour n'importe quelle variable. De plus, si l'on permute les vecteurs V_i et V_j , on a, pour tout Y de E , en raison des propriétés du déterminant,

$$(\Phi(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_{n-1}) | Y) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_{n-1}, Y) = -\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_{n-1}, Y)$$

d'où

$$(\Phi(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_{n-1}) | Y) = -(\Phi(V_1, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_{n-1}) | Y) = (-\Phi(V_1, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_{n-1}) | Y),$$

et par unicité

$$\Phi(V_1, \dots, V_j, \dots, V_i, \dots, V_{n-1}) = -\Phi(V_1, \dots, V_i, \dots, V_j, \dots, V_{n-1}).$$

Donc Φ est alternée.

(ii) En particulier, on doit avoir

$$(X | V_i) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, V_i) = 0,$$

car le déterminant contient deux vecteurs égaux, et X est orthogonal à tous les vecteurs V_i .

(iii) et (iv) Si le système $(V_1, \dots, V_{n-1})$ est lié alors pour tout Y le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, Y)$ est nul, et par unicité X est nul.

Si le système est libre, on peut le compléter pour avoir une base directe $(V_1, \dots, V_n)$ de E . Alors

$$(X | V_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, V_n) > 0,$$

donc $(X | V_n)$ n'est pas nul et X non plus. De plus

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, X) = (X | X) = \|X\|^2 > 0,$$

et $(V_1, \dots, V_{n-1}, X)$ est une base directe de E .

(v) Si $(V_1, \dots, V_{n-1}, V_n)$ est un système de n vecteurs, dont la matrice dans une base orthonormée est V , alors le produit ${}^t V V$ est la matrice de Gram $M(V_1, \dots, V_n)$. Si l'on applique ceci au vecteur $V_n = \Phi(V_1, \dots, V_{n-1})$, on a alors

$${}^t V V = \begin{bmatrix} (V_1 | V_1) & \dots & (V_1 | V_{n-1}) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (V_{n-1} | V_1) & \dots & (V_{n-1} | V_{n-1}) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (V_n | V_n) \end{bmatrix}.$$

Donc, en prenant le déterminant,

$$(\det V)^2 = \|V_n\|^2 G(V_1, \dots, V_{n-1}).$$

Mais

$$\det V = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, V_n) = \|V_n\|^2.$$

On en déduit donc

$$\|V_n\|^4 = \|V_n\|^2 G(V_1, \dots, V_{n-1}).$$

Si le système $(V_1, \dots, V_{n-1})$ est libre alors V_n n'est pas nul et

$$\|V_n\|^2 = \|\Phi(V_1, \dots, V_{n-1})\|^2 = G(V_1, \dots, V_{n-1}),$$

ce qui reste vrai si le système est lié, car alors, les deux membres sont nuls.

(vi) Ecrivons X dans la base orthonormée directe $(E_1, \dots, E_n)$. On a

$$X = \sum_{k=1}^n (X | E_k) E_k = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_{n-1}, E_k) E_k,$$

et cette somme n'est autre que le développement du déterminant D par rapport à la dernière ligne.

3) Si $n = 2$ et $\mathcal{B} = (i, j)$, alors, si $X = ai + bj$, on a

$$\Phi(X) = \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} = -bi + aj.$$

Le vecteur $\Phi(X)$ est l'image de X par la rotation d'angle $\pi/2$.

Si $n = 3$ on retrouve dans $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel usuel

$$\Phi(V_1, V_2) = V_1 \wedge V_2.$$

4) D'après (iv)

$$X = \Phi(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la deuxième colonne de la première puis en développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ E_1 - E_2 & E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ E_1 - E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la troisième colonne aux deux autres, on trouve

$$X = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ E_1 - E_2 - E_4 & E_3 - E_4 & E_4 \end{vmatrix}.$$

Finalement, en développant par rapport à la première ligne,

$$X = -((E_4 - E_3) - (E_1 - E_2 - E_4)) = E_1 - E_2 + E_3 - 2E_4 = (1, -1, 1, -2).$$

On vérifie bien que ce vecteur est orthogonal aux autres.

Exercice 42

1) Dans $\mathbb{R}^n$, soit les vecteurs $V_j = (v_{1,j}, \dots, v_{n,j})$ où $1 \leq j \leq r$. Soit alors dans $\mathbb{R}^r$ les vecteurs $W_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,r})$ où $1 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe une relation linéaire

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j V_j = 0,$$

si et seulement si le vecteur $H = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^r$ à tous les vecteurs W_i .

2) On suppose que $r = n + 1$. Dédurre de l'exercice précédent que si le système $(V_1, \dots, V_{n+1})$ est de rang n , une relation linéaire non triviale entre les vecteurs V_j ($1 \leq j \leq n + 1$) est donnée par l'expression

$$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \det(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_{n+1}) V_j = 0,$$

ou encore, formellement, par

$$\begin{vmatrix} V_1 & \dots & V_j & \dots & V_{n+1} \\ v_{1,1} & \dots & v_{1,j} & \dots & v_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,j} & \dots & v_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

3) Trouver une relation linéaire non triviale entre les vecteurs

$$V_1 = (1, 2, 3) \quad , \quad V_2 = (1, -1, 2) \quad , \quad V_3 = (1, 2, 0) \quad , \quad V_4 = (2, -1, 1).$$

Solution

1) La relation linéaire

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j V_j = 0,$$

se traduit par les relations entre les coordonnées

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_{i,j} = 0,$$

pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, mais ceci s'écrit avec le produit scalaire dans $\mathbb{R}^r$

$$(H | W_i) = 0.$$

Donc H est orthogonal aux vecteurs W_i .

2) Lorsque $r = n + 1$, il existe nécessairement dans $\mathbb{R}^n$ une relation linéaire entre les $n + 1$ vecteurs $V_1, \dots, V_{n+1}$. Pour la trouver il suffit de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal aux n vecteurs

$W_1, \dots, W_n$ et, d'après l'exercice précédent, le vecteur $\Phi(W_1, \dots, W_n)$ répond à la question. Formellement, et au signe près, on a, si $(I_1, \dots, I_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$H = \begin{vmatrix} I_1 & \dots & I_j & \dots & I_{n+1} \\ v_{1,1} & \dots & v_{1,j} & \dots & v_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,j} & \dots & v_{n,n+1} \end{vmatrix},$$

soit, en développant,

$$H = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \det(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_{n+1}) I_j.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \det(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_{n+1}) V_j = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} V_1 & \dots & V_j & \dots & V_{n+1} \\ v_{1,1} & \dots & v_{1,j} & \dots & v_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,j} & \dots & v_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Puisque le système $(V_1, \dots, V_{n+1})$ est de rang n , un des déterminants $\det(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_{n+1})$ n'est pas nul, donc la relation n'est pas triviale.

3) On a donc

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On calcule le déterminant en combinant la première colonne aux autres

$$\begin{vmatrix} V_1 & V_2 - V_1 & V_3 - V_1 & V_4 - 2V_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

puis on développe

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix} (V_2 - V_1) + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} (V_3 - V_1) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} (V_4 - 2V_1) = 0,$$

ce qui donne

$$15(V_2 - V_1) + 10(V_3 - V_1) - 9(V_4 - 2V_1) = 0,$$

et finalement

$$-7V_1 + 15V_2 + 10V_3 - 9V_4 = 0.$$

Exercice 43

1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ contenant un sous-espace de dimension 2, et soit S_1 et S_2 deux produits scalaires sur E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $(\exists \lambda > 0) \quad (S_2 = \lambda S_1) ;$
- (ii) $(\exists \lambda > 0)(\forall x \in E)(S_2(x, x) = \lambda S_1(x, x)) ;$
- (iii) $(\forall (x, y) \in E^2) \quad ((S_1(x, x) = S_1(y, y) = 1) \Rightarrow (S_2(x, x) = S_2(y, y))) ;$
- (iv) $(\forall (e, f) \in E^2) \quad ((S_1(e, f) = 0) \Rightarrow (S_2(e, f) = 0)) ;$
- (v) $(\exists \theta \neq k\pi) \quad (\forall (x, y) \in E^2) \quad ((\cos_1(x, y) = \cos \theta) \Rightarrow (\cos_2(x, y) = \cos \theta)) ;$
- (vi) $(\forall F \text{ sous-espace de } E) \quad (F^{\perp_1} = F^{\perp_2}) .$

Que se passe-t-il si E est une droite vectorielle ?

2) Soit E un espace euclidien réel contenant un sous-espace de dimension 2, et Φ un endomorphisme injectif de E . Que peut-on dire de Φ si Φ conserve l'orthogonalité, ou si Φ conserve les angles ?

Solution

1) Il est clair tout d'abord que la propriété (i) implique toutes les autres.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

En utilisant l'identité de polarisation on a, quels que soient (x, y) dans E^2 ,

$$S_2(x, y) = \frac{1}{4} (S_2(x+y, x+y) - S_2(x-y, x-y)) = \frac{\lambda}{4} (S_1(x+y, x+y) - S_1(x-y, x-y)) = \lambda S_1(x, y) .$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Soit x fixé tel que $S_1(x, x) = 1$. Alors x est non nul. Posons $\lambda = S_2(x, x)$. C'est un nombre non nul

Si z est non nul, soit

$$t = \frac{1}{\sqrt{S_1(z, z)}} z .$$

On a alors

$$S_1(t, t) = 1 ,$$

puis

$$\lambda = S_2(t, t) = \frac{S_2(z, z)}{S_1(z, z)} ,$$

d'où

$$S_2(z, z) = \lambda S_1(z, z) ,$$

ce qui reste vrai si z est nul. Ceci implique alors que

$$S_2 = \lambda S_1$$

avec λ non nul.

(iv) $\Rightarrow$ (iii)

Soit x et y tels que

$$S_1(x, x) = S_1(y, y) = 1.$$

Si x et y ne sont pas orthogonaux pour S_1 , soit

$$g = y - S_1(x, y)x.$$

Alors

$$S_1(x, g) = S_1(x, y) - S_1(x, y)S_1(x, x) = 0,$$

donc

$$S_2(x, g) = 0 = S_2(x, y) - S_1(x, y)S_2(x, x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{S_2(x, y)}{S_1(x, y)} = S_2(x, x).$$

Mais par symétrie, on a aussi

$$\frac{S_2(y, x)}{S_1(y, x)} = S_2(y, y),$$

d'où

$$S_2(x, x) = S_2(y, y).$$

Si maintenant x et y sont orthogonaux pour S_1 , introduisons $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$. Alors

$$S_1(x, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}S_1(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

n'est pas nul, et

$$S_1(u, u) = \frac{1}{2}(S_1(x, x) + S_1(y, y)) = 1 = S_1(x, x),$$

donc

$$S_2(x, x) = S_2(u, u).$$

De même y et u ne sont pas orthogonaux et

$$S_1(y, y) = S_1(u, u) = 1$$

donc

$$S_2(y, y) = S_2(u, u).$$

On a de nouveau

$$S_2(x, x) = S_2(y, y).$$

(v) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose $\theta \neq \pi/2 + k\pi$, sinon on retrouve (iv) qui implique (iii).

Soit x fixé tel que $S_1(x, x) = 1$. et y quelconque, non colinéaire à x , tel que $S_1(y, y) = 1$. Ils engendrent un sous-espace F de dimension 2. Alors F muni du produit scalaire S_1 est euclidien et S_2 est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur F . Il existe une base (u, v) de F , orthonormée pour S_1 et orthogonale pour S_2 . Dans cette base, si

$$x' = x_1 u + y_1 v \quad \text{et} \quad y' = x_2 u + y_2 v$$

alors

$$S_1(x', y') = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad \text{et} \quad S_2(x', y') = \lambda x_1 x_2 + \mu y_1 y_2,$$

où λ et μ sont strictement positifs.

En particulier, si l'on prend

$$x' = u \quad \text{et} \quad y' = \cos \theta u + \sin \theta v,$$

on a

$$\cos_1(u, v) = \cos \theta,$$

donc également

$$\cos_2(u, v) = \frac{S_2(x', y')}{\sqrt{S_2(x', x')S_2(y', y')}} = \frac{\lambda \cos \theta}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta}} = \cos \theta,$$

ce qui implique

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta}$$

donc

$$\lambda = \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta$$

et finalement

$$\lambda \sin^2 \theta = \mu \sin^2 \theta.$$

Comme $\sin \theta$ n'est pas nul, on en déduit que $\lambda = \mu$.

Alors, pour tout couple (x', y') de F^2 ,

$$S_2(x', y') = \lambda S_1(x', y').$$

En particulier,

$$S_1(x, x) = S_2(y, y) = 1 \quad \text{et} \quad S_2(x, x) = S_2(y, y),$$

donc (iii).

(vi) $\Rightarrow$ (iv)

Soit e dans E et F le sous-espace engendré par e . Si $S_1(e, f)$ est nul, alors f se trouve dans $F^\perp$, donc dans $F^{\perp_2}$ et $S_2(e, f)$ est nul.

Lorsque E est un espace de dimension un, toutes les formes bilinéaires sont proportionnelles et donc quels que soient les produits scalaires S_1 et S_2 , il existe $\lambda > 0$ tel que

$$S_1 = \lambda S_2.$$

2) Si l'on pose

$$S_1(x, y) = (x | y) \quad \text{et} \quad S_2(x, y) = (\Phi(x) | \Phi(y))$$

alors S_2 est un produit scalaire sur E d'après l'exercice 32. Dire que Φ conserve l'orthogonalité signifie que l'on a la propriété (iv) et dire que Φ conserve les angles signifie que l'on a la propriété (v). Donc, on a aussi la propriété (ii) : il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout x de E ,

$$\|\Phi(x)\| = \sqrt{\lambda} \|x\|.$$

Cela signifie que $\Phi/\sqrt{\lambda}$ est une isométrie.

Exercice 44

Soit E un espace euclidien réel, et A et B deux parties non vides de E . On note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A .

1) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

2) Montrer les propriétés suivantes.

(i) Si A est inclus dans B , alors $B^\perp$ est inclus dans $A^\perp$.

(ii) $(A + B)^\perp$ contient $A^\perp \cap B^\perp$ avec égalité si $A \cap B$ n'est pas vide, l'égalité n'étant pas assurée si $A \cap B$ est vide.

(iii) Si $A \cap B$ est non vide, $(A \cap B)^\perp$ contient $A^\perp + B^\perp$.

(iv) Si $[A]$ désigne le sous-espace engendré par A , alors $A^\perp = [A]^\perp$.

(v) $A \subset A^{\perp\perp}$ et $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

(vi) Si A contient 0, alors $A \cap A^\perp = \{0\}$, sinon $A \cap A^\perp$ est vide.

3) Soit F et G deux sous-espaces orthogonaux de E . Montrer que si F et G sont supplémentaires alors

$$F^\perp = G, \quad G^\perp = F, \quad F = F^{\perp\perp}, \quad G = G^{\perp\perp}.$$

4) On suppose que E est de dimension finie. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F^{\perp\perp}$ est égal à F et que l'on a l'égalité

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

5) Dans $E = \mathbb{R}[X]$ on considère un produit scalaire vérifiant, quels que soient P, Q, R la relation

$$(PQ | R) = (P | QR).$$

Soit $F = \{XP \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$. Montrer que l'égalité de 4) n'est pas vérifiée.

Solution

1) Si pour tout x de A on a

$$(y | x) = (z | x) = 0,$$

alors, quels que soient les scalaires λ et μ

$$(\lambda y + \mu z | x) = \lambda (y | x) + \mu (z | x) = 0.$$

Donc, si y et z sont dans $A^\perp$, il en est de même de $\lambda y + \mu z$, et $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

2) (i) Si A est inclus dans B , tout vecteur orthogonal aux éléments de B l'est aussi à ceux de A , donc $B^\perp$ est inclus dans $A^\perp$.

(ii) Soit x dans $A^\perp \cap B^\perp$, et z dans $A + B$. Il existe a dans A et b dans B tels que

$$z = a + b.$$

Alors

$$(x | z) = (x | a) + (x | b) = 0,$$

et donc

$$A^\perp \cap B^\perp \subset (A + B)^\perp.$$

Réciproquement, soit x dans $(A + B)^\perp$, et c dans $A \cap B$. Alors $c + c$ appartient à $A + B$, et x est orthogonal à $2c$, donc à c .

Si a appartient à A , alors x est orthogonal à $a + c$. Mais il est également orthogonal à $-c$. Alors il est orthogonal à a . Donc x appartient à $A^\perp$. De même sera-t-il dans $B^\perp$, donc dans $A^\perp \cap B^\perp$, ce qui donne

$$(A + B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp.$$

On a donc égalité.

Soit x non nul dans E . Prenons $A = \{x\}$ et $B = \{-x\}$. Alors $A + B = \{0\}$ et $(A + B)^\perp = E$.

Mais

$$A^\perp = B^\perp = A^\perp \cap B^\perp = \{y \in E \mid (x | y) = 0\}$$

est un hyperplan de E , donc différent de $(A + B)^\perp$.

(iii) Soit x dans $A^\perp + B^\perp$. Il existe u dans $A^\perp$ et v dans $B^\perp$, tels que $x = u + v$. Alors, si z appartient à $A \cap B$,

$$(z | x) = (z | u + v) = (z | u) + (z | v) = 0.$$

Donc x appartient à $(A \cap B)^\perp$, ce qui donne

$$A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp.$$

(iv) Puisque A est inclus dans $[A]$, on a déjà

$$[A]^\perp \subset A^\perp.$$

Réciproquement, soit x dans $A^\perp$ et y dans $[A]$. Par définition, il existe un nombre fini d'éléments de A et de scalaires tels que

$$y = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k,$$

et donc

$$(x | y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x | a_k) = 0.$$

Il en résulte que x se trouve dans $[A]^\perp$. Donc

$$A^\perp \subset [A]^\perp,$$

d'où l'égalité.

(v) Tout élément de A est orthogonal à tout élément de $A^\perp$, donc

$$(1) \quad A \subset (A^\perp)^\perp.$$

Alors d'après (i)

$$((A^\perp)^\perp)^\perp \subset A^\perp.$$

Mais en appliquant l'inclusion (1) ci-dessus à $A^\perp$, on a

$$A^\perp \subset ((A^\perp)^\perp)^\perp,$$

d'où l'égalité.

(vi) Si x appartient à $A \cap A^\perp$, alors il est orthogonal à lui-même, donc il est nul. Comme $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E , il contient 0. Alors, si A contient 0 l'ensemble $A \cap A^\perp$ vaut $\{0\}$, sinon l'ensemble est vide.

3) Si F et G sont orthogonaux, cela implique les inclusions

$$G \subset F^\perp \quad \text{et} \quad F \subset G^\perp.$$

Si F et G sont supplémentaires, soit x dans $F^\perp$. Il existe y dans F et z dans G tels que

$$x = y + z.$$

Alors

$$(y | y) = (x - z | y) = (x | y) - (z | y).$$

Mais $(x | y)$ est nul car x est dans $F^\perp$ et y dans F , et $(z | y)$ est nul, car z est dans G et y dans F . Il en résulte que y est nul et que $x = z$ appartient à G . Ceci prouve que $F^\perp$ est inclus dans G , d'où l'égalité. Par symétrie, on aura aussi

$$G^\perp = F,$$

d'où l'on déduit

$$(F^\perp)^\perp = G^\perp = F \quad \text{et} \quad (G^\perp)^\perp = F^\perp = G.$$

4) Si E est de dimension finie, les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires, donc d'après 3)

$$F^{\perp\perp} = F.$$

Alors d'après 2 (ii), appliqué à $F^\perp$ et $G^\perp$,

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp} = F \cap G.$$

Puis en prenant l'orthogonal de ce sous-espace

$$(F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp} = (F \cap G)^\perp,$$

et finalement

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

5) Si Q appartient à $F^\perp$, on a, pour tout polynôme P ,

$$0 = (XP | Q) = (P | XQ).$$

Donc XQ est orthogonal à E et c'est le polynôme zéro. Il en résulte que $F^\perp = \{0\}$.

Alors

$$F \cap G = [X] \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp = G^\perp = \mathbb{R}_1[X]^\perp = [\{X, 1\}]^\perp = [1]^\perp \cap [X]^\perp.$$

Il reste à trouver un polynôme P orthogonal à X et pas à 1, pour montrer que

$$F^\perp + G^\perp \neq [X]^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Comme polynôme orthogonal à X , on peut prendre

$$P = (X | 1)X - \|X\|^2.$$

On a alors

$$(P | 1) = (X | 1)^2 - \|X\|^2 \|1\|^2 < 0,$$

puisque 1 et X ne sont pas colinéaires.

2.2 Espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Dans tous les exercices suivants on notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Sauf mention du contraire, le produit scalaire est alors

$$((\alpha_1, \dots, \alpha_n) | (\beta_1, \dots, \beta_n)) = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \beta_k.$$

Exercice 45

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $V_1 = (1, 1, -1, 1)$ et $V_2 = (1, -1, 1, -1)$ deux vecteurs engendrant un sous-espace F . Trouver une base orthonormée de F , puis du supplémentaire orthogonal de F .

Solution

On recherche une base orthonormée de F par le procédé de Schmidt.

On a

$$\|V_1\| = 2,$$

donc on prend

$$E_1 = \frac{1}{2} V_1 .$$

Ensuite

$$(V_1 | V_2) = -2 ,$$

donc

$$\mathcal{E}_2 = V_2 - (E_1 | V_2)E_1 = V_2 - \frac{1}{4} (V_1 | V_2)V_1 = V_2 + \frac{1}{2} V_1 = \frac{1}{2} (3, -1, 1, -1) .$$

Puis

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{3} ,$$

et finalement

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (3, -1, 1, -1) .$$

Alors (E_1, E_2) est une base orthonormée de F .

Première méthode : recherche d'une base orthonormée de $F^\perp$ par le procédé de Schmidt.

Si l'on ajoute au système (V_1, V_2) les vecteurs (e_3, e_4) de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on peut poursuivre le procédé de Schmidt.

$$\mathcal{E}_3 = e_3 - (e_3 | E_2)E_2 - (e_3 | E_1)E_1 .$$

D'où

$$\mathcal{E}_3 = (0, 0, 1, 0) - \frac{1}{12} (3, -1, 1, -1) + \frac{1}{4} (1, 1, -1, 1) = \frac{1}{3} (0, 1, 2, 1) ,$$

et, en normant,

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 1, 2, 1) ,$$

Enfin

$$\mathcal{E}_4 = e_4 - (e_4 | E_3)E_3 - (e_4 | E_2)E_2 - (e_4 | E_1)E_1 ,$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_4 = (0, 0, 0, 1) - \frac{1}{6} (0, 1, 2, 1) + \frac{1}{12} (3, -1, 1, -1) - \frac{1}{4} (1, 1, -1, 1) = \frac{1}{2} (0, -1, 0, 1) .$$

Alors (E_3, E_4) est une base orthonormée de $F^\perp$.

Deuxième méthode : recherche directe d'une base de $F^\perp$.

L'ensemble des vecteurs $V = (x, y, z, t)$ de $F^\perp$ est défini par les équations

$$(V | V_1) = 0 \quad \text{et} \quad (V | V_2) = 0 ,$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x + y - z + t &= 0 \\ x - y + z - t &= 0 \end{cases} ,$$

et ce système équivaut à

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y - z + t &= 0 \end{cases} .$$

Il suffit de trouver deux vecteurs orthogonaux de cet ensemble. Le premier est pris arbitrairement : par exemple $(0, 1, 1, 0)$. Le second doit être orthogonal à celui-ci donc on a l'équation supplémentaire

$$y + z = 0.$$

On en tire

$$t = -2y \quad \text{et} \quad z = -y,$$

et, en prenant par exemple $y = 1$, on obtient $(0, 1, -1, -2)$.

Il reste à normer ces vecteurs pour obtenir une base orthonormée de $F^\perp$, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -1, -2).$$

Exercice 46

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver les vecteurs de norme 1 orthogonaux aux vecteurs

$$V_1 = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad V_2 = (1, -1, -1, 1) \quad , \quad V_3 = (2, 1, 1, 3).$$

Solution

Un vecteur $V = (x, y, z, t)$ orthogonal à V_1, V_2, V_3 vérifie le système

$$\begin{cases} (V | V_1) = x + y + z + t = 0 \\ (V | V_2) = x - y - z + t = 0 \\ (V | V_3) = 2x + y + z + 3t = 0 \end{cases}.$$

En combinant les deux premières lignes on trouve

$$x + t = y + z = 0.$$

Alors on a aussi

$$2x + 3t = 0$$

d'où $x = t = 0$. On trouve donc les vecteurs de la forme

$$V = y(0, 1, -1, 0),$$

et les vecteurs de norme 1 sont $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$.

Exercice 47

Dans $\mathbb{R}^4$, soit H le sous-espace engendré par

$$V_1 = (2, 1, 1, -1) \quad \text{et} \quad V_2 = (1, 1, 3, 0).$$

Soit $X = (5, 2, -2, 2)$. Trouver la projection de X sur H et sur $H^\perp$. Calculer la distance de X à H .

Solution

La projection cherchée est le vecteur $V = aV_1 + bV_2$ tel que $V - X$ soit orthogonal à H . On a

$$V - X = (2a + b - 5, a + b - 2, a + 3b + 2, -a - 2)$$

et

$$\begin{cases} (V - X | V_1) = 7a + 6b - 8 = 0 \\ (V - X | V_2) = 6a + 11b - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ce système a pour solution $(a, b) = (2, -1)$. Donc

$$V = (3, 1, -1, -2) = \text{pr}_H(X).$$

Alors

$$\text{pr}_{H^\perp}(X) = X - \text{pr}_H(X) = (2, 1, -1, 4),$$

et

$$d(X, H) = \|\text{pr}_{H^\perp}(X)\| = \sqrt{22}.$$

Exercice 48

Dans $\mathbb{R}^5$, trouver une base orthonormée du sous-espace F engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, -1, 2, 3) \quad , \quad V_2 = (2, 1, -1, 3, 2) \quad , \quad V_3 = (0, 2, -1, 4, 2) \quad , \quad V_4 = (5, 0, -2, 4, 5).$$

Trouver la projection du vecteur $W = (1, -1, 0, 2, -2)$ sur F et sur $F^\perp$, ainsi que la distance de W à F . Trouver une base de $F^\perp$.

Solution

Appliquons le procédé de Schmidt au système (V_1, V_2, V_3, V_4) .

On a

$$\|V_1\|^2 = 15,$$

donc

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} V_1.$$

Ensuite

$$(V_2 | V_1) = 15,$$

donc

$$\mathcal{E}_2 = V_2 - (E_1 | V_2)E_1 = V_2 - \frac{1}{\|V_1\|^2}(V_1 | V_2)V_1 = V_2 - V_1 = (1, 1, 0, 1, -1).$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_2\|^2 = 4,$$

et

$$E_2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} (1, 1, 0, 1, -1).$$

On continue avec

$$\mathcal{E}_3 = V_3 - (E_2 | V_3)E_2 - (E_1 | V_3)E_1 = V_3 - \frac{1}{4}(\mathcal{E}_2 | V_3)\mathcal{E}_2 - \frac{1}{15}(\mathcal{E}_1 | V_3)\mathcal{E}_1.$$

Comme

$$(\mathcal{E}_2 | V_3) = 4 \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_1 | V_3) = 15,$$

on obtient

$$\mathcal{E}_3 = V_3 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = (-2, 1, 0, 1, 0).$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_3\|^2 = 6,$$

d'où

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathcal{E}_3.$$

Pour finir

$$\mathcal{E}_4 = V_4 - (E_3 | V_4)E_3 - (E_2 | V_4)E_2 - (E_1 | V_4)E_1 = V_4 - \frac{1}{6}(\mathcal{E}_3 | V_4)\mathcal{E}_3 - \frac{1}{4}(\mathcal{E}_2 | V_4)\mathcal{E}_2 - \frac{1}{15}(\mathcal{E}_1 | V_4)\mathcal{E}_1.$$

On a

$$(\mathcal{E}_3 | V_4) = -6, \quad (\mathcal{E}_2 | V_4) = 4, \quad (\mathcal{E}_1 | V_4) = 30,$$

d'où

$$\mathcal{E}_4 = V_4 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 - 2\mathcal{E}_1 = -V_1 - 2V_2 + V_3 + V_4 = 0.$$

Ce calcul montre que le système (V_1, V_2, V_3) engendre F et que (E_1, E_2, E_3) est une base orthonormée de F . On trouve alors facilement la projection sur F .

$$\text{pr}_F(W) = (E_1 | W)E_1 + (E_2 | W)E_2 + (E_3 | W)E_3 = \frac{1}{15}(\mathcal{E}_1 | W)\mathcal{E}_1 + \frac{1}{4}(\mathcal{E}_2 | W)\mathcal{E}_2 + \frac{1}{6}(\mathcal{E}_3 | W)\mathcal{E}_3.$$

On en tire

$$\text{pr}_F(W) = -\frac{1}{15} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \frac{1}{6} \mathcal{E}_3 = \frac{1}{30} (38, 25, 2, 21, -36).$$

Alors

$$\text{pr}_{F^\perp}(W) = W - \text{pr}_F(W) = \frac{1}{30} (-8, -55, -2, 39, -24),$$

et

$$d(W, F) = \|\text{pr}_{F^\perp}(W)\| = \frac{\sqrt{5190}}{30}.$$

Pour obtenir une base de $F^\perp$, on peut revenir à la définition de $F^\perp$.

Un élément $V = (x, y, z, t, u)$ appartient à $F^\perp$, si et seulement les produits scalaires avec les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont nuls. (On peut aussi faire les produits scalaires avec les vecteurs E_1, E_2, E_3). Cela donne le système

$$\begin{cases} (V | V_1) = x - z + 2t + 3u = 0 \\ (V | V_2) = 2x + y - z + 3t + 2u = 0 \\ (V | V_3) = 2y - z + 4t + 2u = 0 \end{cases}.$$

On peut résoudre ce système par la méthode du pivot.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 6 & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 10 \end{array}.$$

On obtient donc

$$x = \frac{u}{3}, \quad y = -t + \frac{2u}{3}, \quad z = 2t + \frac{10u}{3}.$$

En prenant successivement $(t, u) = (-1, 0)$ et $(t, u) = (0, 3)$, on obtient

$$W_1 = (0, 1, -2, -1, 0) \quad \text{et} \quad W_2 = (1, 2, 10, 0, 3).$$

Une base de $F^\perp$ est alors (W_1, W_2) , et si l'on veut une base orthonormée, on peut lui appliquer le procédé de Schmidt.

Remarque : on aurait pu également compléter la base (E_1, E_2, E_3) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$, puis appliquer à cette base le procédé de Schmidt, qui aurait donné une base $(E_1, \dots, E_5)$. Comme les vecteurs (E_1, E_2, E_3) forment une base orthonormée de F , alors (E_4, E_5) formeront une base orthonormée de $F^\perp$.

Exercice 49

Dans $\mathbb{C}^3$, soit les vecteurs

$$V_1 = (1, i, i) \quad , \quad V_2 = (1, i, -1) \quad , \quad V_3 = (i, 1, 0).$$

Trouver la base orthonormée de $\mathbb{C}^3$ obtenue à partir de ces vecteurs par le procédé de Schmidt.

Solution

On a tout d'abord

$$\|V_1\|^2 = 3,$$

donc

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, i, i).$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_2 = V_2 - (E_1 | V_2) E_1 = V_2 - \frac{1}{3} (V_1 | V_2) V_1.$$

Or

$$(V_1 | V_2) = 2 + i,$$

donc

$$\mathcal{E}_2 = (1, i, -1) - \frac{2+i}{3} (1, i, i) = \frac{1}{3} (1-i, 1+i, -2-2i).$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_2\|^2 = \frac{12}{9},$$

et

$$E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (1-i, 1+i, -2-2i).$$

Enfin, on constate que

$$(V_3 | \mathcal{E}_2) = (V_3 | V_1) = 0.$$

Donc $\mathcal{E}_3 = V_3$ et

$$\|V_3\|^2 = 2,$$

d'où

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (i, 1, 0).$$

Exercice 50

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'on définit un produit scalaire en posant

$$((x, y, z) | (x', y, z')) = 2xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'.$$

Trouver une base orthonormée déduite de la base canonique par le procédé de Schmidt

Solution

La forme étant bilinéaire symétrique, on a, si $X = (x, y, z)$,

$$(X | X) = 2(x^2 + xy + y^2) + z^2 = 2 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] + z^2 \geq 0.$$

De plus, si cette expression est nulle, alors,

$$x + \frac{y}{2} = y = z = 0,$$

donc (x, y, z) est le vecteur nul et l'on a bien un produit scalaire.

En partant de $e_1 = (1, 0, 0)$, on trouve $\|e_1\| = \sqrt{2}$, donc

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 .$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_2 = e_2 - (E_1 | e_2) E_1 = e_2 - \frac{1}{2} (e_1 | e_2) e_1 ,$$

et puisque

$$(e_1 | e_1) = 1 ,$$

on obtient

$$\mathcal{E}_2 = e_2 - \frac{1}{2} e_1 = (-1/2, 1, 0) .$$

On trouve

$$\|\mathcal{E}_2\|^2 = \frac{3}{2} ,$$

d'où

$$E_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (-1/2, 1, 0) .$$

Enfin, on constate que e_3 est orthogonal à e_1 et e_2 donc à E_1 et E_2 . La base cherchée est donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0) , \sqrt{\frac{2}{3}} (-1/2, 1, 0) , (0, 0, 1) \right) .$$

2.3 Espaces de polynômes

Dans tous les exercices suivants on notera $P_k(X) = X^k$ les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 51

Soit a un nombre réel. A quelle condition définit-on un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant

$$(P | Q) = P(-1)Q(-1) + aP(0)Q(0) + P(1)Q(1) ?$$

On prend $a = 2$. Trouver la base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt et décomposer $Q = X^2 - 2X + 3$ dans cette base.

Solution

La bilinéarité et la symétrie étant évidentes, on regarde

$$(P | P) = P(-1)^2 + aP(0)^2 + P(1)^2 .$$

Si $a > 0$, alors cette expression est positive. De plus, si cette expression est nulle, alors nécessairement

$$P(-1) = P(0) = P(1)$$

et le polynôme P possède trois racines. Comme il est de degré deux au plus, c'est le polynôme nul. Il en résulte que l'on a bien un produit scalaire.

Si $a \leq 0$ alors,

$$(X^2 - 1 | X^2 - 1) = a \leq 0,$$

et l'on n'a pas de produit scalaire dans ce cas.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait un produit scalaire est donc que a soit strictement positif.

On suppose $a = 2$. On a alors

$$(P_0 | P_0) = 4,$$

donc

$$E_0 = \frac{1}{2}.$$

Ensuite

$$(P_1 | E_0) = 0 \quad \text{et} \quad (P_1 | P_1) = 2,$$

donc

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} X.$$

On poursuit en calculant

$$(P_2 | E_0) = 2 \quad \text{et} \quad (P_2 | E_1) = 0,$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

Alors

$$(\mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_2) = 1,$$

et donc

$$E_2 = \mathcal{E}_2 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

On peut écrire

$$Q = X^2 - 2X + 3 = X^2 - \frac{1}{2} - 2X + \frac{7}{2} = E_2 - 2\sqrt{2}E_1 + 7E_0.$$

On aurait pu également calculer les coefficients

$$(Q | E_2) = 1 \quad , \quad (Q | E_1) = -2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (Q | E_0) = 7.$$

Exercice 52

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

Calculer $(X^n | 1)$ quel que soit l'entier n et trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé de Schmidt. En déduire la projection orthogonale de $Q = X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution

Si P est un polynôme de degré n , on a, à $+\infty$

$$P(t)e^{-t} \sim \alpha t^n e^{-t}$$

et l'intégrale

$$(X^n | 1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-t} dt$$

converge. On peut d'ailleurs la calculer en intégrant par parties. Si $n \geq 1$,

$$(X^n | 1) = \left[-x^n e^{-t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n x^{n-1} e^{-t} dt = n(X^{n-1} | 1).$$

A partir de $(1 | 1) = 1$, on en déduit

$$(X^n | 1) = n!,$$

et donc

$$(X^p | X^q) = (p + q)!.$$

L'intégrale $(P | Q)$ définit une forme bilinéaire. De plus, comme e^{-t} est positif sur $[0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{\infty} P(t)^2 e^{-t} dt \geq 0,$$

et la forme est positive. Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $[0, +\infty[$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien un produit scalaire.

Construisons la base orthonormée déduite de (P_0, P_1, P_2) par le procédé de Schmidt.

On a tout d'abord

$$\|P_0\|^2 = (P_0 | P_0) = 1,$$

donc

$$E_0 = 1.$$

Ensuite

$$(P_1 | E_0) = (X | 1) = 1,$$

donc

$$\mathcal{E}_1 = X - (X | E_0)E_0 = X - 1.$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_1\|^2 = (X - 1 | X - 1) = (X | X) - 2(X | 1) + (1 | 1) = 2! - 2 + 1 = 1,$$

ce qui donne

$$E_1 = \mathcal{E}_1 = X - 1.$$

On continue en calculant

$$(X^2 | E_0) = 2! = 2,$$

puis

$$(X^2 | E_1) = (X^2 | X) - (X^2 | 1) = 3! - 2! = 4.$$

Alors

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - (X^2 | E_1)E_1 - (X^2 | E_0)E_0 = X^2 - 4(X - 1) - 2 = X^2 - 4X + 2.$$

Il reste à calculer la norme de ce polynôme.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_2\|^2 &= (X^4 | 1) - 8(X^3 | 1) + 20(X^2 | 1) - 16(X | 1) + 4(1 | 1) \\ &= 4! - 8 \times 3! + 20 \times 2! - 16 + 4 = 4, \end{aligned}$$

et finalement

$$E_2 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_2\|} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} (X^2 - 4X + 2).$$

Pour obtenir la projection de Q sur $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de calculer celle de X^3 . Pour cela on calcule les produits scalaires avec les vecteurs de la base orthonormée obtenue.

$$(X^3 | E_0) = 3! = 6, \quad (X^3 | E_1) = 4! - 3! = 18,$$

enfin

$$(X^3 | E_2) = \frac{1}{2} (5! - 4 \times 4! + 2 \times 3!) = 18.$$

Alors

$$\text{pr}_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = 18E_2 + 18E_1 + 6E_0 = 9X^2 - 18X + 6,$$

puis

$$\text{pr}_{\mathbb{R}_2[X]}(Q) = \text{pr}_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) - 3X + 1 = 9X^2 - 21X + 7.$$

Exercice 53

1) Soit k un nombre entier naturel. On pose

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

Montrer que, si $k \geq 1$,

$$u_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} u_r.$$

En déduire que la suite $(u_k/e)_{k \geq 0}$ est une suite croissante d'entiers. Calculer u_k lorsque k est compris entre 1 et 4.

2) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}.$$

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ par le procédé de Schmidt.

Solution

1) Si l'on pose

$$\alpha_n = \frac{n^k}{n!}$$

on a

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \frac{1}{n+1},$$

et cette expression tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général α_n converge.

Si $k \geq 1$, on a

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)+1)^{k-1}}{(n-1)!},$$

et en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} (n-1)^r \right) \frac{1}{(n-1)!}.$$

En permutant les sommations, on trouve alors

$$u_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^r}{(n-1)!} \right) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^r}{n!} \right).$$

On obtient bien

$$u_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} u_r .$$

Avec de plus

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e .$$

Le nombre u_0/e est un entier positif. Alors, une récurrence immédiate montre que tous les nombres u_k/e sont des entiers positifs. De plus

$$\frac{u_k}{e} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \frac{u_r}{e} \geq \frac{u_{k-1}}{e} ,$$

et la suite (u_k/e) est croissante.

On obtient successivement

$$u_1 = u_0 = e \quad , \quad u_2 = u_0 + u_1 = 2e \quad , \quad u_3 = u_0 + 2u_1 + u_2 = 5e \quad , \quad u_4 = u_0 + 3u_1 + 3u_2 + u_3 = 15e .$$

2) L'application qui à (P, Q) associe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}$ est bilinéaire symétrique. On a

$$(P | P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)^2}{n!} \geq 0 ,$$

et, si cette expression est nulle, alors $P(n)$ est nul pour tout entier n . Le polynôme P a dans ce cas une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. et l'on a bien un produit scalaire.

Construisons la base orthonormée déduite de (P_0, P_1, P_2) par le procédé de Schmidt.

On remarque que

$$(X^p | 1) = u_p .$$

On a tout d'abord

$$\|P_0\|^2 = (P_0 | P_0) = u_0 = e ,$$

donc

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

Ensuite

$$(P_1 | E_0) = \frac{1}{\sqrt{e}} (X | 1) = \frac{1}{\sqrt{e}} u_1 = \sqrt{e} ,$$

donc

$$\mathcal{E}_1 = X - (X | E_0) E_0 = X - 1 .$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_1\|^2 = (X - 1 | X - 1) = (X | X) - 2(X | 1) + (1 | 1) = u_2 - 2u_1 + u_0 = e ,$$

ce qui donne

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{e}} \mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{e}} (X - 1).$$

On continue en calculant

$$(X^2 | E_0) = \frac{1}{\sqrt{e}} u_2 = 2\sqrt{e},$$

puis

$$(X^2 | E_1) = \frac{1}{\sqrt{e}} ((X^2 | X) - (X^2 | 1)) = \frac{1}{\sqrt{e}} (u_3 - u_2) = 3\sqrt{e}.$$

Alors

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - (X^2 | E_1)E_1 - (X^2 | E_0)E_0 = X^2 - 3(X - 1) - 2 = X^2 - 3X + 1.$$

Il reste à calculer la norme de ce polynôme.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_2\|^2 &= (X^4 | 1) - 6(X^3 | 1) + 11(X^2 | 1) - 6(X | 1) + (1 | 1) \\ &= u_4 - 6u_3 + 11u_2 - 6u_1 + u_0 \\ &= 15e - 30e + 22e - 6e + e = 2e, \end{aligned}$$

et finalement

$$E_2 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_2\|} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2e}} (X^2 - 3X + 1).$$

Exercice 54

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Calculer $(X^n | 1)$ quel que soit l'entier n et trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ par le procédé de Schmidt. Montrer que les polynômes pairs et les polynômes impairs constituent des sous-espaces F supplémentaires orthogonaux. En déduire $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$ pour ces sous-espaces.

Solution

L'intégrale précédente définit une forme bilinéaire symétrique. De plus, on a

$$\int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0,$$

et la forme est positive. Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $[-1, 1]$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $[-1, 1]$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien

un produit scalaire.

En particulier, si P est pair et Q impair, le produit PQ est impair et

$$(P | Q) = 0.$$

Il en résulte que P et Q sont orthogonaux, et donc que le sous-espace $\mathcal{P}$ des polynômes pairs est orthogonal au sous-espace $\mathcal{J}$ des polynômes impairs. De plus, puisque tout polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = \frac{1}{2} (R(X) + R(-X)) + \frac{1}{2} (R(X) - R(-X)),$$

il est la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair et les deux sous-espaces sont supplémentaires. Il en résulte alors que

$$\mathcal{J}^\perp = \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^\perp = \mathcal{J} = \mathcal{J}^{\perp\perp}.$$

On obtient

$$(X^{2p} | 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{2p} dt = \frac{1}{2p+1},$$

alors que

$$(X^{2p+1} | 1) = 0.$$

Construisons la base orthonormée déduite de (P_0, P_1, P_2, P_3) par le procédé de Schmidt.

On a tout d'abord

$$\|P_0\|^2 = (P_0 | P_0) = 1,$$

donc

$$E_0 = 1.$$

Ensuite

$$(P_1 | E_0) = (X | 1) = 0,$$

donc

$$\mathcal{E}_1 = X - (X | E_0)E_0 = X.$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_1\|^2 = (X | X) = (X^2 | 1) = \frac{1}{3},$$

ce qui donne

$$E_1 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_1\|} \mathcal{E}_1 = \sqrt{3} X.$$

On continue en calculant

$$(X^2 | E_0) = (X^2 | 1) = \frac{1}{3},$$

puis

$$(X^2 | E_1) = 0.$$

Alors

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - (X^2 | E_1)E_1 - (X^2 | E_0)E_0 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Il reste à calculer la norme de ce polynôme.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_2\|^2 &= (X^4 | 1) - \frac{2}{3} (X^2 | 1) + \frac{1}{9} (1 | 1) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45},\end{aligned}$$

et finalement

$$E_2 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_2\|} \mathcal{E}_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right).$$

On poursuit en calculant

$$(X^3 | E_1) = \sqrt{3} (X^4 | 1) = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

alors, puisque

$$(X^3 | E_0) = (X^3 | E_2) = 0,$$

on a

$$\mathcal{E}_3 = X^3 - (X^3 | E_1) E_1 = X^3 - \frac{3}{5} X.$$

On calcule la norme de ce polynôme

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_3\|^2 &= (X^6 | 1) - \frac{6}{5} (X^4 | 1) + \frac{9}{25} (X^2 | 1) \\ &= \frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25} = \frac{4}{175},\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$E_3 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_3\|} \mathcal{E}_3 = \frac{5\sqrt{7}}{2} \left(X^3 - \frac{3}{5} X \right).$$

Exercice 55

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)t(1-t) dt.$$

Calculer $(X^n | 1)$ quel que soit l'entier n et trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé de Schmidt.

Solution

L'intégrale précédente définit une forme bilinéaire symétrique. De plus, comme $t(1-t)$ est positif sur $]0, 1[$, on a

$$\int_0^1 P(t)^2 t(1-t) dt \geq 0,$$

et la forme est positive. Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $]0, 1[$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $]0, 1[$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien un produit scalaire.

On a alors

$$(X^n | 1) = \int_0^1 (t^{n+1} - t^{n+2}) dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} - \frac{t^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

On en déduit que

$$(X^p | X^q) = (X^{p+q} | 1) = \frac{1}{(p+q+2)(p+q+3)}.$$

Construisons la base orthonormée déduite de (P_0, P_1, P_2) par le procédé de Schmidt.

On a tout d'abord

$$\|P_0\|^2 = (P_0 | P_0) = \frac{1}{6},$$

donc

$$E_0 = \sqrt{6}.$$

Ensuite

$$(P_1 | E_0) = \sqrt{6} (X | 1) = \frac{\sqrt{6}}{12},$$

donc

$$\mathcal{E}_1 = X - (X | E_0)E_0 = X - \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_1\|^2 = (X - 1/2 | X - 1/2) = (X | X) - 2(X | 1/2) + (1/2 | 1/2) = \frac{1}{20} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120},$$

ce qui donne

$$E_1 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_1\|} \mathcal{E}_1 = \sqrt{30} (2X - 1).$$

On continue en calculant

$$(X^2 | E_0) = \frac{\sqrt{6}}{20},$$

puis

$$(X^2 | E_1) = 2\sqrt{30} \left[(X^2 | X) - (X^2 | 1/2) \right] = 2\sqrt{30} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{40} \right) = \frac{\sqrt{30}}{60}.$$

Alors

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - (X^2 | E_1)E_1 - (X^2 | E_0)E_0 = X^2 - \left(X - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{10} = X^2 - X + \frac{1}{5}.$$

Il reste à calculer la norme de ce polynôme.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_2\|^2 &= (X^4 | 1) - 2(X^3 | 1) + \frac{7}{5}(X^2 | 1) - \frac{2}{5}(X | 1) + \frac{1}{25}(1 | 1) \\ &= \frac{1}{42} - \frac{2}{30} + \frac{7}{100} - \frac{1}{30} + \frac{1}{150} = \frac{1}{2100}, \end{aligned}$$

et finalement

$$E_2 = \frac{1}{\|\mathcal{E}_2\|} \mathcal{E}_2 = 10\sqrt{21} \left(X^2 - X + \frac{1}{5} \right) = 2\sqrt{21} (5X^2 - 5X + 1).$$

Exercice 56

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = - \int_0^1 P(t)Q(t)t \ln t \, dt.$$

Calculer $(X^r | 1)$ quel que soit l'entier r et trouver la projection orthogonale de X^r sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution

La fonction qui à t dans $]0, 1]$ associe $t \ln t$ se prolonge en 0 par continuité par la valeur nulle. Il en résulte que l'intégrale existe. Elle définit une forme bilinéaire symétrique, et puisque, sur $]0, 1]$, le nombre $\ln t$ est négatif, il en résulte que

$$(P | P) = \int_0^1 P(t)^2 (-t \ln t) \, dt \geq 0.$$

Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $]0, 1[$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $]0, 1[$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien un produit scalaire.

On obtient en intégrant par parties

$$(X^r | 1) = - \int_0^1 t^{r+1} \ln t \, dt = - \left[\frac{t^{r+2}}{r+2} \ln t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{r+1}}{r+2} \, dt = \left[\frac{t^{r+2}}{(r+2)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{(r+2)^2}.$$

On en déduit que

$$(X^p | X^q) = (X^{p+q} | 1) = \frac{1}{(p+q+2)^2}.$$

Première méthode : on cherche une base orthonormée (E_0, E_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ par le procédé de Schmidt à partir de la base $(P_0, P_1) = (1, X)$.

On a

$$\|P_0\|^2 = (P_0 | P_0) = \frac{1}{4},$$

donc $E_0 = 2$. Ensuite

$$(P_0 | P_1) = \frac{1}{9},$$

puis

$$\mathcal{E}_1 = P_1 - (P_1 | E_0)E_0 = X - \frac{4}{9}.$$

On a alors

$$(\mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_1) = (P_1 | P_1) - \frac{8}{9} (P_1 | P_0) + \frac{16}{81} (P_0 | P_0) = \frac{1}{16} - \frac{8}{9} \frac{1}{9} + \frac{16}{81} \frac{1}{4} = \frac{17}{36^2},$$

donc

$$E_1 = \frac{36}{\sqrt{17}} \left(X - \frac{4}{9} \right).$$

Alors

$$(X^r | E_0) = 2(X^r | P_0) = \frac{2}{(r+2)^2},$$

puis

$$(X^r | E_1) = \frac{36}{\sqrt{17}} \left((X^r | P_1) - \frac{4}{9} (X^r | P_0) \right) = \frac{36}{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{(r+3)^2} - \frac{4}{9} \frac{1}{(r+2)^2} \right).$$

La projection de X^r sur $\mathbb{R}_1[X]$ est alors

$$\text{pr}_{\mathbb{R}_1[X]}(X^r) = \frac{36}{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{(r+3)^2} - \frac{4}{9} \frac{1}{(r+2)^2} \right) E_1 + \frac{2}{(r+2)^2} E_0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathbb{R}_1[X]}(X^r) &= \frac{36^2}{17} \frac{r(5r+12)}{9(r+2)^2(r+3)^2} \left(X - \frac{4}{9} \right) + \frac{4}{(r+2)^2} \\ &= \frac{144}{17} \frac{r(5r+12)}{(r+2)^2(r+3)^2} X + \frac{36}{17} \frac{(1-r)(7r+17)}{(r+2)^2(r+3)^2}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on cherche $aX + b$ pour que $X^r - (aX + b)$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$, en résolvant le système

$$\begin{cases} (X^r - (aX + b) | 1) = 0 \\ (X^r - (aX + b) | X) = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{1}{(r+2)^2} - \frac{a}{9} - \frac{b}{4} = 0 \\ \frac{1}{(r+3)^2} - \frac{a}{16} - \frac{b}{9} = 0 \end{cases}.$$

On retrouve alors les coefficients obtenus plus haut.

Exercice 57

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt.$$

Calculer le produit $(P_p | P_q)$. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ par le procédé de Schmidt. Trouver le supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{R}_3[X]$ du sous-espace engendré par $1 + X$ et $2 - 3X$.

Solution

La bilinéarité et la symétrie étant évidentes, on regarde

$$(P | P) = P(0)^2 + \int_0^1 P'(t)^2 dt.$$

Cette expression est toujours positive. Lorsqu'elle est nulle, on a nécessairement

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 P'(t)^2 dt = 0,$$

et puisque P' est continue sur $[0, 1]$, on en déduit que la fonction P' est nulle sur cet intervalle. Alors la fonction P est constante sur $[0, 1]$ et s'annule en 0. Il en résulte que la fonction P est nulle sur $[0, 1]$. Alors, le polynôme P est nul puisque il a une infinité de racines. Il en résulte que l'on a bien un produit scalaire.

Remarquons que

$$(P_0 | Q) = Q(0),$$

et donc que P_0 est orthogonal à tout polynôme nul en 0.

Si p et q sont non nuls

$$(P_p | P_q) = \int_0^1 pq t^{p+q-2} dt = \frac{pq}{p+q-1}.$$

En particulier

$$(P_p | P_1) = 1.$$

Construisons la base orthonormée déduite de (P_0, P_1, P_2, P_3) par le procédé de Schmidt.

Comme

$$\|P_0\|^2 = \|P_1\|^2 = 1$$

on a tout d'abord

$$E_0 = P_0 \quad \text{et} \quad E_1 = P_1.$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_2 = P_2 - (P_2 | E_1)E_1 = X^2 - X.$$

On a alors

$$(\mathcal{E}_2 | \mathcal{E}_2) = (P_2 | P_2) - 2(P_2 | P_1) + (P_1 | P_1) = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3},$$

donc

$$E_2 = \sqrt{3}(X^2 - X).$$

On a aussi

$$(P_3 | E_2) = \sqrt{3}((P_3 | P_2) - (P_3 | P_1)) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où

$$\mathcal{E}_3 = P_3 - (P_3 | E_2)E_2 - (P_3 | E_1)E_1 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_3\|^2 &= (X^3 | X^3) - 3(X^3 | X^2) + \frac{9}{4}(X^2 | X^2) + (X^3 | X) - \frac{3}{2}(X^2 | X) + \frac{1}{4}(X | X) \\ &= \frac{9}{5} - \frac{9}{2} + 3 + 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}, \end{aligned}$$

et finalement

$$E_3 = \sqrt{5}(2X^3 - 3X^2 + X).$$

Les polynômes $1 + X$ et $2 - 3X$ sont linéairement indépendants. Ils forment une base de $\mathbb{R}_1[X]$, de même que E_0 et E_1 . Dans $\mathbb{R}_3[X]$ le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$ est engendré par E_2 et E_3 .

Une autre manière d'obtenir cet espace est de chercher les polynômes P de degré au plus 3 tels que

$$(P | P_0) = (P | P_1) = 0.$$

On a

$$(P | P_1) = \int_0^1 P'(t) dt = P(1) - P(0) \quad \text{et} \quad (P | P_0) = P(0).$$

Le sous-espace est formé des polynômes tels que

$$P(0) = P(1) = 0,$$

c'est-à-dire des polynômes divisibles par $X(X - 1)$. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ c'est donc l'ensemble des polynômes de la forme

$$P(X) = (aX + b)X(X - 1).$$

On remarque que E_2 et E_3 sont bien de cette forme.

Exercice 58

Soit f une fonction continue strictement positive sur $]a, b[$ ($a < b$, a et b finis ou non) telle que, pour tout entier naturel n , l'intégrale

$$I_n = \int_a^b t^n f(t) dt$$

converge. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ en posant

$$(P | Q) = \int_a^b \overline{P}(t) Q(t) f(t) dt.$$

Soit $(E_0, \dots, E_n, \dots)$ la base orthonormée construite à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt. Montrer que si $n \geq 1$, le polynôme E_n est un polynôme de degré n dont les racines sont simples et appartiennent toutes à l'intervalle $]a, b[$.

Solution

L'intégrale précédente définit une forme hermitienne, linéaire par rapport à la deuxième variable. De plus, comme $f(t)$ est positif sur $]a, b[$, on a

$$(P | P) = \int_a^b |P(t)|^2 f(t) dt \geq 0$$

et la forme est positive. Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $]a, b[$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $]a, b[$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien un produit hermitien.

Par le procédé de Schmidt,

$$\mathcal{E}_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (E_k | X^n) E_k.$$

Si E_k est de degré k pour $0 \leq k \leq n-1$, on en déduit immédiatement que $\mathcal{E}_n$ puis E_n est de degré n . Donc, par récurrence, le polynôme E_n est de degré n quel que soit n .

Soit $n \geq 1$, et soit x_0 une racine de E_n . On a donc

$$E_n(X) = (X - x_0) Q_n(X),$$

où Q_n est de degré $n-1$. Comme Q_n appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a alors

$$(Q_n | E_n) = \int_a^b |Q_n(t)|^2 (t - x_0) f(t) dt = 0,$$

et en prenant la partie imaginaire

$$\operatorname{Im}(Q_n | E_n) = -\operatorname{Im} x_0 \int_a^b |Q_n(t)|^2 f(t) dt = -\operatorname{Im} x_0 \|Q_n\|^2 = 0.$$

Il en résulte que $\operatorname{Im} x_0$ est nulle et donc que x_0 est réelle.

Si x_0 appartenait à $\mathbb{R} \setminus]a, b[$, alors $t - x_0$ garderait un signe constant sur $]a, b[$ et la fonction qui à t associe $|Q_n(t)|^2(t - x_0)f(t)$ également. Comme cette fonction n'est pas la fonction nulle sur $]a, b[$, l'intégrale ne pourrait être nulle. Donc x_0 appartient à $]a, b[$.

Supposons $n \geq 2$. Si x_0 était racine double, on aurait

$$E_n(X) = (X - x_0)^2 R_n(X)$$

avec R_n de degré $n - 2$. Alors, en posant

$$Q_n(X) = (X - x_0)R_n(X)$$

on aurait

$$0 = (R_n | E_n) = (Q_n | Q_n) = \|Q_n\|^2,$$

d'où une contradiction. Les racines de E_n sont donc simples.

Exercice 59

Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$ on définit un produit scalaire en posant

$$(P | Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

2) Caculer $(X^n | 1)$ pour tout entier n et déterminer les polynômes orthonormés de $\mathbb{R}_3[X]$ déduits de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

1) Soit k un entier naturel. On remarque tout d'abord que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^{2+k} e^{-t^2} = 0.$$

Donc pour $|t|$ assez grand

$$|t^k| e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2},$$

et les intégrales

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt$$

convergent. Alors $(P|Q)$ est défini quels que soient les polynômes P et Q , et l'on obtient ainsi une forme bilinéaire. De plus, comme e^{-t^2} est positif sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt \geq 0,$$

et la forme est positive. Enfin si cette intégrale est nulle, puisque l'on intègre une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction intégrée est nulle, donc que la fonction P est nulle sur $\mathbb{R}$. Alors le polynôme P a une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, et l'on a bien un produit scalaire.

2) Tout d'abord, on remarque que I_{2n+1} est nulle, puisque l'on intègre alors une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, donc

$$(X^{2n+1} | 1) = 0.$$

De manière générale, un polynôme pair est orthogonal à un polynôme impair.

En intégrant par parties

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+2} e^{-t^2} dt = \frac{2}{2n+1} I_{2n+2},$$

ce qui donne la relation de récurrence

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2} I_{2n}.$$

A partir de

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

on obtient

$$I_{2n} = \frac{(2n-1) \dots 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi},$$

donc

$$(X^{2n} | 1) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}.$$

En particulier

$$(1 | 1) = 1 \quad , \quad (X^2 | 1) = \frac{1}{2} \quad , \quad (X^4 | 1) = \frac{3}{4} \quad , \quad quad(X^6 | 1) = \frac{15}{8}.$$

On cherche la base orthonormée par le procédé de Schmidt. Tout d'abord

$$E_0 = 1.$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_1 = X \quad \text{et} \quad \|\mathcal{E}_1\|^2 = (X^2 | 1) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$E_1 = \sqrt{2} X.$$

On continue avec

$$\mathcal{E}_2 = X^2 - (X^2 | 1) = X^2 - \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\|\mathcal{E}_2\|^2 = (X^4 | 1) - (X^2 | 1) + \frac{1}{4} (1 | 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

et donc

$$E_2 = \sqrt{2} \left(X^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Enfin

$$\mathcal{E}_3 = X^3 - (X^3 | E_1)E_1 = X^3 - 2(X^4 | 1)X = X^3 - \frac{3}{2}X.$$

Donc

$$\|\mathcal{E}_3\|^2 = (X^6 | 1) - 3(X^4 | 1) + \frac{9}{4} (X^2 | 1) = \frac{15}{8} - \frac{9}{4} + \frac{9}{8} = \frac{3}{4},$$

ce qui donne

$$E_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(X^3 - \frac{3}{2}X \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (2X^3 - 3X).$$

2.4 Autres espaces

Exercice 60

Déterminer le nombre $\alpha = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (\sin(\pi t) - at^2 - bt - c)^2 dt$

Solution

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni du produit scalaire

$$(f | g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Si l'on pose

$$\varphi(x) = \sin(\pi x),$$

le nombre α s'interprète comme

$$\alpha = 2d(\varphi, \mathbb{R}_2[X])^2 = 2\|\varphi - \text{pr}_{\mathbb{R}_2[X]}(\varphi)\|^2.$$

On a donc

$$\alpha = 2 \left[\|\varphi^2\|^2 - \left((\varphi | E_0)^2 + (\varphi | E_1)^2 + (\varphi | E_2)^2 \right) \right],$$

où (E_0, E_1, E_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

En utilisant la base obtenue dans l'exercice 54

$$E_0(t) = 1 \quad , \quad E_1(t) = \sqrt{3}t \quad , \quad E_2(t) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) ,$$

et, puisque φ est impaire, on a

$$(\varphi | E_0) = (\varphi | E_2) = 0.$$

Alors, en tenant compte de la parité et en intégrant par parties,

$$(\varphi | E_1) = \sqrt{3} \int_0^1 t \sin(\pi t) dt = \sqrt{3} \left(\left[-t \frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\pi} dt \right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

Par ailleurs

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 \sin^2(\pi t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi t)) dt = \frac{1}{2}.$$

Finalement

$$\alpha = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2} \right) = 1 - \frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice 61

Pour tout entier naturel non nul n , soit f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Soit également f_0 la fonction constante égale à 1. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1])$ engendré par les fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ et F le sous-espace de G engendré par les fonctions $(f_n)_{n > 0}$. On muni G du produit scalaire

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

- 1) Montrer que f_0 n'appartient pas à F .
- 2) Montrer que la suite $(\|f_n - f_0\|)_{n > 0}$ converge vers 0.
- 3) Montrer que si g appartient à $F^\perp$, on a, pour tout $n > 0$

$$|(g | f_0)| \leq \|g\| \|f_0 - f_n\|.$$

En déduire $F^\perp$, puis $F^{\perp\perp}$. Que constate-t-on ?

Solution

1) Pour tout élément f de F , on a $f(0) = 0$, donc f_0 n'appartient pas à G .

2) On a

$$\begin{aligned}\|f_n - f_0\|^2 &= \int_0^1 (\sqrt[n]{t} - 1)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t^{2/n} - 2t^{1/n} + 1) dt \\ &= \left[\frac{t^{1+2/n}}{\frac{2}{n} + 1} - 2 \frac{t^{1+1/n}}{\frac{1}{n} + 1} + t \right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1.\end{aligned}$$

On constate que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f_0\|^2 = 0.$$

3) On a

$$(g | f_0) = (g | f_0 - f_n) + (g | f_n).$$

Mais g est dans $F^\perp$, donc $(g | f_n)$ est nul. Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(g | f_0)| = |(g | f_0 - f_n)| \leq \|g\| \|f_0 - f_n\|.$$

Il résulte alors de 2) que

$$(g | f_0) = 0.$$

Finalement g est orthogonal à tout élément de G et donc $g = 0$, ce qui donne

$$F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = G.$$

Dans cet exemple F est inclus strictement dans $F^{\perp\perp}$.

Exercice 62

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles développables à l'origine en série entière de rayon plus grand que 1.

1) Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

sont dans E , montrer que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

est aussi dans E .

2) Montrer que si a est un nombre fixé dans $]0, 1[$, on définit un produit scalaire sur E en posant

$$(f | g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k a^k.$$

3) En déduire que si a appartient à $[0, 1[$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \right| \leq \frac{e^{a/2}}{\sqrt{1-a}}.$$

Solution

Soit x et x' tels que

$$|x| < |x'| < 1.$$

On écrit

$$|a_n b_n| |x|^n = |a_n| |x'|^n |b_n| \left| \frac{x}{x'} \right|^n.$$

Comme $|x/x'| < 1$, la série de terme général $b_n (x/x')^n$ converge absolument et le terme général est borné. Il existe M tel que, pour tout n

$$|b_n| \left| \frac{x}{x'} \right|^n \leq M,$$

et donc

$$|a_n b_n| |x|^n \leq M |a_n| |x'|^n.$$

Comme la série de terme général $a_n x'_n$ converge absolument, la série de terme général $a_n b_n x^n$ converge absolument pour tout $|x| < |x'|$. Son rayon de convergence R est donc supérieur à $|x'|$, et comme on peut choisir $|x'|$ aussi près de 1 qu'on le désire, on en déduit que le rayon R est supérieur au égal à 1. La série

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

est bien dans E .

2) D'après ce qui précède, si f et g sont dans E et si $0 < a < 1$, la série

$$(f | g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k a^k$$

converge et définit une forme bilinéaire symétrique sur E . De plus

$$(f | f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 a^k \geq 0,$$

et cette somme est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui implique que a_n est nul pour tout n , donc que f est nulle.

3) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux séries

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$$

qui sont respectivement de rayon 1 et infini, on a alors

$$|(f | g)| \leq \|f\| \|g\|,$$

d'où, si a appartient à $]0, 1[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) = \frac{e^a}{1-a},$$

et donc

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \right| \leq \frac{e^{a/2}}{\sqrt{1-a}},$$

ce qui reste vrai si $a = 0$.

Exercice 63

Soit $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 < \dots < x_n$. On note $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, et E l'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{R}$, que l'on muni du produit scalaire

$$(f | g) = \sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k).$$

On note

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2.$$

1) Soit F le sous-espace constitué des restrictions à A des fonctions affines. Trouver une base orthonormée de F .

2) Exprimer la projection orthogonale $p(f)$ d'un élément f de E sur F . Comment peut-on interpréter géométriquement cette projection ?

3) Pour tout couple (a, b) de nombres réels on pose

$$g_{a,b}(x) = ax + b.$$

Déterminer a et b pour que les fonctions $a \mapsto \|f - g_{a,b}\|^2$ et $b \mapsto \|f - g_{a,b}\|^2$ soient minimales. Retrouver ainsi les résultats obtenus.

4) Application : $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$.

Solution

1) Soit e_1 et e_2 les restrictions à A des fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ respectivement. Elles constituent une base de F . On applique le procédé de Schmidt. On a

$$\|e_1\|^2 = \sum_{k=1}^n 1 = n,$$

donc

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} e_1.$$

Ensuite

$$\mathcal{E}_2 = e_2 - (e_2 | E_1)E_1 = e_2 - \frac{1}{n} (e_2 | e_1) e_1 = e_2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) e_1 = e_2 - m e_1.$$

On calcule maintenant

$$\|\mathcal{E}_2\|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 = n\sigma^2,$$

d'où

$$E_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (e_2 - m e_1).$$

2) On a alors

$$\begin{aligned} p(f) &= (f | E_1)E_1 + (f | E_2)E_2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) \right) e_1 + \frac{1}{n\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m) \right) (e_2 - m e_1) \\ &= \frac{1}{n\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m) \right) e_2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{m}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m) \right) e_1. \end{aligned}$$

La norme $\|f - p(f)\|$ est minimale puisque p est une projection orthogonale. Cela s'interprète en disant que $p(f)$ est la restriction à A de la droite affine qui passe "au plus près" des points du plan de coordonnées $(x_i, f(x_i))$ en ce sens que la somme des carrés des distances entre les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_i, p(f)(x_i))$ est minimale. (En probabilité c'est la droite de régression linéaire).

3) On a

$$\|f - g_{a,b}\|^2 = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - (ax_k + b))^2.$$

En dérivant par rapport à a on obtient un minimum si

$$\sum_{k=1}^n (f(x_k) - (ax_k + b))x_k = 0.$$

En dérivant par rapport à b on obtient un minimum si

$$\sum_{k=1}^n (f(x_k) - (ax_k + b)) = 0.$$

On obtient a et b en résolvant le système ainsi obtenu qui s'écrit encore

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + bnm &= \sum_{k=1}^n x_k f(x_k) \\ am + b &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système vaut

$$D = \sum_{k=1}^n x_k^2 - nm^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 + 2m \sum_{k=1}^n x_k - 2nm^2 = n\sigma^2.$$

On a ensuite

$$D_a = \sum_{k=1}^n x_k f(x_k) - m \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m),$$

d'où

$$a = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m),$$

puis

$$b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - am = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \frac{m}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - m),$$

ce qui redonne bien les résultats du 2).

3) On prend donc $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. On a alors

$$n = 3, \quad m = 2 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{2}{3},$$

ce qui donne

$$a = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{8}{3}.$$

Exercice 64

1) Montrer que toute algèbre $\mathcal{A}'$ de matrices carrées complexes d'ordre p qui est aussi un corps de neutre I_p est $\mathbb{C}I_p$.

2) Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ intègre, de neutre N , stable par conjugaison. On munit $\mathcal{A}$ du produit scalaire

$$(A | B) = \text{tr}(AB^*).$$

a) Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{A}$. Déterminer l'orthogonal des ensembles $\mathcal{J} = \{BA \mid B \in \mathcal{A}\}$ et $\mathcal{J}' = \{AB \mid B \in \mathcal{A}\}$. En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps. Qu'obtient-on si $N = I_n$?

b) Si $N \neq I_n$, montrer que N est la matrice d'une projection p de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même. En déduire qu'il existe P telle que

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{A}$ il existe une matrice A' de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et que l'application ψ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui à A associe A' est injective. En déduire que $\text{Im } \psi$ est un corps de neutre I_p et que $\mathcal{A} = \mathbb{C}N$.

Solution

1) Si le corps a pour neutre I_p et si λ est une valeur propre d'une matrice A de l'algèbre $\mathcal{A}'$, la matrice $A - \lambda I_p$ est dans $\mathcal{A}'$ et n'est pas inversible. Comme $\mathcal{A}'$ est un corps, cette matrice est nulle. Donc $A = \lambda I_p$ et l'ensemble $\mathcal{A}'$ est inclus dans $\mathbb{C}I_p$. Comme l'inclusion inverse est vraie on a l'égalité.

2) On remarque que $\mathcal{A}$ contient en particulier l'ensemble $\mathbb{C}N$.

a) On a

$$(BA | C) = \text{tr}(BAC^*) = \text{tr}(B(CA^*)^*) = (B | CA^*).$$

Si C appartient à $\mathcal{J}^\perp$, ce produit scalaire est nul et CA^* est orthogonal à toute matrice B de $\mathcal{A}$, donc CA^* est nulle. Mais A^* n'est pas nulle et $\mathcal{A}$ est intègre, donc C est nulle. Il en résulte que $\mathcal{J}^\perp = \{0\}$. De même, en raison des propriétés de la trace,

$$(AB | C) = \text{tr}(A(BC^*)) = \text{tr}((BC^*)A) = \text{tr}(B(A^*C)^*) = (B | A^*C),$$

et de nouveau $\mathcal{J}'^\perp = \{0\}$. Alors, puisque $\mathcal{A}$ est de dimension finie, $\mathcal{J} = \mathcal{J}' = \mathcal{A}$.

En particulier, il existe B et B' tels que

$$BA = AB' = N,$$

Mais dans ce cas

$$B(AB') = BN = B \quad \text{et} \quad (BA)B' = NB' = B',$$

donc $B = B'$ est l'inverse de A . Il en résulte que tout élément non nul est inversible (dans l'anneau $\mathcal{A}$), donc que $\mathcal{A}$ est un corps.

Si $N = I_n$, il résulte de 1) que $\mathcal{A} = \mathbb{C}I_n$.

b) Si $N \neq I_n$, comme N est l'élément neutre de la multiplication, on a $N^2 = N$, donc N est la matrice, dans une base de $\mathbb{C}^n$, d'un endomorphisme p tel que $p^2 = p$ c'est-à-dire d'une projection. En choisissant une base de $\mathbb{C}^n$ formée d'une base de $\text{Im } p$ et d'une base de $\text{Ker } p$, on peut la diagonaliser, et il existe une matrice inversible P telle que

$$N_1 = P^{-1}NP = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit A dans $\mathcal{A}$ et $A_1 = P^{-1}AP$. En posant

$$A_1 = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

et puisque

$$A_1 N_1 = N_1 A_1 = A_1$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ C' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix},$$

et donc les matrices B' , C' et D' sont nulles, c'est-à-dire

$$A_1 = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si A' est nulle, alors $P^{-1}AP$ est nulle, donc A est nulle, et l'application ψ qui à A associe A' est injective. De plus

$$\psi(N) = I_p.$$

On peut écrire $\psi(A)$ comme un produit de matrices. Si l'on pose

$$J_p = \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{n-p} \end{bmatrix},$$

on a alors

$${}^t J_p A_1 J_p = A'$$

et l'application ψ qui à A associe A' est alors définie par

$$\psi(A) = {}^t J_p P^{-1} A P J_p.$$

De plus

$$J_p {}^t J_p = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1} N P.$$

L'application ψ est linéaire. On vérifie facilement que ψ conserve la multiplication, en effet

$$\psi(A)\psi(B) = {}^t J_p P^{-1} A P J_p {}^t J_p P^{-1} B P J_p = {}^t J_p P^{-1} A P P^{-1} N P P^{-1} B P J_p,$$

d'où

$$\psi(A)\psi(B) = {}^tJ_p P^{-1} A N B P J_p,$$

mais, puisque N est le neutre de la multiplication

$$\psi(A)\psi(B) = {}^tJ_p P^{-1} A B P J_p = \psi(AB).$$

Par ailleurs, comme ψ est injective et puisque $\mathcal{A}$ est un corps, $\psi(A) = \text{Im } \psi$ est aussi un corps de neutre $\psi(N) = I_p$. Alors $\text{Im } \psi$ est une algèbre de matrices carrées complexes d'ordre p et un corps de neutre I_p . Donc

$$\text{Im } \psi = \mathbb{C}I_p.$$

Il en résulte que pour toute matrice A de $\mathcal{A}$, il existe λ dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\psi(A) = \lambda I_p,$$

et donc

$$A = \lambda \psi^{-1}(I_p) = \lambda N.$$

Finalement

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}N.$$

Chapitre 3

ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME

3.1 Généralités

Exercice 65

Soit E un espace euclidien et ψ un endomorphisme de E . On appelle adjoint de ψ , un endomorphisme ψ^* qui vérifie, quels que soient X et Y dans E

$$(\psi(X) | Y) = (X | \psi^*(Y)) .$$

Si $\psi^* = \psi$, on dira que ψ est autoadjoint et si $\psi^* = -\psi$ qu'il est antiautoadjoint.

1) Montrer que si ψ^* existe, il est unique.

2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des endomorphismes ψ de E pour lesquels ψ^* existe est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant Id_E , et que, si ψ est dans $\mathcal{F}$ alors il en est de même de ψ^* . Si φ et ψ sont dans $\mathcal{F}$ et si λ est un scalaire, que valent

$$(\varphi + \psi)^*, (\varphi \circ \psi)^*, (\lambda\psi)^*, (\psi^*)^*, \text{Id}_E^* .$$

3) Montrer que l'on a toujours

$$\text{Im } \psi^* \subset (\text{Ker } \psi)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker } \psi^* \subset (\text{Im } \psi)^\perp .$$

4) Si E est de dimension finie, montrer que ψ^* existe pour tout ψ de $\mathcal{L}(E)$ et que si A est la matrice de ψ dans une base orthonormée, alors celle de ψ^* est, dans la même base, la matrice A^* . Montrer aussi que

$$\text{Im } \psi^* = (\text{Ker } \psi)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker } \psi^* = (\text{Im } \psi)^\perp ,$$

et que

$$\dim \text{Ker } \psi^* = \dim \text{Ker } \psi .$$

Solution

1) S'il existe deux adjoints ψ^* et ψ' de ψ , alors, quels que soient X et Y ,

$$(\psi(X) | Y) = (X | \psi^*(Y)) = (X | \psi'(Y))$$

et donc

$$(X | (\psi^* - \psi')(Y)) = 0.$$

Alors, pour tout Y , le vecteur $(\psi^* - \psi')(Y)$ est orthogonal à E , donc est nul, ce qui montre que l'endomorphisme $\psi^* - \psi'$ est nul, d'où l'unicité de l'adjoint.

2) Si l'on a, quels que soient X et Y dans E

$$(\varphi(X) | Y) = (X | \varphi^*(Y)) \quad \text{et} \quad (\psi(X) | Y) = (X | \psi^*(Y)),$$

alors, en additionnant membre à membre

$$((\varphi + \psi)(X) | Y) = (X | (\varphi^* + \psi^*)(Y)),$$

donc $\varphi + \psi$ admet un adjoint, et par unicité,

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

On a aussi

$$(\varphi \circ \psi(X) | Y) = (\psi(X) | \varphi^*(Y)) = (X | \psi^*(\varphi^*(Y))),$$

donc $\varphi \circ \psi$ admet un adjoint, et par unicité,

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*.$$

Si λ est un scalaire,

$$((\lambda\psi)(X) | Y) = (\psi(X) | \bar{\lambda}Y) = (X | \psi^*(\bar{\lambda}(Y))) = (X | \bar{\lambda}\psi^*(Y)),$$

donc $\lambda\psi$ admet un adjoint, et par unicité,

$$(\lambda\psi)^* = \bar{\lambda}\psi^*.$$

Bien sûr

$$(\text{Id}_E(X) | Y) = (X | Y) = (X | \text{Id}_E(Y)),$$

donc Id_E est autoadjoint.

Enfin

$$(\psi^*(X) | Y) = \overline{(Y | \psi^*(X))} = \overline{(\psi(Y) | X)} = (X | \psi(Y)),$$

donc ψ^* admet un adjoint et par unicité,

$$(\psi^*)^* = \psi.$$

3) Si X appartient au noyau de ψ , on a, quel que soit Y ,

$$0 = (\psi(X) | Y) = (X | \psi^*(Y)).$$

Il en résulte que $\psi^*(Y)$ appartient à l'orthogonal du noyau de ψ , donc que

$$\text{Im } \psi^* \subset (\text{Ker } \psi)^\perp.$$

Alors, en inversant les rôles de ψ et ψ^* ,

$$\text{Im } \psi \subset (\text{Ker } \psi^*)^\perp,$$

puis en prenant les orthogonaux

$$(\text{Im } \psi)^\perp \supset \text{Ker } \psi^*.$$

4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et A la matrice de l'endomorphisme ψ dans cette base. Alors $A^* = {}^t\overline{A}$ est la matrice d'un endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$. Si l'on confond le vecteur X avec sa matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$(X | Y) = {}^t\overline{X}Y.$$

Dans ce cas

$$(\psi(X) | Y) = {}^t(\overline{A\overline{X}})Y = {}^t\overline{X}{}^t\overline{A}Y = (X | \varphi(Y)).$$

Donc ψ a pour adjoint $\psi^* = \varphi$ et la matrice de ψ^* dans la base $\mathcal{B}$ est A^* .

Il résulte des inclusions de 3) que

$$\dim(\text{Im } \psi^*) \leq \dim(\text{Ker } \psi)^\perp = \dim E - \dim \text{Ker } \psi = \dim \text{Im } \psi,$$

et

$$\dim(\text{Ker } \psi^*) \leq \dim(\text{Im } \psi)^\perp = \dim E - \dim \text{Im } \psi = \dim \text{Ker } \psi.$$

Mais, puisque

$$\dim(\text{Im } \psi^*) + \dim(\text{Ker } \psi^*) = \dim \text{Im } \psi + \dim \text{Ker } \psi = \dim E,$$

les inégalités précédentes sont en fait des égalités. Alors, puisque

$$\text{Im } \psi^* \subset (\text{Ker } \psi)^\perp \quad \text{et} \quad \dim \text{Im } \psi^* = \dim(\text{Ker } \psi)^\perp$$

on a en fait

$$\text{Im } \psi^* = (\text{Ker } \psi)^\perp,$$

et de même

$$\text{Ker } \psi^* = (\text{Im } \psi)^\perp.$$

Exercice 66

Soit E un espace euclidien complexe de dimension finie, ℓ une forme linéaire non nulle sur E , P_0 un élément de E de norme 1. On définit un endomorphisme L de E en posant

$$L(P) = \ell(P)P_0.$$

Déterminer L^* .

Solution

Le noyau de L est celui de ℓ donc c'est un hyperplan de E . Si P appartient à cet hyperplan

$$(P | L^*(Q)) = (L(P) | Q) = 0.$$

L'image de L^* est incluse dans $(\text{Ker } \ell)^\perp$ qui est une droite vectorielle. Soit Q_0 un vecteur directeur de cette droite de norme 1, il existe alors un nombre $\chi(Q)$ tel que

$$L^*(Q) = \chi(Q)Q_0.$$

La relation

$$(L(P) | Q) = (P | L^*(Q)),$$

s'écrit

$$\overline{\ell(P)}(P_0 | Q) = \chi(Q)(P | Q_0),$$

En particulier, si $P = Q_0$,

$$\overline{\ell(Q_0)}(P_0 | Q) = \chi(Q)(Q_0 | Q_0) = \chi(Q),$$

et

$$\chi(Q) = \overline{\ell(Q_0)}(P_0 | Q).$$

Donc

$$L^*(Q) = \overline{\ell(Q_0)}(P_0 | Q)Q_0.$$

Exercice 67

Soit E un espace euclidien réel de dimension finie, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E , ainsi que λ et μ deux nombres réels distincts. On définit un endomorphisme u de E en posant

$$u(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in F \\ \mu x & \text{si } x \in G \end{cases}.$$

Déterminer u^* . Que se passe-t-il si F et G sont orthogonaux ?

Cas particuliers : $\lambda = 1$ et $\mu = 0$; $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

Solution

On a donc

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = F \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u - \mu \text{Id}_E) = G.$$

Si x s'écrit

$$x = f + g$$

avec f dans F et g dans G , on a

$$u(x) = \lambda f + \mu g,$$

donc

$$u(x) - \lambda x = (\mu - \lambda)g \quad \text{et} \quad u(x) - \mu x = (\lambda - \mu)f,$$

ce qui montre que

$$\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset G \quad \text{et} \quad \text{Im}(u - \mu \text{Id}_E) \subset F.$$

Puisque F et G sont supplémentaires et d'après le théorème du rang, on a les égalités

$$\dim \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) = \dim E - \dim F = \dim G \quad \text{et} \quad \dim \text{Im}(u - \mu \text{Id}_E) = \dim E - \dim G = \dim F,$$

d'où

$$\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) = G \quad \text{et} \quad \text{Im}(u - \mu \text{Id}_E) = F.$$

Alors

$$\text{Ker}(u^* - \lambda \text{Id}_E) = \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^\perp = G^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u^* - \mu \text{Id}_E) = \text{Im}(u - \mu \text{Id}_E)^\perp = F^\perp.$$

On a finalement

$$u^*(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in G^\perp \\ \mu x & \text{si } x \in F^\perp \end{cases}.$$

Si F et G sont orthogonaux, on a $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$. Il en résulte que $u^* = u$. Donc u est autoadjoint.

Si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, alors u est la projection sur F , parallèlement à G . Il en résulte que u^* est la projection sur $G^\perp$, parallèlement à $F^\perp$.

Si $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, alors u est la symétrie par rapport à F , parallèlement à G . Il en résulte que u^* est la symétrie par rapport à $G^\perp$, parallèlement à $F^\perp$.

Exercice 68

Soit L un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de valeurs propres distinctes $a_1, \dots, a_k$ associées aux sous-espaces propres $F_1, \dots, F_k$, et soit A la matrice de L dans une base orthonormée.

1) Montrer que les valeurs propres de L^* sont les conjuguées de celles de L et au même ordre et que le sous-espace spectral de L associé à a_r a même dimension que le sous-espaces spectral de L^* associé à $\bar{a}_r$.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre n . Montrer qu'il existe S symétrique et inversible telle que

$$A^* = S^{-1} \overline{A} S.$$

3) On suppose que L est diagonalisable. Montrer que L^* est diagonalisable et que le sous-espace propre associé à $\bar{a}_j$ est

$$G_j = (F_1 \oplus \dots \oplus F_{j-1} \oplus F_{j+1} \oplus \dots \oplus F_k)^\perp.$$

Solution

1) Si A est la matrice de L dans une base orthonormée, celle de L^* dans la même base est A^* et puisque A et tA ont le même déterminant, on a

$$\det(A^* - aI) = \det({}^t\bar{A} - aI) = \overline{\det({}^tA - \bar{a}I)} = \overline{\det(A - \bar{a}I)}.$$

Il en résulte que $\det(A^* - aI)$ est nul si et seulement si $\det(A - \bar{a}I)$ est nul et donc, que si a est valeur propre de A , alors $\bar{a}$ est valeur propre de A^* et au même ordre.

Par ailleurs, puisque

$$\text{Ker}(A^* - \bar{a}_r I)^n = (\text{Im}(A - a_r I)^n)^\perp$$

on a

$$\dim(\text{Ker}(A^* - \bar{a}_r I)^n) = \dim(\text{Im}(A - a_r I)^n)^\perp = n - \dim(\text{Im}(A - a_r I)^n) = \dim(\text{Ker}(A - a_r I)^n).$$

Les deux sous-espaces spectraux ont donc même dimension.

2) Pour un bloc de Jordan d'ordre n

$$J_n(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix},$$

où les éléments omis sont nuls, soit la matrice d'ordre n

$$U_n = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix},$$

les autres éléments étant nuls. Alors

$${}^tJ_n(a) = U_n J_n(a) U_n,$$

car, multiplier à droite par U_n revient à faire une symétrie par rapport à la médiatrice verticale, et multiplier à gauche, par rapport à la médiatrice horizontale. En effectuant le produit $U_n J_n(a) U_n$, on effectue donc une symétrie centrale sur la matrice $J_n(a)$ et comme $J_n(a)$ est symétrique par rapport à la deuxième diagonale, le produit $U_n J_n(a) U_n$ est bien ${}^tJ_n(a)$. On remarque que U_n est symétrique et sa propre inverse. Alors, pour une matrice de Jordan

$$T = \begin{bmatrix} J_{n_1}(a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(a_k) \end{bmatrix},$$

si l'on pose

$$U = \begin{bmatrix} U_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & U_{n_k} \end{bmatrix},$$

alors

$${}^tT = UTU,$$

et de plus, la matrice U est symétrique et sa propre inverse. (Si T est diagonale alors $U = I$).

Soit T la forme de Jordan de A . Il existe H telle que

$$T = H^{-1}AH.$$

Alors

$${}^tT = {}^tH {}^tA {}^tH^{-1},$$

donc

$${}^tA = {}^tH^{-1} {}^tT {}^tH = {}^tH^{-1}UTU {}^tH = {}^tH^{-1}U {}^tH^{-1}AHU {}^tH = (HU {}^tH)^{-1}A(HU {}^tH),$$

et en conjuguant

$$A^* = \overline{(HU {}^tH)}^{-1} \overline{A} \overline{(HU {}^tH)},$$

Si l'on pose

$$S = \overline{HU {}^tH},$$

on obtient

$$A^* = S^{-1} \overline{A} S,$$

et la matrice S est symétrique.

3) Soit A la matrice de L dans une base orthonormée. Si A est diagonalisable, il en est de même de $\overline{A}$, et le calcul précédent montre A^* est semblable à $\overline{A}$, donc est également diagonalisable.

Soit x un vecteur propre de L associé à a_j , et y un vecteur propre de L^* associé à $\bar{a}_r$. On a

$$\bar{a}_j(x | y) = (a_j x | y) = (L(x) | y) = (x | L^*(y)) = (x | \bar{a}_r y) = \bar{a}_r(x | y).$$

Donc, si $j \neq r$, le nombre $(x | y)$ est nul et le sous-espace G_r est orthogonal à tous les sous-espaces F_j donc à leur somme directe. Il en résulte que

$$G_r \subset (F_1 \oplus \dots \oplus F_{r-1} \oplus F_{r+1} \oplus \dots \oplus F_k)^\perp.$$

Comme on a

$$\dim F_1 + \dots + \dim F_r = n,$$

alors

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_{r-1} \oplus F_{r+1} \oplus \dots \oplus F_k) = n - \dim F_r,$$

puis

$$\dim G_r = \dim F_r = \dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_{r-1} \oplus F_{r+1} \oplus \dots \oplus F_k)^\perp$$

ce qui montre l'égalité

$$G_r = (F_1 \oplus \dots \oplus F_{r-1} \oplus F_{r+1} \oplus \dots \oplus F_k)^\perp.$$

Remarque : puisque l'on a

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp,$$

on a aussi

$$G_r = F_1^\perp \cap \dots \cap F_{r-1}^\perp \cap F_{r+1}^\perp \cap \dots \cap F_k^\perp.$$

Exercice 69

Soit E un espace euclidien de dimension finie.

1) Soit f un endomorphisme autoadjoint positif de E . Montrer que, pour tout x de E

$$\|f(x)\| \leq \lambda \|x\|$$

où λ est la plus grande valeur propre de f . Quand a-t-on égalité ?

2) Soit f un endomorphisme de E . Montrer que, pour tout x de E

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{\mu} \|x\|$$

où μ est la plus grande valeur propre de f^*f . Quand a-t-on égalité ?

3) Soit B une forme bilinéaire. Montrer qu'il existe une constante α telle que, quels que soient x et y dans E ,

$$|B(x, y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|.$$

Solution

1) Si f est autoadjoint positif, il se diagonalise dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. Si les coordonnées de x dans cette base sont $(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k,$$

et les valeurs propres λ_k sont positives. On a donc

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2,$$

et l'on majore cette somme, ce qui donne

$$\|f(x)\|^2 \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^2 \right) \sum_{k=1}^n x_k^2 = \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \right)^2 \|x\|^2,$$

d'où

$$\|f(x)\| \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \right) \|x\|,$$

On obtient bien que

$$\|f(x)\| \leq \lambda \|x\|,$$

où λ est la plus grande valeur propre de f .

L'égalité est obtenue lorsque, pour tout k ,

$$\lambda_k^2 x_k^2 = \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^2 \right) x_k^2.$$

Si l'on a

$$\lambda_k < \sup_{1 \leq j \leq n} \lambda_j$$

cela nécessite que x_k soit nul. Les seules coordonnées non nulles correspondent aux indices i tels que λ_i soit la valeur propre maximale λ . Alors x est un vecteur propre associé à λ .

2) Si f est un endomorphisme quelconque

$$\|f(x)\|^2 = (f(x) | f(x)) = (x | f^* f(x)).$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\|f(x)\|^2 \leq \|x\| \|f^* f(x)\|,$$

puis en utilisant 1), puisque $f^* f$ est autoadjoint positif,

$$\|f^* f(x)\| \leq \mu \|x\|,$$

où μ est la plus grande valeur propre de $f^* f$. On obtient bien que

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{\mu} \|x\|$$

où μ est la plus grande valeur propre de $f^* f$.

L'égalité a lieu dans l'inégalité de Schwarz lorsque $f^* f(x)$ et x sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque x est un vecteur propre de $f^* f$, et l'égalité a lieu dans 1) lorsque x est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre μ de $f^* f$. cette condition est donc nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité.

3) Si B est une forme bilinéaire, il existe une matrice A telle que, dans une base orthonormée

$$B(x, y) = {}^t \overline{X} A Y,$$

où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées de x et y respectivement. Alors, si f est un endomorphisme de E de matrice A dans la base orthonormée, on a encore

$$B(x, y) = (x | f(y)).$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient

$$|B(x, y)| \leq \|x\| \|f(y)\|,$$

puis en utilisant 2),

$$|B(x, y)| \leq \sqrt{\mu} \|x\| \|y\|,$$

où μ est la plus grande valeur propre de $f^* f$.

3.2 Espaces de polynômes

Exercice 70

Dans $\mathbb{C}[X]$ muni du produit hermitien

$$(P | Q) = \int_0^{\infty} \overline{P}(t) Q(t) e^{-t} dt$$

on considère l'endomorphisme L défini par

$$L(P) = XP'.$$

1) Trouver un endomorphisme M tel que, quels que soient les polynômes P et Q ,

$$(L(P) | Q) = (P | M(Q)).$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de L . L'endomorphisme M a-t-il des valeurs propres ?

2) Soit n un entier naturel. On considère maintenant L comme endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit Π la projection de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que

$$L^*(P) = \Pi \circ M / \mathbb{C}_n[X].$$

Quelles sont les valeurs propres de L et de L^* ?

3) Soit $n = 2$. Ecrire les matrices de L et L^* dans la base $(1, X, X^2)$ ainsi que dans la base orthonormée (E_0, E_1, E_2) déduite de $(1, X, X^2)$ par le procédé de Schmidt.

Solution

1) En intégrant par parties

$$\begin{aligned} (L(P) | Q) &= \int_0^{\infty} \overline{tP'(t)} Q(t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \overline{P'(t)} (tQ(t) e^{-t}) dt \\ &= \left[P(t) (tQ(t) e^{-t}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \overline{P(t)} (Q(t) + tQ'(t) - tQ(t)) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \overline{P(t)} ((t-1)Q(t) - tQ'(t)) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

donc, si l'on pose,

$$M(Q) = (X - 1)Q - XQ',$$

on obtient

$$(L(P) | Q) = (P | M(Q)).$$

Cherchons λ complexe et P dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$L(P) = \lambda P,$$

c'est-à-dire

$$XP' = \lambda P.$$

Si l'on écrit

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k,$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k X^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k,$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k - \lambda) X^k = 0.$$

Donc, pour tout entier k , le nombre $a_k(k - \lambda)$ est nul. Les valeurs propres sont les nombres entiers naturels et si $\lambda = p$, on doit avoir $a_k = 0$, si $k \neq p$. Le sous-espace propres associé à p est la droite vectorielle engendrée par X^p .

Pour l'endomorphisme M , la relation

$$M(Q) = \mu Q$$

où Q est un polynôme de degré r donne

$$(X - 1 - \mu)Q = XQ'.$$

le membre de gauche est de degré $r + 1$ et celui de droite de degré r au plus. L'égalité n'est donc pas possible et M n'a pas de valeur propre.

2) On peut écrire

$$(L(P) | Q) = (P | M(Q)) = (P | \Pi \circ M(Q)) + (P | M(Q) - \Pi \circ M(Q)).$$

Si Q est dans $\mathbb{C}_n[X]$, la différence $M(Q) - \Pi \circ M(Q)$ est orthogonale à $\mathbb{C}_n[X]$ par définition de la projection Π , donc

$$(L(P) | Q) = (P | M(Q)) = (P | \Pi \circ M(Q)).$$

Les polynômes P et Q étant dans $\mathbb{C}_n[X]$, on a alors

$$(L(P) | Q) = (P | \Pi \circ M / \mathbb{C}_n[X](Q)),$$

et par unicité de l'adjoint, il en résulte que

$$L^* = \Pi \circ M / \mathbb{C}_n[X].$$

Les valeurs propres de L sont alors les nombres entiers $0, 1, \dots, n$, et le sous-espace propre associé à p est la droite vectorielle engendrée par X^p . Les valeurs propres de L^* sont les conjuguées des précédentes, donc également $0, 1, \dots, n$.

3) La matrice A de L dans la base $(1, X, X^2)$ est diagonale et vaut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En partant de la relation, qui se démontre facilement par récurrence, en intégrant par parties, que

$$I_r = \int_0^\infty t^r e^{-t} dt = r!,$$

on construit une base orthonormée par le procédé de Schmidt. Tout d'abord

$$(1 | 1) = 1,$$

donc

$$E_0 = 1.$$

Ensuite

$$X - (X | 1) = X - 1,$$

et

$$(X - 1 | X - 1) = I_2 - 2I_1 + I_0 = 1,$$

donc

$$E_1 = X - 1.$$

Enfin

$$X^2 - (X^2 | X - 1)(X - 1) - (X^2 | 1) = X^2 - (I_3 - I_2)(X - 1) - I_2 = X^2 - 4X + 2,$$

et

$$(X^2 - 4X + 2 | X^2 - 4X + 2) = (X^4 + 16X^2 + 4 - 8X^3 - 16X + 4X^2 | 1) = 24 + 32 + 4 - 48 - 16 + 8 = 4,$$

donc

$$E_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2).$$

On en déduit facilement que

$$1 = E_0 \quad , \quad X = E_0 + E_1 \quad \text{et} \quad X^2 = 2E_0 + 4E_1 + 2E_2.$$

On a alors

$$L(E_0) = L(1) = 0 \quad , \quad L(E_1) = L(X - 1) = X = E_1 + E_0,$$

et

$$L(E_2) = \frac{1}{2}(L(X^2) - 4L(X) + 2L(1)) = X^2 - 2X = 2E_2 + 2E_1,$$

d'où la matrice B de L dans la base (E_0, E_1, E_2) ,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice de L^* dans cette base est alors

$$C = {}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice D de L^* dans la base canonique, on calcule

$$L^*(1) = E_1 = X - 1 \quad \text{et} \quad L^*(X) = 2E_1 + 2E_2 = X^2 - 2X,$$

et enfin

$$L^*(X^2) = 6E_1 + 12E_2 = 6X^2 - 18X + 6,$$

d'où

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -18 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

On remarque aussi que

$$L^*(1) = M(1) \quad \text{et} \quad L^*(X) = M(X).$$

Exercice 71

Dans $\mathbb{C}[X]$ muni du produit hermitien

$$(P | Q) = \int_0^\infty \overline{P}(t)Q(t)e^{-t}dt$$

soit l'endomorphisme L qui à P associe P' .

1) On suppose que L admet un adjoint L^* . Montrer qu'il existe un endomorphisme M tel que, quels que soient P et Q ,

$$(P | M(Q)) = \overline{P}(0)Q(0).$$

Si $M(1)$ est de degré s , et si $(E_1, \dots, E_n, \dots)$ est la base construite à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt, montrer que $E_{s+1}(0)$ est nul et trouver une contradiction.

2) Si l'on considère L comme un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ ($n \geq 1$), montrer que $M(1)$ est de degré n et que, si $1 \leq p \leq n$, on a

$$M(X^p) = 0.$$

En déduire qu'il existe un polynôme R de degré n , tel que $R(0)$ soit strictement positif, et tel que, pour tout Q de $\mathbb{C}_n[X]$,

$$L^*(Q) = Q - Q' - Q(0)R.$$

Quelles sont les valeurs propres de L ? de M ?

3) Déterminer R lorsque $n = 2$.

Solution

1) En intégrant par parties

$$\begin{aligned} (L(P) | Q) &= \int_0^\infty \overline{P'}(t)(Q(t)e^{-t})dt \\ &= \left[\overline{P}(t)Q(t)e^{-t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \overline{P}(t)(Q'(t) - Q(t))e^{-t}dt \\ &= -\overline{P}(0)Q(0) - (P | Q' - Q). \end{aligned}$$

Alors, si L^* existe, on a pour tout P ,

$$(P | L^*(Q)) = -\overline{P}(0)Q(0) - (P | Q' - Q),$$

soit

$$\overline{P}(0)Q(0) = (P | Q - Q' - L^*(Q)),$$

et en posant

$$M(Q) = Q - Q' - L^*(Q),$$

on a bien

$$\overline{P}(0)Q(0) = (P | M(Q)).$$

Si $M(1)$ est de degré s , on a

$$(E_{s+1} | M(1)) = \overline{E}_{s+1}(0).$$

Mais, par construction, E_{s+1} est orthogonal à $\mathbb{C}_s[X]$, donc $(E_{s+1} | M(1))$ est nul, et par suite, $E_{s+1}(0)$ est nul. Le polynôme E_{s+1} est donc de la forme

$$E_{s+1} = XQ,$$

où Q appartient à $\mathbb{C}_s[X]$. Alors

$$0 = (E_{s+1} | Q) = (XQ | Q) = \int_0^\infty t|Q(t)|^2 e^{-t} dt.$$

Mais cette intégrale est celle d'une fonction continue positive. Elle ne peut être nulle que si Q est le polynôme zéro, ce qui implique que E_{s+1} est nul, d'où la contradiction. Donc L n'a pas d'adjoint.

2) En reprenant la démonstration précédente, on voit que si le degré de $M(1)$ est strictement plus petit que n , alors on obtient une contradiction. Il en résulte que, dans $\mathbb{C}_n[X]$, le polynôme $M(1)$ est de degré n . D'autre part, si P est dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $p \geq 1$,

$$(P | M(X^p)) = P(0) \times 0 = 0,$$

et $M(X^p)$ est orthogonal à $\mathbb{C}_n[X]$, donc est nul. Dans la base canonique, la matrice de M a une seule colonne non nulle : la première. Ses valeurs propres sont donc : 0 à l'ordre $n-1$, et $M(1)(0)$ à l'ordre 1. De plus, si Q est dans $\mathbb{C}_n[X]$,

$$M(Q) = M(Q - Q(0)) + M(Q(0)) = Q(0)M(1),$$

et

$$0 < (M(1) | M(1)) = M(1)(0).$$

Si l'on pose

$$R = M(1),$$

le polynôme R est de degré n , et vérifie la condition $R(0) > 0$. De plus

$$L^*(Q) = Q - Q' - M(Q) = Q - Q' - Q(0)R.$$

Dans la base canonique, la matrice de L est une matrice triangulaire supérieure stricte

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

où les coefficients omis sont nuls, et ses valeurs propres sont donc toutes nulles. Il en est donc de même pour L^* .

En appliquant la formule ci-dessus, on obtient, si $1 \leq p \leq n$,

$$L^*(X^p) = X^p - pX^{p-1},$$

et

$$L^*(1) = 1 - R = 1 - R(0) + \sum_{k=1}^n r_k X^k.$$

La matrice de L^* dans la base canonique est alors

$$V = \begin{bmatrix} 1 - R(0) & -1 & & & \\ r_1 & 1 & -2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ r_{n-1} & & & 1 & -n \\ r_n & & & & 1 \end{bmatrix},$$

où les coefficients omis sont nuls. Alors

$$0 = \operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 1 - R(0) + n,$$

d'où

$$R(0) = n + 1.$$

Finalement

$$M(R) = R(0)M(1) = (n + 1)R,$$

et R est un vecteur propre associé à la valeur propre $n + 1$.

3) En utilisant la base orthonormée obtenue dans l'exercice précédent

$$E_0 = 1 \quad , \quad E_1 = X - 1 \quad , \quad E_2 = \frac{X^2}{2} - 2X + 1,$$

on a

$$L(E_0) = 0 \quad , \quad L(E_1) = 1 = E_0 \quad , \quad L(E_2) = X - 2 = -E_0 + E_1,$$

d'où la matrice de L dans la base orthonormée

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et celle de L^*

$${}^tA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$L^*(1) = E_1 - E_2 = -\frac{X^2}{2} + 3X - 2,$$

puis

$$R = M(1) = 1 - L^*(1) = 3 - 3X + \frac{X^2}{2}.$$

Exercice 72

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ on considère les formes linéaires ℓ_k définies pour tout polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

par

$$\ell_k(P) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i.$$

1) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P | Q) = \sum_{j=0}^{\infty} \ell_j(P) \ell_j(Q).$$

Calculer $\ell_j(X^p - X^{p-1})$ si $p \geq 1$ et en déduire la base orthonormée construite à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

2) Soit l'application linéaire L définie sur les vecteurs de la base canonique par

$$L(1) = X \quad \text{et} \quad L(X^p) = X^{p-1} + X^{p+1} \quad \text{si } p \geq 1.$$

Montrer que L est autoadjoint.

3) Soit $n \geq 2$. On restreint L au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$$\mathcal{L}(P) = L(P) \quad \text{si } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(X^n) = X^{n-1}.$$

Calculer $\mathcal{L}^*(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$. Ecrire sa matrice lorsque $n = 4$.

Solution

1) Remarquons que toutes les sommes sont finies. Comme ℓ_j est linéaire, la relation

$$(P | Q) = \sum_{j=0}^{\infty} \ell_j(P) \ell_j(Q)$$

définit une forme bilinéaire symétrique. De plus

$$(P | P) = \sum_{j=0}^{\infty} \ell_j(P)^2 \geq 0.$$

Enfin, si la somme précédente est nulle, on a, pour tout entier j

$$\ell_j(P) = 0.$$

Mais

$$\ell_j(P) - \ell_{j+1}(P) = a_j,$$

donc, tous les coefficients du polynôme P sont nuls et P est le polynôme nul ce qui montre que l'on a bien un produit scalaire.

Remarquons que

$$\ell_j(X^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > p \\ 1 & \text{si } j \leq p \end{cases},$$

et en particulier

$$\ell_j(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq 1 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases}.$$

Donc, si $p \geq 1$,

$$\ell_j(X^p) - \ell_j(X^{p-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > p \\ 1 & \text{si } j = p \\ 0 & \text{si } j < p \end{cases}.$$

Si l'on pose

$$E_0 = 1 \quad \text{et} \quad E_p = X^p - X^{p-1} \quad \text{si } p \geq 1,$$

on obtient

$$\ell_j(E_p) = \delta_{jp}.$$

Alors

$$(E_p | E_q) = \sum_{j=0}^{\infty} \ell_j(E_p) \ell_j(E_q) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{jp} \delta_{jq} = \delta_{pq}.$$

Comme E_p est de degré p et que le coefficient de X^p dans E_p est positif, ce qui précède montre que la base $(E_0, E_1, \dots, E_n, \dots)$ n'est autre que la base orthonormée déduite de la base canonique par le procédé de Schmidt.

2) Pour montrer que quels que soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on a

$$(L(P) | Q) = (P | L(Q))$$

il suffit de vérifier l'égalité pour des éléments E_p et E_q de la base orthonormée. Par symétrie on peut même se contenter du cas où $p < q$.

Si $p \geq 2$, on a

$$L(E_p) = L(X^p) - L(X^{p-1}) = X^{p+1} + X^{p-1} - (X^p - X^{p-2}) = E_{p+1} + E_{p-1},$$

puis

$$L(E_1) = L(X - 1) = X^2 + 1 - X = E_2 - E_0,$$

et enfin

$$L(E_0) = X = X - 1 + 1 = E_1 + E_0.$$

Alors, si $p \geq 1$ et $q \geq 1$,

$$(L(E_p) | E_q) = (E_{p+1} + E_{p-1} | E_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (E_p | E_{q+1} + E_{q-1}) = (E_p | L(E_q)).$$

Si $p = 0$ et $q \geq 1$

$$(L(E_p) | E_q) = (E_1 + E_0 | E_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (E_0 | E_{q+1} + E_{q-1}) = (E_0 | L(E_q)).$$

3) La base $(E_0, \dots, E_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire défini dans 1). On a toujours, si $1 \leq p \leq n-1$,

$$\mathcal{L}(E_p) = L(X^p) - L(X^{p-1}) = X^{p+1} + X^{p-1} - (X^p - X^{p-2}) = E_{p+1} + E_{p-1},$$

et

$$\mathcal{L}(E_0) = E_1 + E_0.$$

Il reste à calculer $\mathcal{L}(E_n)$. On a

$$\mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}(X^n) - \mathcal{L}(X^{n-1}) = X^{n-1} - (X^n + X^{n-2}) = E_{n-1} - X^n.$$

Mais

$$X^k = (X^k - X^{k-1}) + (X^{k-1} - X^{k-2}) + \dots + (X - 1) + 1 = \sum_{j=0}^k E_j,$$

donc

$$\mathcal{L}(E_n) = E_{n-1} - \sum_{j=0}^n E_j = - \sum_{j=0}^{n-2} E_j - E_n.$$

La matrice de $\mathcal{L}$ dans la base orthonormée est donc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & -1 \\ 1 & 0 & 1 & & -1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

et la matrice de $\mathcal{L}^*$ dans cette base est alors

$${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\mathcal{L}^*(E_0) = E_0 + E_1 - E_n = \mathcal{L}(E_0) - E_n,$$

puis, si $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathcal{L}^*(E_k) = E_{k+1} + E_{k-1} - E_n = \mathcal{L}(E_k) - E_n,$$

et enfin

$$\mathcal{L}^*(E_n) = E_{n-1} - E_n = 2X^{n-1} - X^{n-2} - X^n.$$

Alors

$$\mathcal{L}^*(1) = \mathcal{L}^*(E_0) = X + X^{n-1} - X^n,$$

puis, si $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(X^k) &= \mathcal{L}^*\left(\sum_{j=0}^k E_j\right) = \sum_{j=0}^k (\mathcal{L}(E_j) - E_n) \\ &= -(k+1)E_n + \mathcal{L}\left(\sum_{j=0}^k E_j\right) \\ &= -(k+1)(X^n - X^{n-1}) + \mathcal{L}(X^k) \\ &= X^{k-1} + X^{k+1} + (k+1)(X^{n-1} - X^n). \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^*(X^n) &= \mathcal{L}^*(X^n - X^{n-1}) + \mathcal{L}^*(X^{n-1}) \\
 &= \mathcal{L}^*(E_n) + \mathcal{L}^*(X^{n-1}) \\
 &= 2X^{n-1} - X^{n-2} - X^n + X^n + X^{n-2} - n(X^n - X^{n-1}) \\
 &= (n+2)X^{n-1} - nX^n.
 \end{aligned}$$

En particulier, si $n = 4$, on obtient la matrice B de $\mathcal{L}^*$ dans la base canonique :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 73

On suppose $\mathbb{R}[X]$ muni d'un produit scalaire tel que, quels que soient les polynômes P, Q, R ,

$$(PQ | R) = (P | QR).$$

Soit u la projection de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à P associe le polynôme constant $P(0)$. Montrer que u n'a pas d'adjoint.

Solution

Le noyau de u est constitué des polynômes divisibles par X . Supposons que u^* existe.

Soit P dans $\text{Ker } u$ et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Alors

$$(u(P) | Q) = (P | u^*(Q)) = 0,$$

et $u^*(Q)$ appartient à $(\text{Ker } u)^\perp$. Donc

$$\text{Im } u^* \subset (\text{Ker } u)^\perp.$$

Soit maintenant Q dans $(\text{Ker } u)^\perp$. Pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ le polynôme XP appartient à $\text{Ker } u$ et l'on a

$$0 = (XP | Q) = (P | XQ),$$

donc XQ appartient à $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$. Il en résulte que XQ , donc Q , est le polynôme 0, et que

$$(\text{Ker } u)^\perp = \{0\}.$$

Par suite

$$\text{Im } u^* = \{0\},$$

et u^* serait nul, ce qui n'est pas possible. On en conclut que u n'a pas d'adjoint.

Exercice 74

Soit F un polynôme de degré n . Pour tout polynôme P , on pose

$$L(P)(x) = \int_{-1}^1 P(t)F(x-t) dt.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2) On munit $\mathbb{R}_n[x]$ du produit scalaire

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Déterminer L^* . Que peut-on dire de L si F possède une parité ?

3) On prend $F(x) = x^3$. Ecrire la matrice de L dans la base orthonormée déduite de $(1, x, x^2, x^3)$ par le procédé de Schmidt, et trouver les valeurs propres de L .

Solution

1) En raison de la linéarité de l'intégrale, l'application L est clairement linéaire. En utilisant la formule de Taylor en x pour le polynôme F , on obtient

$$F(x-t) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x)}{k!} (-t)^k,$$

donc

$$L(P)(x) = \int_{-1}^1 P(t) \left(\sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x)}{k!} (-t)^k \right) dt = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x)}{k!} \int_{-1}^1 P(t) (-t)^k dt.$$

Comme le degré de F vaut n , on en déduit que $L(P)$ est un polynôme de degré au plus n . Donc L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2) Soit P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$. Calculons $(L(P) | Q)$. On a

$$(L(P) | Q) = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 P(t)F(x-t) dt \right) Q(x) dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on en tire

$$(L(P) | Q) = \int_{-1}^1 P(t) \left(\int_{-1}^1 Q(x)F(x-t) dx \right) dt.$$

Donc si l'on pose

$$S(Q)(t) = \int_{-1}^1 Q(x)F(x-t) dx$$

on obtient

$$(L(P) | Q) = (P | S(Q)) .$$

Il en résulte que

$$L^*(Q) = S(Q) .$$

Si F est pair, on a

$$F(x-t) = F(t-x)$$

et donc

$$L^* = L ,$$

et L est autoadjoint .

Si F est impair, on a cette fois

$$F(x-t) = -F(t-x)$$

et donc

$$L^* = -L ,$$

et L est antiautoadjoint. C'est le cas lorsque $F(x) = x^3$.

3) La base orthonormée (E_0, E_1, E_2, E_3) obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt (voir ex. 54) est

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad E_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \quad E_3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) .$$

Donc

$$1 = \sqrt{2} E_0, \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} E_1, \quad x^2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{2}{3} E_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} E_0, \quad x^3 = \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{2}{5} E_3 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{5} E_1 .$$

En utilisant la parité, on obtient alors

$$\begin{aligned} L(E_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (x-t)^3 dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 (x^3 + 3xt^2) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} (x^3 + x) = \frac{4}{5\sqrt{7}} E_3 + \frac{16}{5\sqrt{3}} E_1 , \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} L(E_1) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t(x-t)^3 dt = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 (-3x^2 t^2 - t^4) dt \\ &= -2 \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{5} \right) = -\frac{4}{\sqrt{15}} E_2 - \frac{16}{5\sqrt{3}} E_0 . \end{aligned}$$

En utilisant le fait que E_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ et aux polynômes n'ayant pas la même parité que k , on a aussi

$$\begin{aligned} L(E_2) &= \int_{-1}^1 E_2(t)(x-t)^3 dt = \int_{-1}^1 E_2(t)(3xt^2) dt \\ &= 3\sqrt{\frac{2}{5}} \frac{2}{3} x \int_{-1}^1 E_2(t)^2 dt = \frac{4}{\sqrt{15}} E_1, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} L(E_3) &= \int_{-1}^1 E_3(t)(x-t)^3 dt = \int_{-1}^1 E_3(t)(-t^3) dt \\ &= -\sqrt{\frac{2}{7}} \frac{2}{5} \int_{-1}^1 E_3(t)^2 dt = -\frac{4}{5\sqrt{7}} E_0, \end{aligned}$$

ce qui donne la matrice de L dans la base orthonormée

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{16}{5\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{5\sqrt{7}} \\ \frac{16}{5\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{15}} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On constate que la matrice est bien antisymétrique.

On calcule le polynôme caractéristique de A par la formule

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \lambda^k d_{4-k} + \lambda^4,$$

où d_p est la somme des déterminants d'ordre p extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale. La matrice étant antisymétrique, on a immédiatement pour les déterminants d'ordre impair

$$d_1 = d_3 = 0.$$

Ensuite, en développant par rapport aux dernières lignes,

$$d_4 = \det A = \left(\frac{4}{5\sqrt{7}}\right)^2 \left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{2^8}{5^3 \times 21}.$$

Les déterminants d'ordre 2 extraits sont au nombre de 6. Il y en a trois qui sont nuls. On obtient

$$\begin{aligned} d_2 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{16}{5\sqrt{3}} \\ \frac{16}{5\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{5\sqrt{7}} \\ \frac{4}{5\sqrt{7}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{15}} \\ -\frac{4}{\sqrt{15}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{16}{5\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{2^5}{7}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + \frac{2^5}{7} \lambda^2 + \frac{2^8}{5^3 \times 21}.$$

Les valeurs propres (elles sont imaginaires pures) sont alors

$$\frac{4i}{\sqrt{35}} \sqrt{4 \sqrt{\frac{23}{15}} + 5}, \quad \frac{4i}{\sqrt{35}} \sqrt{-4 \sqrt{\frac{23}{15}} + 5}, \quad -\frac{4i}{\sqrt{35}} \sqrt{4 \sqrt{\frac{23}{15}} + 5}, \quad -\frac{4i}{\sqrt{35}} \sqrt{-4 \sqrt{\frac{23}{15}} + 5}.$$

3.3 Espaces de matrices

Exercice 75

1) Soit A une matrice carrée d'ordre n . Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n , à quelle condition définit-on un produit scalaire en posant

$$(M | N) = \text{tr}({}^tMAN).$$

2) Lorsque cette condition est satisfaite trouver l'adjoint des l'endomorphismes φ et ψ définis par

$$\varphi(M) = {}^tM \quad \text{et} \quad \psi(M) = \text{tr}(M)I.$$

Que se passe-t-il si $A = I$?

Solution

1) Notons $E(\lambda, \mu)$ la matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la λ -ième ligne et μ -ième colonne qui vaut 1. Avec les notations de Kronecker, on a donc

$$E(\lambda, \mu) = \left[\delta_{(\lambda, \mu)}^{(i, j)} \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

En posant

$$(M | N) = \text{tr}({}^tMAN),$$

on définit une application bilinéaire. Si l'on veut que cette application soit symétrique, on doit donc avoir, quelles que soient M et N

$$\operatorname{tr}({}^tMAN) = \operatorname{tr}({}^tNAM).$$

En particulier, prenons $M = E(\xi, \mu)$ et $N = E(\lambda, \mu)$. Calculons tout d'abord les éléments u_{ij} du produit AN . On a

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{(\lambda, \mu)}^{(k, j)}.$$

Dans cette somme, tous les termes sont nuls, sauf lorsque $k = \lambda$ et $j = \mu$. Alors

$$u_{i\mu} = a_{i\lambda},$$

sinon u_{ij} est nul et donc

$$u_{ij} = a_{i\lambda} \delta_{\mu}^j.$$

Calculons ensuite le terme v_{ij} de tMAN . Comme

$${}^tE(\xi, \mu) = E(\mu, \xi),$$

on a cette fois

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{(\mu, \xi)}^{(i, k)} u_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{(\mu, \xi)}^{(i, k)} a_{k\lambda} \delta_{\mu}^j.$$

Dans cette somme, tous les termes sont nuls sauf si $i = \mu$, $k = \xi$ et $\mu = j$ et dans ce cas

$$v_{\mu\mu} = a_{\xi\lambda},$$

donc

$$(E(\xi, \mu) | E(\lambda, \mu)) = a_{\xi\lambda},$$

et

$$(E(\lambda, \mu) | E(\xi, \mu)) = a_{\lambda\xi},$$

Alors, si la forme bilinéaire est symétrique, on a, quels que soient λ et ξ ,

$$a_{\xi\lambda} = a_{\lambda\xi},$$

ce qui implique que A est symétrique.

Réciproquement, si A est symétrique,

$$(M | N) = \operatorname{tr}({}^tMAN) = \operatorname{tr}({}^t({}^tMAN)) = \operatorname{tr}({}^tNAM) = (N | M),$$

et la forme bilinéaire est symétrique.

Si A est symétrique, elle se diagonalise dans une base orthonormée. Il existe S orthogonale telle que

$$SAS^{-1} = SA{}^tS = D = \left[d_{ij} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

soit diagonale. Alors

$$A = S^{-1}DS = {}^tSDS,$$

et

$$(M | M) = \text{tr}({}^t M A M) = \text{tr}({}^t M {}^t S D S M) = \text{tr}({}^t (S M) D (S M)).$$

Si l'on prend

$$M = S^{-1} E(\lambda, \mu),$$

on obtient

$$(M | M) = \text{tr}({}^t E(\lambda, \mu) D E(\lambda, \mu)) = d_{\mu\mu}.$$

Si la forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire, on doit donc avoir, quel que soit μ ,

$$(M | M) = d_{\mu\mu} > 0.$$

Les valeurs propres de la matrices A sont donc strictement positives.

Réciproquement, si A est une matrice symétrique définie positive, et si X et Y sont des vecteurs colonnes posons

$$\langle X, Y \rangle = {}^t X A Y.$$

Cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $(M_1, \dots, M_n)$ les colonnes de M . Alors

$${}^t M A M = \left[\langle M_i, M_j \rangle \right]_{1 \leq i, j \leq n},$$

et

$$(M | M) = \sum_{i=1}^n \langle M_i, M_i \rangle \geq 0.$$

De plus, si cette somme est nulle, alors pour tout i le produit scalaire $\langle M_i | M_i \rangle$ est nul, donc le vecteur M_i est nul et finalement M est nulle.

Finalement, la forme bilinéaire

$$(M | N) = \text{tr}({}^t M A N)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est une matrice symétrique définie positive.

2) Si l'on est dans ce cas, en particulier A est inversible. Alors

$$(\varphi(M) | N) = \text{tr}(M A N) = \text{tr}({}^t (M A N)) = \text{tr}({}^t N A {}^t M).$$

Mais en raison des propriétés de la trace

$$\text{tr}(({}^t N A) {}^t M) = \text{tr}({}^t M ({}^t N A)) = \text{tr}({}^t M A (A^{-1} {}^t N A)) = (M | A^{-1} {}^t N A).$$

Il en résulte que

$$\varphi^*(N) = A^{-1} {}^t N A.$$

D'autre part

$$(\psi(M) | N) = \text{tr}(M)(I | N) = \text{tr}(M) \text{tr}(A N) = \text{tr}({}^t M) \text{tr}(A N),$$

donc

$$(\psi(M) | N) = \text{tr}(\text{tr}(A N) {}^t M) = \text{tr}({}^t M A (\text{tr}(A N) A^{-1})).$$

Il en résulte que

$$\psi^*(N) = \text{tr}(A N) A^{-1}.$$

En particulier, si $A = I$, alors φ et ψ sont autoadjoints.

Chapitre 4

ENDOMORPHISME NORMAL

4.1 Généralités

Exercice 76

- 1) Soit A et B deux endomorphismes normaux d'un espace euclidien E . Montrer que si A et B^* commutent, alors AB , BA et $A + B$ sont normaux.
- 2) En déduire que si A est normal, alors, quel que soit le polynôme P , l'endomorphisme $P(A)$ est normal.
- 3) Montrer que si A est normal et inversible, alors A^{-1} est normal.

Solution

1) Puisque A et B sont normaux, on a donc

$$AA^* = A^*A \quad \text{et} \quad BB^* = B^*B,$$

avec de plus

$$AB^* = B^*A,$$

d'où l'on déduit

$$BA^* = (AB^*)^* = (B^*A)^* = A^*B.$$

Donc B et A^* commutent également. Alors

$$(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AB^*BA^* = B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*AB.$$

Donc AB et $(AB)^*$ commutent, ce qui montre que AB est normal, et en permutant les rôles de A et B , on en déduit que BA est aussi un opérateur normal.

Enfin

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B)^* &= (A+B)(A^*+B^*) = AA^* + AB^* + BA^* + BB^* \\ &= A^*A + B^*A + A^*B + B^*B \\ &= (A^*+B^*)(A+B) = (A+B)^*(A+B). \end{aligned}$$

Donc $A + B$ et $(A + B)^*$ commutent, ce qui montre que $A + B$ est normal.

2) On démontre par récurrence que $P(A)$ est normal pour tout polynôme P de degré n , ce qui est vrai si $n = 0$ car, si λ est un scalaire, l'endomorphisme λId_E est normal puisqu'il a pour adjoint $\bar{\lambda} \text{Id}_E$ et commute avec lui. Supposons la propriété vraie pour les polynômes de degré n .

Tout d'abord, si A et A^* commutent, on a, pour tout couple d'entiers (r, p) tels que $1 \leq p \leq r$,

$$A^p A^* A^{r-p} = A^{p-1} (A A^*) A^{r-p} = A^{p-1} A^* A^{r-p+1},$$

d'où l'on déduit que

$$A^r A^* = A^* A^r,$$

et que, pour tout polynôme P ,

$$P(A) A^* = A^* P(A).$$

Alors si $P(A)$ est normal, l'endomorphisme $AP(A)$ est normal, puis $AP(A) + \lambda \text{Id}_E$ est normal pour tout scalaire λ . Un polynôme Q de degré $n + 1$ peut s'écrire

$$Q(X) = XP(X) + \lambda,$$

où P est un polynôme de degré n et λ est un scalaire, et donc l'endomorphisme

$$Q(A) = AP(A) + \lambda \text{Id}_E$$

est normal, ce qui montre la propriété au rang $n + 1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

2) Si A est inversible, il en est de même de A^* et

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Alors

$$(AA^*)^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^* A^{-1},$$

et de même

$$(A^* A)^{-1} = A^{-1} (A^*)^{-1} = A^{-1} (A^{-1})^*.$$

Comme

$$AA^* = A^* A,$$

on a aussi

$$(AA^*)^{-1} = (A^* A)^{-1}.$$

Il en résulte que

$$(A^{-1})^* A^{-1} = A^{-1} (A^{-1})^*,$$

donc A^{-1} est normal.

Exercice 77

Soit A un endomorphisme normal d'un espace euclidien E . Montrer que

$$\text{Ker } A = \text{Ker}(AA^*) = \text{Ker } A^*.$$

En déduire que

$$\text{Ker } A = \text{Ker } A^2,$$

et que si λ est une valeur propre de A associée au sous-espace propre F , alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A^* associée au même sous-espace propre F .

Si E est de dimension finie, montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Que peut-on dire des valeurs propres de A si A est autoadjoint ou antiautoadjoint ?

Solution

Puisque $AA^* = A^*A$, on a l'inclusion

$$\text{Ker } A \subset \text{Ker}(A^*A) = \text{Ker}(AA^*).$$

D'autre part, si x appartient à $\text{Ker}(AA^*)$, on a

$$\|A(x)\|^2 = (A(x) | A(x)) = (x | A^*A(x)) = (x | AA^*(x)) = (x | 0) = 0.$$

donc $A(x)$ est nul et x appartient à $\text{Ker } A$. On a donc l'égalité

$$\text{Ker } A = \text{Ker}(AA^*).$$

En appliquant cette égalité à A^* on a aussi

$$\text{Ker } A^* = \text{Ker}(A^*A) = \text{Ker}(AA^*).$$

L'endomorphisme A^2 étant lui aussi normal, on a

$$\text{Ker } A^2 = \text{Ker}(A^2(A^*)^2).$$

Mais

$$A^2(A^*)^2 = AA^*AA^* = (AA^*)(AA^*)^*,$$

et puisque AA^* est normal

$$\text{Ker}((AA^*)(AA^*)^*) = \text{Ker}(AA^*) = \text{Ker } A.$$

Finalement

$$\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A.$$

Maintenant, si λ est une valeur propre de A , alors $A - \lambda \text{Id}_E$ est normal, donc

$$\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_E)^* = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda} \text{Id}_E),$$

ce qui montre que si λ est une valeur propre de A alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A^* et que ces valeurs propres sont associées au même sous-espace propre.

On a aussi

$$\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_E)^2 = \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_E).$$

Il en résulte que si E est de dimension finie, quel que soit la valeur propre λ , le sous-espace spectral associé à λ n'est autre que le sous-espace propre et donc que A est diagonalisable.

Il reste à voir que deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Soit x et y deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ et μ de A . Alors

$$\text{Ker}(A - \mu \text{Id}_E) = \text{Ker}((A - \mu \text{Id}_E)^*) = \text{Ker}(A^* - \bar{\mu} \text{Id}_E),$$

et donc

$$\bar{\lambda}(x | y) = (\lambda x | y) = (A(x) | y) = (x | A^*(y)) = (x | \bar{\mu}y) = \bar{\mu}(x | y).$$

Comme λ est distinct de μ , cela implique que $(x | y)$ est nul, d'où l'orthogonalité des deux sous-espaces propres.

Si $A^* = A$, alors $\bar{\lambda}$ et λ sont deux valeurs propres de A^* associées au même sous-espace propre et sont donc égales, ce qui montre que λ est réelle.

Si $A^* = -A$, alors $\bar{\lambda}$ et $-\lambda$ sont deux valeurs propres de A^* associées au même sous-espace propre et sont donc égales, ce qui montre que λ est imaginaire pure.

Exercice 78

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est la matrice dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'un endomorphisme normal si et seulement si il existe deux matrices, S symétrique, et A antisymétrique, qui commutent, telles que

$$M = S + A.$$

Quelles relations existent-ils entre les valeurs propres et vecteurs propres complexes de ces matrices M , S et A ?

Solution

Si M est la matrice d'un endomorphisme normal dans une base orthonormée, posons

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

Alors S est symétrique et A antisymétrique avec de plus

$$S + A = M.$$

Par ailleurs

$$SA = \frac{1}{4}(M + {}^tM)(M - {}^tM) = \frac{1}{4}(M^2 - {}^tM^2 - M{}^tM + {}^tMM),$$

et puisque M et tM commutent

$$SA = \frac{1}{4}(M^2 - {}^tM^2).$$

On obtient le même résultat en calculant AS , donc A et S commutent.

Inversement, si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit dans une base orthonormée

$$M = S + A$$

avec S symétrique et M antisymétrique, alors

$$M {}^tM = (S + A)(S - A) = S^2 - A^2 - SA + AS.$$

Donc, si A et S commutent,

$$M {}^tM = S^2 - A^2.$$

On obtient le même résultat en calculant tMM . Alors tM et M commutent et M est la matrice d'un endomorphisme normal dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Comme A et S commutent, il existe une base complexe qui les diagonalise toutes les deux. Par ailleurs les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles et celles d'une matrice antisymétrique imaginaires pures. Donc, il existe une base de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$ commune à A et S , pour laquelle

$$SV_k = x_k V_k \quad \text{et} \quad AV_k = iy_k V_k.$$

Alors

$$MV_k = (x_k + iy_k)V_k$$

et $x_k + iy_k$ est valeur propre de M associée au vecteur propre V_k .

Exercice 79

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme normal. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A , ainsi qu'une matrice S telle que S^*AS soit diagonale.

Solution

On écrit

$$A = 3I + V,$$

où

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

est une matrice antisymétrique. Alors

$${}^tA = {}^t(3I + V) = 3I - V,$$

et

$$A {}^tA = {}^tAA = 9I - V^2.$$

Comme A et tA commutent, la matrice A est la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme normal.

On a

$$A - \lambda I = (3 - \lambda)I + V,$$

et λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda - 3$ est valeur propre de V . Comme V est antisymétrique, ses valeurs propres sont 0, αi et $-\alpha i$ avec α réel. En développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\det(V - XI) = \begin{vmatrix} -X & -2 & -1 \\ 2 & -X & -2 \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + 4) + 2(-2X + 2) - (4 + X) = -X^3 - 9X.$$

Les valeurs propres de V sont donc 0, $3i$, $-3i$ et celles de A sont 3, $3 + 3i$ et $3 - 3i$.

Cherchons les vecteurs (x, y, z) des sous-espaces propres.

Pour la valeur propre 3, le système s'écrit

$$\begin{cases} -2y - z &= 0 \\ 2x - 2z &= 0 \end{cases}.$$

En prenant $y = 1$, on trouve $z = -2$ et $x = -2$ et en normant on obtient finalement

$$V_1 = \frac{1}{3}(-2, 1, -2).$$

Pour la valeur propre $3 + 3i$, le système devient

$$\begin{cases} -3ix - 2y - z &= 0 \\ x + 2y - 3iz &= 0 \end{cases}.$$

En additionnant les deux lignes, on trouve,

$$(1 - 3i)x - (1 + 3i)z = 0,$$

d'où

$$z = \frac{1 - 3i}{1 + 3i}x = \frac{(1 - 3i)^2}{10}x = \frac{-8 - 6i}{10}x = \frac{-4 - 3i}{5}x.$$

Ensuite

$$y = \frac{-3ix - z}{2} = \frac{1}{2} \left(-3ix + \frac{4 + 3i}{5}x \right) = \frac{2 - 6i}{5}x.$$

En prenant $x = -5$ on trouve $(-5, -2 + 6i, 4 + 3i)$. La norme de ce vecteur vaut

$$25 + 4 + 36 + 16 + 9 = 90,$$

d'où le vecteur normé

$$V_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(-5, -2 + 6i, 4 + 3i).$$

Pour la valeur propre $3 - 3i$, on obtient un vecteur propre en prenant le conjugué du précédent, soit

$$V_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(-5, -2 - 6i, 4 - 3i).$$

Une matrice S s'obtient alors en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs propres (V_1, V_2, V_3) , donc

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-5}{3\sqrt{10}} & \frac{-5}{3\sqrt{10}} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2+6i}{3\sqrt{10}} & \frac{-2-6i}{3\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4+3i}{3\sqrt{10}} & \frac{4-3i}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S^*AS = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3-3i \end{bmatrix}.$$

4.2 Isométries

Exercice 80

Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique (donnant l'orientation de $\mathbb{R}^2$). Trouver les valeurs propres complexes de A et diagonaliser A dans $\mathbb{C}^2$. Quelle est la nature de f ?

Solution

La matrice A est de l'un des deux types suivants :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

1) Pour la première matrice,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1.$$

Le trinôme a pour racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ces nombres sont réels si et seulement si $\theta = k\pi$ avec k entier et dans ce cas

$$A = (-1)^k I,$$

donc f est l'identité si k est pair, la symétrie par rapport à O (= rotation d'angle π), si k est impair.

Supposons maintenant $\theta \neq k\pi$. Alors f est une rotation d'angle θ . Cherchons le sous-espace propre associé à $e^{i\theta}$: c'est la droite d'équation complexe

$$x(\cos \theta - e^{i\theta}) - y \sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$-ix \sin \theta - y \sin \theta = 0,$$

et finalement

$$ix + y = 0.$$

On prend $(1, -i)$ comme base de ce sous-espace. Alors le sous-espace associé à la valeur propre conjuguée a pour base $(1, i)$. En normant ces vecteurs on obtient la matrice de passage unitaire

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$P^{-1} = P^* = {}^t\overline{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix},$$

ce qui reste vrai si $\theta = k\pi$.

2) Pour la seconde matrice,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Les deux valeurs propres sont réelles et valent 1 et -1 .

Cherchons le sous-espace propre D_1 associé à 1. Si $\theta \neq 2k\pi$ c'est la droite vectorielle d'équation

$$x(\cos \theta - 1) + y \sin \theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$-2x \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0,$$

et finalement

$$-x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

On prend $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ comme base de ce sous-espace. On vérifie que cela reste valable si $\theta = 2k\pi$.

Le sous-espace D_2 associé à -1 est orthogonal au précédent. Il est engendré par $(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$ ce qui donne la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

C'est une matrice orthogonale et

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_1 .

Exercice 81

Déterminer les nombres x, y, z , pour que les matrices suivantes soient des matrices de rotation dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & x \\ y & z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & 1/7 \\ y & z \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & z \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1/3 & x \\ y & z \end{bmatrix}.$$

Solution

Les matrices de rotation sont de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Matrice A

On doit avoir

$$z = 1/4, \quad x = -y \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 1,$$

ce qui donne les deux matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Matrice B

On doit avoir

$$y = -1/7, \quad x = z \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

ce qui donne les deux matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix}.$$

Matrice C

On doit avoir

$$z = 1, \quad x = -y \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

ce qui donne les deux matrices

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice D

On doit avoir

$$z = 1/3, \quad x = -y \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 1,$$

ce qui donne les deux matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Exercice 82

Soit (i, j) une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien orienté. On pose

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est la matrice dans la base (i, j) d'une rotation vectorielle f . On pose

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + j) \quad \text{et} \quad J = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i + j).$$

Montrer que (I, J) est une base orthonormée directe. Quelle est la matrice de f dans la base (I, J) ?

Solution

Les matrices de rotation sont, dans une base orthonormée directe, de la forme

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$, ce qui est le cas de la matrice A . Par ailleurs la matrice de (I, J) dans la base (i, j) vaut

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

C'est également une matrice de rotation, donc (I, J) est aussi une base orthonormée directe. La matrice de f dans la base (I, J) est encore A .

Exercice 83

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres réelles de A et les sous-espaces propres associés. Quelle est la nature de l'application linéaire de matrice A dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Solution

Calculons $\det(A - \lambda I)$. En ajoutant la troisième colonne à la deuxième, puis en développant par rapport à la première ligne on obtient

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 - \lambda & -\sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{3}/2 & -\lambda & -\sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2} - \lambda & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(-\lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2} - \lambda)\right) + \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2} - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \\ &= (1 - \lambda^3) + (\lambda - 1) \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (1 - \lambda) \left(1 + \lambda + \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= (1 - \lambda) \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right). \end{aligned}$$

Le trinôme $\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 1$ a pour discriminant

$$\Delta = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{21 + 6\sqrt{2}}{8} < 0.$$

Il en résulte que la seule valeur propre réelle de A vaut 1.

Cherchons le sous-espace propre associé. Si (x, y, z) est un vecteur propre, il est solution du système

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)z = 0 \end{cases}.$$

En prenant $z = 1$, on obtient successivement

$$y = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad x = \sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

On vérifie facilement que les vecteurs colonnes de la matrice A forment une base orthonormée. Il résulte de ce qui précède que A est la matrice d'une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $(\sqrt{3} - \sqrt{6}, \sqrt{2} - 1, 1)$.

L'angle α de la rotation vérifie alors

$$1 + 2 \cos \alpha = \operatorname{tr} A = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2},$$

donc

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4}.$$

Exercice 84

Montrer que les matrices

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & i/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

sont les matrices d'endomorphismes unitaires de $\mathbb{C}^3$ dans une base orthonormée.

Solution

On rappelle que

$$j^3 = 1, \quad 1 + j + j^2 = 0, \quad \bar{j} = j^2, \quad \overline{j^2} = j.$$

On a alors

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & j \\ j^2 & 1 & j^2 \\ j & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

et l'on obtient $AA^* = I$.

On a aussi

$$B^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

et l'on obtient également $BB^* = I$.

Les matrices A et B sont donc bien des matrices d'endomorphismes unitaires de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 85

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 18 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est la matrice d'une rotation f dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Trouver l'axe de cette rotation. Déterminer une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la rotation a une matrice de la forme

$$B = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution

On vérifie que les vecteurs colonnes de A forment bien une base orthonormée. Par ailleurs, en ajoutant la première ligne à la troisième puis en mettant 19 en facteur

$$\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 18 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 19 & 19 & 0 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ensuite en ajoutant la première colonne à la deuxième et en développant par rapport à la troisième ligne

$$\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 6 & -6 & 17 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 19 & 6 \\ 6 & 0 & 17 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 19 \times 17 - 2(17 - 36) = 19 \times 17 + 2 \times 19 = 19^2.$$

Finalement

$$\det A = 1.$$

La matrice A est bien la matrice d'une rotation. On a

$$A - I = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -18 & 18 & 6 \\ 6 & -25 & 17 \\ 18 & 1 & -25 \end{bmatrix},$$

et un vecteur (x, y, z) de l'axe de rotation vérifie le système

$$\begin{cases} -18x + 18y + 6z &= 0 \\ 18x + y - 25z &= 0 \end{cases}.$$

En additionnant les deux lignes on trouve $y = z$, puis $18x = 24z$. On peut donc prendre comme base de l'axe de rotation le vecteur $(4, 3, 3)$ que l'on norme pour obtenir

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{34}} (4, 3, 3).$$

Le plan orthogonal à u_3 a pour équation

$$4x + 3y + 3z = 0.$$

Prenons un vecteur normé de ce plan. Par exemple

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1).$$

On obtient une base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) en prenant le vecteur

$$u_2 = u_3 \wedge u_1$$

que l'on calcule formellement, si (i, j, k) désigne la base naturelle de $\mathbb{R}^3$, en utilisant le déterminant

$$u_2 = \frac{1}{2\sqrt{17}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{17}}(-6i + 4j + 4k) = \frac{1}{\sqrt{17}}(-3, 2, 2).$$

Pour trouver B on a tout d'abord

$$f(u_1) = \frac{1}{19\sqrt{2}}(12, -23, 7).$$

Les nombres $\cos t$ et $\sin t$ sont les coordonnées de la projection de $f(u_1)$ sur le sous-espace engendré par u_1 et u_2 . On effectue les produits scalaires

$$\cos t = (u_1 | f(u_1)) = -\frac{15}{19} \quad \text{et} \quad \sin t = (u_2 | f(u_1)) = -\frac{2\sqrt{34}}{19}.$$

Remarque : on a aussi

$$2 \cos t + 1 = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B.$$

Exercice 86

Soit f_t un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans une base orthonormée est

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos^2 t & \sin^2 t & -\sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sin^2 t & \cos^2 t & \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t & -\sqrt{2} \sin t \cos t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

- 1) Vérifier que f_t est une isométrie. Calculer le déterminant de $A(t)$. Quelle est la nature de f_t ?
- 2) Trouver les éléments caractéristiques de f_t et donner une base orthonormée dans laquelle f_t ait une matrice de la forme

$$B(t) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 3) Diagonaliser $A(t)$ et trouver une matrice S telle que $S^{-1}A(t)S$ soit diagonale.
- 4) Montrer que l'ensemble des matrices $A(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$, est un sous-groupe du groupe des matrices $\mathcal{O}^+(3)$.

Solution

1) Soit (i, j, k) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$. On vérifie que les vecteurs colonnes $(f_t(i), f_t(j), f_t(k))$ de $A(t)$ forment une base orthonormée. Les vecteurs sont de norme 1. en effet

$$\|f_t(i)\|^2 = \|f_t(j)\|^2 = \cos^4 t + \sin^4 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 = 1,$$

et

$$\|f_t(k)\|^2 = 4 \sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 2t = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1.$$

Ensuite, de manière évidente,

$$(f_t(i) | f_t(j)) = 0,$$

puis

$$(f_t(i) | f_t(k)) = \sqrt{2} \sin t \cos t (-\cos^2 t + \sin^2 t + \cos 2t) = 0$$

et

$$(f_t(j) | f_t(k)) = \sqrt{2} \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t - \cos 2t) = 0.$$

Les vecteurs sont bien deux à deux orthogonaux.

Calculons le déterminant de $A(t)$. En additionnant la deuxième ligne à la première, puis en soustrayant la première colonne de la deuxième, on a successivement

$$\begin{aligned} \det A(t) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sin^2 t & \cos^2 t & \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t & -\sqrt{2} \sin t \cos t & \cos 2t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin^2 t & \cos 2t & \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t & -2\sqrt{2} \sin t \cos t & \cos 2t \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 2t + 4 \sin^2 t \cos^2 t = 1. \end{aligned}$$

Donc f_t est une rotation ou l'identité. Cette seconde situation a lieu si et seulement si le nombre $\sin t$ est nul c'est-à-dire pour $t = k\pi$ avec k entier. On suppose dans ce qui suit que l'on n'est pas dans ce cas.

2) L'axe de rotation Δ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. On a

$$A(t) - I = \begin{bmatrix} -\sin^2 t & \sin^2 t & -\sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sin^2 t & -\sin^2 t & \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t & -\sqrt{2} \sin t \cos t & -2 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

On constate que

$$(f_t - \text{Id})(i) = -(f_t - \text{Id})(j),$$

ce qui signifie que le vecteur $i + j$ est une base de l'axe de rotation. En normant ce vecteur on prend

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Le plan orthogonal à ce vecteur a pour équation

$$x + y = 0.$$

On peut donc prendre comme vecteur unitaire de ce plan le vecteur

$$u_1 = (0, 0, 1).$$

On obtient une base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) en prenant le vecteur

$$u_2 = u_3 \wedge u_1,$$

que l'on calcule formellement en utilisant le déterminant

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i - j) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0).$$

Pour trouver $B(t)$ on part de

$$f_t(u_1) = (-\sqrt{2} \sin t \cos t, \sqrt{2} \sin t \cos t, \cos 2t).$$

Les nombres $\cos x$ et $\sin x$ sont alors les coordonnées de la projection de $f(u_1)$ sur le sous-espace engendré par u_1 et u_2 . On effectue les produits scalaires

$$\cos x = (u_1 | f_t(u_1)) = \cos 2t \quad \text{et} \quad \sin x = (u_2 | f_t(u_1)) = -\sin 2t.$$

On peut donc prendre $x = -2t$. L'application f_t est une rotation d'angle $-2t$ autour de l'axe orienté par le vecteur u_3 .

3) Les valeurs propres complexes de f_t sont donc $1, e^{2it}, e^{-2it}$. Posons $\lambda = e^{2it}$. On a alors

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \cos^2 t - \lambda & \sin^2 t & -\sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sin^2 t & \cos^2 t - \lambda & \sqrt{2} \sin t \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \cos t & -\sqrt{2} \sin t \cos t & -i \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Un vecteur propre (x, y, z) est solution du système

$$\begin{cases} (\cos^2 t - \lambda)x + (\sin^2 t)y - (\sqrt{2} \sin t \cos t)z = 0 \\ (\sin^2 t)x + (\cos^2 t - \lambda)y + (\sqrt{2} \sin t \cos t)z = 0 \\ \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}x - \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}y - (i \sin 2t)z = 0 \end{cases}.$$

En additionnant la deuxième ligne à la première on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + (1 - \lambda)y = 0 \\ (\sin^2 t)x + (\cos^2 t - \lambda)y + (\sqrt{2} \sin t \cos t)z = 0 \\ \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}x - \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}y - (i \sin 2t)z = 0 \end{cases},$$

qui équivaut encore au système

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y - i\sqrt{2}z &= 0 \end{cases}.$$

Un vecteur directeur unitaire du sous-espace propre est par exemple $\frac{1}{2}(1, -1, -i\sqrt{2})$, et pour l'autre sous-espace propre un vecteur directeur est le vecteur propre conjugué $\frac{1}{2}(1, -1, i\sqrt{2})$. On obtient la matrice S unitaire

$$S = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$$S^*AS = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2it} \end{bmatrix}.$$

4) Toutes les rotations ont le même axe Δ et les rotations d'axe Δ et d'angle $-2t$ constituent un sous-groupe de $\mathcal{O}^+(3)$.

Exercice 87

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & 1 & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie. Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par f .

Solution

Comme on a

$$(\sqrt{2}+1)^2 + 1 + (\sqrt{2}-1)^2 + 1 = 8,$$

on constate que les vecteurs colonnes de la matrice A sont de norme 1. On vérifie aussi qu'ils sont deux à deux orthogonaux et constituent donc une base orthonormée. Il en résulte que f est une isométrie. Cherchons le polynôme caractéristique de la matrice $A' = 2\sqrt{2}A$.

$$\det(A' - \lambda'I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda' & \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1 - \lambda' & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & 1 - \lambda' & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 & 1 - \lambda' \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la somme des trois dernières lignes à la première, on peut alors mettre $2\sqrt{2} - \lambda'$ en facteur et l'on obtient

$$\det(A' - \lambda'I) = (2\sqrt{2} - \lambda') \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 - \lambda' & \sqrt{2} + 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} - 1 & 1 - \lambda' & \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2} + 1 & -1 & \sqrt{2} - 1 & 1 - \lambda' \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première colonne aux autres, et en développant par rapport à la première ligne, on obtient ensuite

$$\det(A' - \lambda'I) = (2\sqrt{2} - \lambda') \begin{vmatrix} 2 - \sqrt{2} - \lambda' & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 - \lambda' & \sqrt{2} + 2 \\ -2 - \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} - \lambda' \end{vmatrix}.$$

Si l'on ajoute la troisième ligne à la première, le nombre $(-2\sqrt{2} - \lambda')$ se met en facteur et

$$\det(A' - \lambda'I) = (2\sqrt{2} - \lambda')(-2\sqrt{2} - \lambda') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 - \lambda' & \sqrt{2} + 2 \\ -2 - \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} - \lambda' \end{vmatrix}.$$

On soustrait la première colonne de la troisième et on développe par rapport à la première ligne. Il vient

$$\det(A' - \lambda'I) = (2\sqrt{2} - \lambda')(-2\sqrt{2} - \lambda') \begin{vmatrix} 2 - \lambda' & 2 \\ -2 & 2 - \lambda' \end{vmatrix}.$$

Finalement

$$\det(A' - \lambda'I) = (2\sqrt{2} - \lambda')(-2\sqrt{2} - \lambda')((2 - \lambda')^2 + 4).$$

Les valeurs propres de A' sont donc

$$\lambda'_1 = 2\sqrt{2} \quad , \quad \lambda'_2 = -2\sqrt{2} \quad , \quad \lambda'_3 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad \lambda'_4 = 2 - 2i.$$

On obtient les valeurs propres de A en divisant celles de A' par $2\sqrt{2}$ ce qui donne

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad \lambda_4 = e^{-i\pi/4}.$$

Comme on obtient quatre valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Cherchons les sous-espaces propres F_1 et F_2 associés respectivement à 1 et -1 . On a

$$A - I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 & -1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 - 2\sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} - 1 & 1 - 2\sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2} + 1 & -1 & \sqrt{2} - 1 & 1 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

On constate que la somme des quatre colonnes est nulle. Un vecteur générateur de F_1 est donc le vecteur $(1, 1, 1, 1)$.

On a aussi

$$A + I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1+2\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & 1+2\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 & -1 & \sqrt{2}-1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

On constate que la somme des colonnes 1 et 3 est égale à celle des colonnes 2 et 4. Un vecteur générateur de F_2 est donc le vecteur $(1, -1, 1, -1)$.

Les deux vecteurs précédents engendrent un plan vectoriel et le plan F_3 qui lui est orthogonal est stable par f . On constate que les deux vecteurs $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ sont orthogonaux à F_1 et F_2 , orthogonaux entre eux et engendrent donc F_3 .

Les sous-espaces $\{0\}$, F_1 , F_2 , F_3 sont stables par f . Les autres sous-espaces stables par f s'obtiennent alors par somme directe des précédents

$$F_1 \oplus F_2, \quad F_1 \oplus F_3, \quad F_2 \oplus F_3, \quad F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}^4.$$

Exercice 88

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres complexes de A . Quelle est la nature de A ?

Solution

On constate que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée. La matrice A est donc la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée.

Cherchons le polynôme caractéristique de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 - \lambda & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} - \lambda & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la deuxième colonne de la première on obtient

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 + \lambda & -1/2 - \lambda & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} - \lambda & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Puis en additionnant la somme des trois dernières lignes à la première, puis la quatrième ligne à la deuxième

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 2 + \lambda & -1 - \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} - \lambda & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}.$$

On développe alors par rapport à la troisième colonne

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} 2 + \lambda & -1 - \lambda & -\lambda \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} - (1/\sqrt{2} + \lambda) \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda \\ 2 + \lambda & -1 - \lambda & -\lambda \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Il reste à calculer les deux déterminants d'ordre 3. Tout d'abord, en développant par rapport à la deuxième ligne,

$$\begin{aligned} -\lambda \begin{vmatrix} 2 + \lambda & -1 - \lambda & -\lambda \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} &= -\frac{\lambda}{2} \left[(2 + \lambda) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right) + \lambda \right] \\ &= -\frac{\lambda}{2} \left(\sqrt{2} - \lambda + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \lambda^2 \right) \\ &= \frac{\lambda^3}{2} + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Pour l'autre déterminant, on peut soustraire la première ligne de la deuxième et développer ensuite par rapport à la troisième colonne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda \\ 2 + \lambda & -1 - \lambda & -\lambda \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda \\ \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left(-\frac{\lambda}{2} + 1 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right) (-2 + \lambda^2) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} - \lambda - \sqrt{2} + 2\lambda + \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} - \lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \lambda - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} -(1/\sqrt{2} + \lambda) \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -\lambda \\ 2 + \lambda & -1 - \lambda & -\lambda \\ 1 & -1/2 & 1/\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} &= -\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \lambda - \sqrt{2} \right) \\ &= \lambda^4 - \frac{\lambda^3}{2} - \lambda^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + 1. \end{aligned}$$

Finalement

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \lambda^2 + 1,$$

que l'on peut factoriser en écrivant

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (\lambda^2 + 1)^2 - \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \lambda^2 \\ &= \left(\lambda^2 + \lambda \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + 1\right) \left(\lambda^2 - \lambda \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + 1\right).\end{aligned}$$

Soit α tel que

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

On a alors

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 + 2\lambda \cos \alpha + 1)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1)$$

et les valeurs propres sont donc

$$e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}, e^{i(\alpha+\pi)}, e^{-i(\alpha+\pi)}.$$

Comme le déterminant de A vaut 1, la matrice A se trouve dans $\mathcal{O}^+(4)$.

Exercice 89

Soit a et b deux nombres réels et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & 0 & \sin a & \cos a \\ \cos b & -\sin b & 0 & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est orthogonale. Trouver S unitaire telle que S^*AS soit diagonale. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle f ait une matrice de la forme

$$B = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix},$$

où U et V sont deux matrices orthogonales de $\mathbb{R}^2$.

Solution

On a

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{p=0}^3 (-1)^p \lambda^p d_{4-p} + \lambda^4$$

où d_k est la somme des déterminants d'ordre k extraits de A qui sont symétriques par rapport à la diagonale principale. On calcule donc

$$d_4 = \det A = \begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix} = 1,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos a \\ 0 & 0 & \sin a \\ \cos b & -\sin b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sin a \\ 0 & 0 & \cos a \\ \sin b & \cos b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cos a & -\sin a \\ \cos b & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \sin a & \cos a \\ -\sin b & 0 & 0 \\ \cos b & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & \cos a \\ \cos b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\sin a \\ \sin b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \sin a \\ -\sin b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cos a \\ \cos b & 0 \end{vmatrix} = 2(-\cos a \cos b + \sin a \sin b) = -2 \cos(a+b),$$

et finalement

$$d_1 = \text{tr } A = 0.$$

On obtient donc le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos(a+b) + 1.$$

On peut écrire

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 - 2\lambda^2(\cos(a+b) + 1) = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 \cos^2 \frac{a+b}{2},$$

et finalement

$$P(\lambda) = \left(\lambda^2 - 2\lambda \cos \frac{a+b}{2} + 1 \right) \left(\lambda^2 + 2\lambda \cos \frac{a+b}{2} + 1 \right).$$

Si $a+b = 2k\pi$ avec k entier, on trouve

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2,$$

et les nombres 1 et -1 sont valeurs propres doubles.

Si $a+b = (2k+1)\pi$ avec k entier, on obtient cette fois

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2,$$

et les nombres i et $-i$ sont valeurs propres doubles.

Si $a+b \neq k\pi$ avec k entier, on obtient quatre valeurs propres distinctes. Notons la première

$$\lambda = e^{i(a+b)/2}.$$

Les trois autres sont $\bar{\lambda}$, $-\lambda$ et $-\bar{\lambda}$.

Cherchons dans ce cas une base du sous-espace propre associé à λ . Un vecteur (x, y, z, t) de ce sous-espace vérifie le système (S) suivant :

$$\begin{cases} -\lambda x + z \cos a - t \sin a &= 0 \\ -\lambda y + z \sin a + t \cos a &= 0 \\ x \cos b - y \sin b - \lambda z &= 0 \\ x \sin b + y \cos b - \lambda t &= 0 \end{cases}.$$

On multiplie la deuxième ligne par $-i$ et on l'ajoute à la première. On trouve

$$-\lambda(x - iy) + e^{-ia}(z - it) = 0.$$

On multiplie la quatrième ligne par $-i$ et on l'ajoute à la troisième. On trouve

$$e^{-ib}(x - iy) - \lambda(z - it) = 0.$$

On obtient un système dont les inconnues sont $x - iy$ et $z - it$ et qui a pour déterminant

$$\lambda^2 - e^{-i(a+b)} = 2i \sin(a+b) \neq 0.$$

Il en résulte que

$$x - iy = z - it = 0.$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$\lambda x = it \cos a - t \sin a = ite^{ia},$$

d'où

$$x = e^{-i(a+b)/2} ie^{ia} t = ie^{-i(b-a)/2} t.$$

En prenant par exemple $t = e^{ib/2}$, on obtient, comme base de E_λ le vecteur

$$v_1 = (ie^{ia/2}, e^{ia/2}, ie^{ib/2}, e^{ib/2}).$$

Alors, comme base de $E_{-\lambda}$ on obtient

$$v_2 = \bar{v}_1 = (-ie^{-ia/2}, e^{-ia/2}, -ie^{-ib/2}, e^{-ib/2}).$$

Si l'on change λ en $-\lambda$ dans (S) , il suffit de changer x en $-x$ et y en $-y$, sans changer z et t . On obtient alors, comme base de $E_{-\lambda}$ le vecteur

$$v_3 = (-ie^{ia/2}, -e^{ia/2}, ie^{ib/2}, e^{ib/2}),$$

et comme base de $E_{-\bar{\lambda}}$ le vecteur

$$v_4 = (ie^{-ia/2}, -e^{-ia/2}, -ie^{-ib/2}, e^{-ib/2}).$$

Ces vecteurs sont tous de norme 2. On obtient donc la matrice S de changement de base

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ie^{ia/2} & -ie^{-ia/2} & -ie^{ia/2} & ie^{-ia/2} \\ e^{ia/2} & e^{-ia/2} & -e^{ia/2} & -e^{-ia/2} \\ ie^{ib/2} & -ie^{-ib/2} & ie^{ib/2} & -ie^{-ib/2} \\ e^{ib/2} & e^{-ib/2} & e^{ib/2} & e^{-ib/2} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est encore unitaire lorsque $a + b = k\pi$ et convient aussi dans ce cas.

Dans $\mathbb{R}^4$ on regroupe les vecteurs conjugués.

$$u_1 = \frac{v_1 - v_2}{2i} = \left(\cos \frac{a}{2}, \sin \frac{a}{2}, \cos \frac{b}{2}, \sin \frac{b}{2} \right) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \left(-\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}, -\sin \frac{b}{2}, \cos \frac{b}{2} \right),$$

ainsi que

$$u_3 = \frac{v_3 - v_4}{2i} = \left(-\cos \frac{a}{2}, -\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{b}{2}, \sin \frac{b}{2} \right) \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{v_3 + v_4}{2} = \left(\sin \frac{a}{2}, -\cos \frac{a}{2}, -\sin \frac{b}{2}, \cos \frac{b}{2} \right).$$

Ces vecteurs sont de norme $\sqrt{2}$, ce qui donne la matrice de passage

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{a}{2} & -\sin \frac{a}{2} & -\cos \frac{a}{2} & \sin \frac{a}{2} \\ \sin \frac{a}{2} & \cos \frac{a}{2} & -\sin \frac{a}{2} & -\cos \frac{a}{2} \\ \cos \frac{b}{2} & -\sin \frac{b}{2} & \cos \frac{b}{2} & -\sin \frac{b}{2} \\ \sin \frac{b}{2} & \cos \frac{b}{2} & \sin \frac{b}{2} & \cos \frac{b}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la matrice de f dans la nouvelle base, on part du fait que

$$v_1 = u_2 + iu_1 \quad \text{et} \quad v_2 = u_2 - iu_1,$$

et l'on calcule $f(u_1)$ et $f(u_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \frac{1}{2i}(f(v_1) - f(v_2)) = \frac{1}{2i}(\lambda v_1 - \bar{\lambda} v_2) \\ &= \frac{1}{2i}(\lambda(u_2 + iu_1) - \bar{\lambda}(u_2 - iu_1)) \\ &= \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} u_1 + \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} u_2 \\ &= \cos \frac{a+b}{2} u_1 + \sin \frac{a+b}{2} u_2, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} f(u_2) &= \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)) = \frac{1}{2}(\lambda v_1 + \bar{\lambda} v_2) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda(u_2 + iu_1) + \bar{\lambda}(u_2 - iu_1)) \\ &= -\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} u_1 + \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} u_2 \\ &= -\sin \frac{a+b}{2} u_1 + \cos \frac{a+b}{2} u_2. \end{aligned}$$

Les résultats sont analogues avec les deux autres vecteurs en changeant λ en $-\lambda$. Seuls les signes changent et finalement on obtient

$$B = \begin{bmatrix} \cos \frac{a+b}{2} & -\sin \frac{a+b}{2} & 0 & 0 \\ \sin \frac{a+b}{2} & \cos \frac{a+b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \frac{a+b}{2} & \sin \frac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{a+b}{2} & -\cos \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}.$$

Ce changement de variable reste valable si $a + b = 2k\pi$. On obtient dans ce cas

$$B = (-1)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

et si $a + b = (2k + 1)\pi$. On obtient alors

$$B = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc dans tous les cas

$$U = -V = \begin{bmatrix} \cos \frac{a+b}{2} & -\sin \frac{a+b}{2} \\ \sin \frac{a+b}{2} & \cos \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercice 90

Soit h un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) h est une isométrie ;
- (ii) h conserve le produit hermitien ;
- (iii) h est unitaire .

Solution

(i) $\Rightarrow$ (ii)

On a pour tout vecteur x de E ,

$$\|h(x)\| = \|x\|.$$

D'autre part, quels que soient x et y dans E , on obtient en développant

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) = 4(x|y).$$

Alors

$$\begin{aligned} (h(x)|h(y)) &= \frac{1}{4}(\|h(x) + h(y)\|^2 - \|h(x) - h(y)\|^2) = \frac{1}{4}(\|h(x + y)\|^2 - \|h(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = (x|y). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Si l'on a, quels que soient x et y dans E ,

$$(h(x) | h(y)) = (x | y),$$

on en déduit

$$(x | h^*h(y)) = (x | y),$$

puis

$$(x | h^*h(y) - y) = 0,$$

et, quel que soit y dans E , le vecteur $h^*h(y) - y$ est orthogonal à E donc est nul. Alors

$$h^*h = \text{Id}_E,$$

ou encore

$$h^{-1} = h^*,$$

ce qui montre que h est unitaire.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Si h est unitaire

$$\|h(x)\|^2 = (h(x) | h(x)) = (x | h^*h(x)) = (x | x) = \|x\|^2,$$

donc h est une isométrie.

Exercice 91

Combien y a-t'il de matrices à la fois orthogonales et triangulaires ?

Solution

La transposée d'une telle matrice serait de même type. On peut donc se contenter de regarder des matrices triangulaires supérieures. Comme de plus la matrice est inversible, les éléments diagonaux sont non nuls.

Soit donc A une matrice triangulaire supérieure orthogonale. Ses éléments a_{ij} sont nuls si $i > j$.

En écrivant que tAA est la matrice unité, le coefficient c_{ij} de ce produit est nul si $i \neq j$ et l'on a alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^{\inf(i,j)} a_{ki}a_{kj} = 0.$$

En particulier, si $i < j$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^i a_{ki}a_{kj} = 0.$$

On veut montrer que A est diagonale. Pour cela, on démontre par récurrence que, pour k compris entre 1 et $n-1$, on a la propriété

$$(H_k) \quad (\forall j \in [k+1, n] \quad a_{kj} = 0).$$

Tout d'abord, si $j \geq 2$,

$$c_{1j} = a_{11}a_{1j} = 0,$$

donc a_{1j} est nul et l'on a la propriété (H_1) .

Supposons la propriété (H_k) vraie jusqu'à l'ordre $r < n - 1$. Alors, si $j > r + 1$,

$$c_{r+1,j} = 0 = \sum_{k=1}^{r+1} a_{k,r+1}a_{k,j} = a_{r+1,r+1}a_{r+1,j} + \sum_{k=1}^r a_{k,r+1}a_{k,j}.$$

Mais, lorsque $k \leq r < j$, le nombre $a_{k,j}$ est nul en raison de la propriété (H_k) , donc

$$0 = a_{r+1,r+1}a_{r+1,j}.$$

On en déduit que $a_{r+1,j}$ est nul, donc que l'on a la propriété (H_{r+1}) .

Alors la propriété (H_{n-1}) est vraie, ce qui signifie que A est diagonale. Mais, puisque A est orthogonale, les éléments diagonaux ne peuvent valoir que 1 ou -1 . Comme il y a deux possibilités pour chaque élément de la diagonale, le nombre de telles matrices est 2^n .

Exercice 92 Décomposition d'Iwasawa

Montrer que toute matrice G réelle d'ordre n inversible s'écrit de manière unique sous la forme

$$G = KT$$

où K est orthogonale, et T est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Ecrire la décomposition lorsque $n = 2$.

Solution

On considère que G est écrite dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et on note $(g_1, \dots, g_n)$ les colonnes de G . Soit $(u_1, \dots, u_n)$ la base orthonormée déduite de $(g_1, \dots, g_n)$ par le procédé de Schmidt. Par construction, la matrice qui a pour colonnes les vecteurs u_i exprimés dans la base $(g_1, \dots, g_n)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice inverse de cette dernière, notée T , possède les mêmes propriétés.

Alors

- la matrice T^{-1} est la matrice de passage de la base $(g_1, \dots, g_n)$ à la base $(u_1, \dots, u_n)$;
- la matrice G est la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(g_1, \dots, g_n)$.

Finalement, la matrice $K = GT^{-1}$ est la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(u_1, \dots, u_n)$, donc K est la matrice orthogonale exprimant les vecteurs u_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et l'on a

$$G = KT.$$

Reste à voir l'unicité de la décomposition. Supposons que l'on ait

$$G = KT = K'T'.$$

On a donc

$$K'^{-1}K = T'T^{-1}.$$

Or $K'^{-1}K$ est orthogonale, et $T'T^{-1}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. D'après l'exercice précédent, la seule possibilité est que

$$K'^{-1}K = T'T^{-1} = I,$$

ce qui montre l'unicité.

Si $n = 2$, et si la matrice G a un déterminant positif, alors il en est de même de K . Dans ce cas partons de l'égalité

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{bmatrix},$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} \lambda \cos t & = a \\ \mu \cos t - \nu \sin t & = b \\ \lambda \sin t & = c \\ \mu \sin t + \nu \cos t & = d \end{cases}.$$

On obtient en particulier

$$\lambda^2 = a^2 + c^2,$$

donc

$$\lambda = \sqrt{a^2 + c^2},$$

puis

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Cherchons μ et ν comme solutions du système

$$\begin{cases} \mu \cos t - \nu \sin t & = b \\ \mu \sin t + \nu \cos t & = d \end{cases}.$$

On trouve

$$\mu = \begin{vmatrix} b & -\sin t \\ d & \cos t \end{vmatrix} = b \cos t + d \sin t = \frac{ab + cd}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et

$$\nu = \begin{vmatrix} \cos t & b \\ \sin t & d \end{vmatrix} = d \cos t - b \sin t = \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\det A}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si $\det G$ est négatif, il en sera de même de celui de K et donc on part de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{bmatrix}.$$

On a cette fois le système

$$\begin{cases} \lambda \cos t & = a \\ \mu \cos t + \nu \sin t & = b \\ \lambda \sin t & = c \\ \mu \sin t - \nu \cos t & = d \end{cases}.$$

On obtient les mêmes résultats que précédemment en changeant simplement le signe de ν .

Exercice 93

1) Soit U et V deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que tVU soit symétrique et

$${}^tUU = \lambda I_2 \quad \text{et} \quad {}^tVV = \mu I_2,$$

où λ et μ sont des nombres réels. On pose

$$A = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}.$$

Calculer tAA .

2) Montrer que les matrices

$$U = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix},$$

vérifient les conditions de 1). En déduire le déterminant de A dans ce cas.

3) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 4 de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

telles que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

a) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_+(4)$.

b) Trouver les éléments de $\mathcal{H}$ qui commutent avec une matrice A de $\mathcal{H}$ donnée.

c) Résoudre dans $\mathcal{H}$ les équations $A^2 = I_4$, $A^2 = -I_4$ et $A^4 = I_4$.

d) Trouver les valeurs propres complexes de A .

Solution

1) Si tVU est symétrique, alors

$${}^tVU = {}^t({}^tVU) = {}^tUV.$$

Donc

$${}^tAA = \begin{bmatrix} {}^tU & {}^tV \\ -{}^tV & {}^tU \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tUU + {}^tVV & {}^tVU - {}^tUV \\ {}^tUV - {}^tVU & {}^tUU + {}^tVV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)I_2 & 0 \\ 0 & (\lambda + \mu)I_2 \end{bmatrix} = (\lambda + \mu)I_4.$$

2) Si l'on prend $U = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix}$ on a dans ce cas

$${}^tUU = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = (a^2 + b^2)I_2 \quad \text{et} \quad {}^tVV = V^2 = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} = (c^2 + d^2)I_2.$$

Enfin, la matrice

$${}^tVU = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + db & ad - bc \\ ad - bc & -ac - bd \end{bmatrix}$$

est bien symétrique. Donc

$${}^tAA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$

Alors, en prenant le déterminant,

$$(\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4.$$

Donc $\det A$ vaut, au signe près, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, et le signe est celui du coefficient de a^4 dans $\det A$ considéré comme un polynôme de la variable a . Mais le terme a^4 apparaît dans le déterminant de A comme produit des éléments diagonaux. Le signe est donc positif et

$$\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

3) a) Lorsque $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ vaut 1, la matrice A vérifie d'après ce qui précède

$${}^tAA = I_4 \quad \text{et} \quad \det A = 1,$$

et tous les coefficients sont inférieurs à 1 en valeur absolue. La matrice A est donc dans $\mathcal{O}_+(4)$. Par ailleurs ${}^tA = A^{-1}$ est aussi dans $\mathcal{H}$. Il reste à voir que $\mathcal{H}$ est stable par multiplication. Soit

$$A' = \begin{bmatrix} U' & -V' \\ V' & U' \end{bmatrix}$$

où

$$U' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V' = \begin{bmatrix} c' & d' \\ d' & -c' \end{bmatrix}.$$

Alors

$$AA' = \begin{bmatrix} UU' - VV' & -(UV' + VU') \\ UV' + VU' & UU' - VV' \end{bmatrix},$$

puis

$$UU' - VV' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' & d' \\ d' & -c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' & -(ab' + ba' + cd' - dc') \\ ab' + ba' + cd' - dc' & aa' - bb' - cc' - dd' \end{bmatrix},$$

et

$$UV' + VU' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' & d' \\ d' & -c' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' - bd' + ca' + db' & ad' + bc' - cb' + da' \\ ad' + bc' - cb' + da' & -(ac' - bd' + ca' + db') \end{bmatrix}.$$

De plus

$$\det(AA') = \det A \det A' = 1.$$

Il en résulte que si A et A' sont dans $\mathcal{H}$, alors AA' l'est aussi. Donc $\mathcal{H}$ est bien un sous-groupe de $\mathcal{O}_+(4)$.

3) b) Compte tenu des symétries des matrices, l'égalité $AA' = A'A$, qui se traduit par seize relations entre les coefficients, se réduit en fait à trois égalités distinctes

$$\begin{cases} ab' + ba' + cd' - dc' &= a'b + b'a + c'd - d'c \\ ac' - bd' + ca' + db' &= a'c - b'd + c'a + d'b \\ ad' + bc' - cb' + da' &= a'd + b'c - c'b + d'a \end{cases},$$

qui, après simplifications, se réduit encore à

$$\begin{cases} cd' - dc' = 0 \\ bd' - db' = 0 \\ bc' - cb' = 0 \end{cases}.$$

Cela se traduit par le fait que, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs (b, c, d) et (b', c', d') sont colinéaires. Si (b, c, d) est non nul, et donc $a^2 \neq 1$, il existe ξ tel que

$$(b', c', d') = \xi(b, c, d).$$

Dans ce cas

$$A' = (a' - \xi a)I_4 + \xi A.$$

Dans $\mathcal{H}$, on doit avoir

$$1 = a'^2 + \xi^2(b^2 + c^2 + d^2) = a'^2 + \xi^2(1 - a^2).$$

Pour tout choix de a' tel que $|a'| \leq 1$, on obtient deux valeurs de ξ possibles

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{1 - a'^2}{1 - a^2}}.$$

Si $(b, c, d) = (0, 0, 0)$, alors $A = \pm I_4$ et toutes les matrices commutent avec A .

3) c) L'égalité $A^2 = I_4$ équivaut à $A^{-1} = {}^tA = A$ et donc à $(b, c, d) = (0, 0, 0)$. On trouve $A = \pm I_4$.

L'égalité $A^2 = -I_4$ équivaut à $A^{-1} = {}^tA = -A$ et donc à $a = 0$. Les matrices sont antisymétriques et vérifient $b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Si l'on pose $B = A^2$, l'égalité $A^4 = I_4$ équivaut à $B^2 = I_4$, et comme B est dans $\mathcal{H}$, on trouve $B = \pm I_4$, et $B = A^2 = I_4$ ou $B = A^2 = -I_4$. Les matrices cherchées sont celles obtenus précédemment.

3) d) Si l'on étudie la matrice $A - \lambda I_4$, il résulte de la question 2) dans laquelle on remplace U par $U - \lambda I_2$, que

$$\det(A - \lambda I_4) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (\lambda^2 - 2a\lambda + 1)^2.$$

Si l'on pose $a = \cos \theta$, les valeurs propres de A sont alors les valeurs propres doubles $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

4.3 Endomorphismes autoadjoints - Matrices symétriques

Exercice 94

1) Soit A une matrice symétrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) quel que soit $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$;
- (ii) les valeurs propres de A sont strictement positives .

On dit alors que A est définie positive.

2) Montrer que les éléments diagonaux d'une matrice symétrique définie positive A sont strictement positifs. A-t-on la réciproque ?

Solution

1) La matrice A est diagonalisable. Si (i) a lieu, soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Alors

$${}^tVAV = \lambda {}^tVV = \lambda \|V\|^2 > 0,$$

ce qui implique $\lambda > 0$.

Réciproquement, si (ii) a lieu, soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres. Alors, si

$$X = \sum_{i=1}^n x_i V_i,$$

on a

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,$$

où λ_i est la valeur propre associée à V_i . Donc si X est non nul

$${}^tXAX > 0.$$

2) En prenant pour vecteur X le vecteur E_i de la base canonique dont tous les éléments sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1, on a

$${}^tE_i A E_i = a_{ii}.$$

Les éléments diagonaux de A sont donc strictement positifs si A est définie positive.

Par contre l'exemple de la matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dont les éléments diagonaux sont strictement positifs, mais qui admet comme polynôme caractéristique $X^2 - 2X - 3$ et a donc comme valeurs propres 3 et -1 , montre qu'une matrice peut avoir ses éléments diagonaux strictement positifs sans être définie positive.

Exercice 95 Factorisation et méthode de Choleski

1) Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n autoadjointe. On suppose que les matrices A_{n-k} extraites de A en enlevant les k dernières lignes et les k dernières colonnes ($0 \leq k \leq n-1$) ont un déterminant strictement positif. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure T dont les éléments diagonaux sont strictement positifs telle que

$$A = T^*T,$$

et que le coefficient diagonal t_{kk} de T vaut

$$t_{kk} = \sqrt{\frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}}.$$

2) En déduire que résoudre le système linéaire

$$AX = B,$$

revient à résoudre les deux systèmes triangulaires

$$T^*Y = B \quad \text{et} \quad TX = Y.$$

3) Appliquer cette méthode pour la résolution du système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 8y + 22z &= 8 \\ 3x + 22y + 82z &= 3 \end{cases}.$$

Solution

1) On démontre la propriété par récurrence sur n . Le résultat est évident pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Écrivons

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & U_{n-1} \\ U_{n-1}^* & a_{nn} \end{bmatrix}$$

où A_{n-1} est une matrice carrée d'ordre $n-1$, U_{n-1} une matrice colonne et a_{nn} un nombre réel, et cherchons une matrice triangulaire T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, telle que

$$T^*T = A.$$

On écrit

$$T = \begin{bmatrix} T_{n-1} & S_{n-1} \\ 0 & t_{nn} \end{bmatrix},$$

où T_{n-1} est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, S_{n-1} une matrice colonne et t_{nn} un réel strictement positif. On a alors

$$T^*T = \begin{bmatrix} T_{n-1}^* & 0 \\ S_{n-1}^* & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n-1} & S_{n-1} \\ 0 & t_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{n-1}^*T_{n-1} & T_{n-1}^*S_{n-1} \\ S_{n-1}^*T_{n-1} & S_{n-1}^*S_{n-1} + t_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & U_{n-1} \\ U_{n-1}^* & a_{nn} \end{bmatrix} = A.$$

Ceci équivaut au système

$$\begin{cases} T_{n-1}^* T_{n-1} &= A_{n-1} \\ T_{n-1}^* S_{n-1} &= U_{n-1} \\ S_{n-1}^* S_{n-1} + t_{nn}^2 &= a_{nn} \end{cases}.$$

La propriété au rang $n-1$ montre l'existence et l'unicité de la matrice triangulaire T_{n-1} . Les éléments diagonaux de cette matrice sont strictement positifs, donc la matrice a un déterminant non nul. Elle est inversible et la deuxième condition équivaut à

$$S_{n-1} = (T_{n-1}^*)^{-1} U_{n-1},$$

ce qui détermine S_{n-1} de manière unique.

Compte tenu de cette valeur, on a alors

$$S_{n-1}^* S_{n-1} = U_{n-1}^* (T_{n-1})^{-1} (T_{n-1}^*)^{-1} U_{n-1} = U_{n-1}^* (T_{n-1}^* T_{n-1})^{-1} U_{n-1} = U_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} U_{n-1},$$

et la troisième équation devient

$$t_{nn}^2 = a_{nn} - U_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} U_{n-1}.$$

Elle détermine un unique nombre positif t_{nn} à condition que le membre de droite soit positif. Par ailleurs on remarque que, si la décomposition a lieu, on a

$$\det A = |\det T|^2 = t_{nn}^2 |\det T_{n-1}|^2 = t_{nn}^2 \det A_{n-1}.$$

Par hypothèse, les nombres $\det A$ et $\det A_{n-1}$ sont strictement positifs, et donc

$$t_{nn}^2 = \frac{\det A}{\det A_{n-1}}.$$

Il suffit de vérifier que l'on a bien

$$a_{nn} - U_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} U_{n-1} = \frac{\det A}{\det A_{n-1}},$$

pour montrer l'existence et l'unicité de t_{nn} .

Développons le déterminant de A par rapport à la dernière ligne. On a

$$\det A = a_{n,n} \det A_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} \mu_{n,j},$$

où $\mu_{n,j}$ est le mineur de $a_{n,j}$ dans A , c'est-à-dire

$$\mu_{n,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Puis en développant $\mu_{n,j}$ par rapport à la dernière colonne

$$\mu_{n,j} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1+i} a_{i,n} m_{i,j},$$

où

$$m_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

n'est autre que le mineur de $a_{i,j}$ dans A_{n-1} . La matrice M_{n-1} de coefficients $(-1)^{i+j}m_{i,j}$ est donc la matrice des cofacteurs de A_{n-1} . Alors

$$\det A = a_{n,n} \det A_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j-1} a_{i,n} a_{n,j} m_{i,j},$$

ou encore, puisque A est autoadjointe,

$$\det A = a_{n,n} \det A_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \overline{a_{j,n}} a_{i,n} ((-1)^{i+j} m_{i,j}).$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \overline{a_{j,n}} a_{i,n} ((-1)^{i+j} m_{i,j}) = U_{n-1}^* {}^t M_{n-1} U_{n-1}.$$

Mais, en raison de la formule donnant l'inverse d'une matrice,

$${}^t M_{n-1} = (\det A_{n-1}) A_{n-1}^{-1},$$

et finalement

$$\det A = a_{n,n} \det A_{n-1} - (\det A_{n-1}) U_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} U_{n-1} = (\det A_{n-1}) (a_{nn} - U_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} U_{n-1}),$$

et dans ce cas

$$t_{nn} = \sqrt{\frac{\det A}{\det A_{n-1}}}.$$

On a donc bien démontré l'existence et l'unicité de la matrice T au rang n . Le résultat est donc vrai pour tout entier $n \geq 1$.

2) Si l'on veut résoudre le système $AX = B$, cela revient à résoudre

$$T^*TX = B,$$

donc, en posant $TX = Y$, cela revient à

$$T^*Y = B \quad \text{puis} \quad TX = Y.$$

3) Application.

Remarquons que si A est réelle, on a aussi,

$$A = \overline{A} = (\overline{T})^* \overline{T}$$

et par unicité de T , il en résulte que $\overline{T} = T$, donc T est réelle. On part de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 22 \\ 3 & 22 & 82 \end{bmatrix}.$$

Cherchons la matrice

$$T = \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

On a successivement

$$T^* = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{bmatrix} \quad \text{puis} \quad T^*T = \begin{bmatrix} a^2 & ad & af \\ ad & b^2 + d^2 & df + be \\ af & df + be & c^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix}.$$

L'égalité

$$A = T^*T$$

conduit au système

$$\begin{cases} a^2 & = & 1 \\ ad & = & 2 \\ af & = & 3 \\ b^2 + d^2 & = & 8 \\ df + be & = & 22 \\ c^2 + e^2 + f^2 & = & 82 \end{cases}.$$

Puisque a , b et c sont positifs, on obtient facilement $a = 1$, $d = 2$ et $f = 3$, puis

$$b^2 + d^2 = b^2 + 4 = 8,$$

donc $b = 2$. Ensuite

$$df + be = 6 + 2e = 22,$$

donc $e = 8$ et finalement

$$c^2 + e^2 + f^2 = c^2 + 64 + 9 = 82,$$

donc $c = 3$. Finalement

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le premier système s'écrit

$$T^*Y = T^* \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix},$$

qui donne

$$\begin{cases} x &= 1 \\ 2x + 2y &= 8 \\ 3x + 8y + 3z &= 3 \end{cases},$$

et conduit facilement à

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Le second système s'écrit

$$TX = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix},$$

qui donne

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2y + 8z &= 3 \\ 3z &= -8 \end{cases},$$

et conduit à

$$X = \begin{bmatrix} -46/3 \\ 73/6 \\ -8/3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 96

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$ trois suites de nombres réels tels que, pour tout n , le produit $b_n c_n$ soit strictement positif. On pose

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

tous les autres coefficients de la matrice étant nuls. On pose également $P_0 = 1$ et pour tout $n > 0$

$$P_n(X) = \det(XI_n - A_n).$$

1) Montrer qu'il existe une matrice diagonale S telle que $B_n = S^{-1}A_nS$ soit symétrique. En déduire que les racines de P_n sont réelles.

2) Trouver une relation de récurrence reliant P_{n+1} , P_n et P_{n-1} lorsque $n \geq 1$.

3) Soit $n \geq 2$, et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme Q associe le reste de la division euclidienne de $XQ(X)$ par P_n . Ecrire la matrice de φ dans la base $(P_0, \dots, P_{n-1})$, trouver les vecteurs propres de φ et en déduire que les valeurs propres sont simples.

Solution

1) Soit S une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $s_1, \dots, s_n$. Ceux de S^{-1} sont alors $1/s_1, \dots, 1/s_n$.

La matrice $A_n S$ s'obtient en multipliant la colonne j de A par s_j . Puis la matrice $S^{-1} A S$ en divisant la ligne i de AS par s_i . Alors $S^{-1} A S$ est une matrice de la même forme que A_n obtenue à partir des suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n s_n / s_{n+1})_{n \geq 1}$, $(c_n s_{n+1} / s_n)_{n \geq 1}$. Pour obtenir une matrice symétrique, on choisit les nombres s_i tels que

$$\frac{s_{i+1}}{s_i} c_i = \frac{s_i}{s_{i+1}} b_i,$$

soit

$$\frac{s_{i+1}}{s_i} = \sqrt{\frac{b_i}{c_i}}.$$

En partant de $s_1 = 1$, on a alors

$$s_{i+1} = \sqrt{\frac{b_1 \dots b_i}{c_1 \dots c_i}} \quad \text{et} \quad \frac{s_{i+1}}{s_i} c_i = \frac{s_i}{s_{i+1}} b_i = \sqrt{b_i c_i}.$$

La matrice B_n est construite comme A_n mais à partir des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et des deux suites égales $(\sqrt{b_n c_n})_{n \geq 1}$.

Puisque B_n est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Il en résulte que son polynôme caractéristique $\det(B_n - X I_n)$ a des racines réelles. Alors comme

$$\det(X I_n - A_n) = \det(X I_n - B_n)$$

on en déduit que les racines de P_n sont réelles également.

2) Soit $n \geq 1$. On a

$$P_{n+1}(X) = \begin{vmatrix} X-a_1 & -c_1 & & & \\ -b_1 & X-a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{n-1} & X-a_n & -c_n \\ & & & -b_n & X-a_{n+1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, il vient

$$P_{n+1}(X) = (X - a_{n+1})P_n(X) + c_n \begin{vmatrix} X-a_1 & -c_1 & & \\ -b_1 & X-a_2 & -c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -b_{n-2} & X-a_{n-1} & -c_{n-1} \\ & & & 0 & -b_n \end{vmatrix},$$

puis en développant par rapport à la dernière ligne,

$$P_{n+1}(X) = (X - a_{n+1})P_n(X) - c_n b_n P_{n-1}(X).$$

3) L'application φ est linéaire par unicité de la division euclidienne. En effet, si l'on a

$$Q_1 = S_1XP_n + R_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = S_2XP_n + R_2$$

avec R_1 et R_2 de degré strictement plus petit que n , alors, quels que soient ξ_1 et ξ_2 réels,

$$\xi_1Q_1 + \xi_2Q_2 = \xi_1S_1XP_n + \xi_1R_1 + \xi_2S_2XP_n + \xi_2R_2 = (\xi_1S_1 + \xi_2S_2)XP_n + (\xi_1R_1 + \xi_2R_2)$$

et le degré de $\xi_1R_1 + \xi_2R_2$ est strictement plus petit que n , donc

$$\varphi(\xi_1Q_1 + \xi_2Q_2) = \xi_1R_1 + \xi_2R_2 = \xi_1\varphi(Q_1) + \xi_2\varphi(Q_2).$$

Calculons les images de P_k par φ .

Si $1 \leq k \leq n-2$, on a

$$XP_k(X) = P_{k+1}(X) + a_{k+1}P_k(X) + b_kc_kP_{k-1}(X).$$

Comme ce polynôme est de degré $k+1 \leq n-1$, on a,

$$\varphi(P_k) = P_{k+1}(X) + a_{k+1}P_k(X) + b_kc_kP_{k-1}(X).$$

Si $k = n-1$, on a

$$XP_{n-1}(X) = P_n(X) + a_nP_{n-1}(X) + b_{n-1}c_{n-1}P_{n-2}(X),$$

et puisque $a_nP_{n-1}(X) + b_{n-1}c_{n-1}P_{n-2}(X)$ est de degré $n-1$, on a

$$\varphi(P_{n-1}) = a_nP_{n-1}(X) + b_{n-1}c_{n-1}P_{n-2}(X).$$

Enfin, si $k = 0$, le polynôme

$$XP_0(X) = X = (X - a_1) + a_1 = P_1(X) + a_1P_0(X)$$

est de degré $1 \leq n-1$, donc

$$\varphi(P_0) = P_1(X) + a_1P_0(X).$$

La matrice de φ dans la base $(P_0, \dots, P_{n-1})$ est donc

$$C_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1c_1 & & & \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{n-1} & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

On obtient donc une matrice construite comme A_n mais à partir des suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $(1)_{n \geq 1}$ et $(b_nc_n)_{n \geq 1}$. Cette matrice est de nouveau semblable à la matrice B_n , donc elle est semblable à A_n .

Si λ est une valeur propre de φ et Q un vecteur propre associé, on a

$$\varphi(Q) = \lambda Q,$$

donc, il existe un polynôme S tel que

$$XQ(X) = SP_n(X) + \lambda Q(X),$$

c'est-à-dire

$$(X - \lambda)Q(X) = SP_n(X).$$

Comme $(X - \lambda)Q(X)$ est de degré au plus n , il en résulte que S est un polynôme constant et que λ est une racine de P_n . Alors Q est un multiple du polynôme $P_n(X)/(X - \lambda)$. Le sous-espace propre associé à λ est donc de dimension 1 et puisque A_n , donc C_n , est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est 1. Les racines de P_n sont donc simples.

Exercice 97 Décomposition polaire

1) Soit E un espace euclidien réel de dimension finie et φ un endomorphisme autoadjoint de E . On suppose que φ est positif c'est-à-dire que, quel que soit x dans E

$$(\varphi(x) | x) \geq 0.$$

Montre que les valeurs propres de φ sont réelles positives et qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif ψ et un seul tel que

$$\psi^2 = \varphi.$$

2) Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que u^*u et uu^* sont autoadjoints positifs et ont le même rang que u .

3) En déduire que u peut se mettre sous la forme

$$u = pv$$

où p est autoadjoint positif de même rang que u et où v est unitaire. Quand a-t-on unicité de la décomposition ?

4) Chercher une décomposition pour les matrices

$$\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution

1) L'endomorphisme φ étant autoadjoint, il a des valeurs propres réelles. Soit λ une valeur propre associée au vecteur propre x . On a

$$(\varphi(x) | x) = (\lambda x | x) = \lambda \|x\|^2 \geq 0.$$

Il en résulte que λ est un nombre réel positif.

Comme φ est autoadjoint, il est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres où sa matrice est la matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Si $\psi^2 = \varphi$ où ψ est positif, la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}$ est nécessairement

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Alors ψ est aussi un endomorphisme autoadjoint positif de même rang que φ .

On notera dans la suite

$$\psi = \sqrt{\varphi}.$$

2) Comme

$$(u^*u)^* = u^*u \quad \text{et} \quad (uu^*)^* = uu^*,$$

les endomorphismes u^*u et uu^* sont autoadjoints. D'autre part

$$(u^*u(x) | x) = (u(x) | u(x)) \geq 0 \quad \text{et} \quad (uu^*(x) | x) = (u^*(x) | u^*(x)) \geq 0,$$

et les endomorphismes sont positifs.

L'inclusion de $\text{Ker } u^*$ dans $\text{Ker}(uu^*)$ est évidente. Réciproquement, si x appartient à $\text{Ker}(uu^*)$, alors

$$\|u^*(x)\|^2 = (u^*(x) | u^*(x)) = (x | uu^*(x)) = 0,$$

donc $u^*(x)$ est nul et $\text{Ker}(uu^*)$ est inclus dans $\text{Ker } u^*$. On a donc l'égalité

$$\text{Ker } u^* = \text{Ker}(uu^*),$$

et les endomorphismes u^* et uu^* ont le même rang. De même u^*u et u ont même rang. Comme u et u^* ont le même rang, c'est aussi le rang de uu^* .

3) Si la décomposition existe, on a nécessairement

$$uu^* = (pv)(pv)^* = pvv^*p^* = p^2,$$

et p est alors l'automorphisme autoadjoint positif tel que

$$p^2 = uu^*,$$

c'est-à-dire

$$p = \sqrt{uu^*}.$$

Cet endomorphisme a même rang que uu^* donc que u . En particulier, si u est inversible, il en est de même de p et de uu^* . Alors on a nécessairement

$$v = p^{-1}u$$

ce qui montre l'unicité dans ce cas.

Si u est inversible, posons donc

$$p = \sqrt{uu^*} \quad \text{et} \quad v = p^{-1}u.$$

On a alors

$$v^* = u^*(p^*)^{-1} = u^*p^{-1} \quad \text{et} \quad v^{-1} = u^{-1}p.$$

Mais l'égalité

$$p^2 = uu^*$$

implique

$$u^{-1}p = u^*p^{-1},$$

et donc

$$v^{-1} = v^*.$$

L'endomorphisme v est bien unitaire. On a donc démontré l'existence et l'unicité de la décomposition lorsque u est inversible.

Il reste à étudier le cas où u n'est pas inversible. Pour cela introduisons l'endomorphisme U de E défini en posant

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in (\text{Ker } u)^\perp = \text{Im } u^* \\ s(x) & \text{si } x \in \text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp \end{cases},$$

où s est une bijection de $\text{Ker } u$ sur $(\text{Im } u)^\perp$ (ces deux sous-espaces ayant la même dimension).

Tout d'abord U est une application linéaire bijective. En effet, si $x = a + b$ avec a dans $(\text{Ker } u)^\perp$ et b dans $\text{Ker } u$, est tel que

$$U(x) = u(a) + s(b) = 0$$

alors $u(a)$ appartient à $\text{Im } u$ et $s(b)$ à $(\text{Im } u)^\perp$, donc $u(a)$ et $s(b)$ sont nuls. Comme s est bijective, cela implique que b est nul. Quant à a , il appartient à $\text{Ker } u \cap (\text{Ker } u)^\perp$ donc est nul également. Il en résulte que x est nul et que U est injective.

Alors, il existe P et v tels que

$$U = Pv,$$

où

$$P = \sqrt{UU^*},$$

et v est unitaire.

Notons Π la projection orthogonale sur $\text{Im } u$. Si x est dans $(\text{Ker } u)^\perp$ alors $U(x) = u(x)$ est dans $\text{Im } u$ et

$$(\Pi U)(x) = \Pi(u(x)) = u(x) = U(x),$$

et si x est dans $\text{Ker } u$, alors $U(x) = s(x)$ est dans $(\text{Im } u)^\perp$ et

$$(\Pi U)(x) = \Pi(s(x)) = 0 = u(x).$$

Il en résulte que

$$\Pi U = u.$$

Si l'on pose

$$p = \Pi P,$$

on a alors

$$u = \Pi U = \Pi P v = p v.$$

Si Π et P commutent, alors

$$p^* = (\Pi P)^* = P^* \Pi^* = P \Pi = \Pi P = p,$$

car P et Π sont autoadjoints. Il en résulte que p est autoadjoint. D'autre part, puisque P est positif et que $\Pi^2 = \Pi$, on a

$$(p(x) | x) = (\Pi P(x) | x) = (\Pi^2 P(x) | x) = (\Pi P(x) | \Pi(x)) = (P(\Pi(x)) | \Pi(x)) \geq 0,$$

donc p est positif ce qui montre la décomposition voulue.

Il reste à montrer que Π et P commutent.

On sait que deux endomorphismes diagonalisables commutent si et seulement si l'un quelconque d'entre eux laisse stable les sous-espaces propres de l'autre. Donc Π et P commutent si et seulement si Π laisse stable les sous-espaces propres de P donc ceux de UU^* . Alors Π et P commutent si et seulement si UU^* et Π commutent, c'est-à-dire si et seulement si UU^* laisse stable les sous-espaces propres de Π qui sont $\text{Im } u$ et $(\text{Im } u)^\perp$. Vérifions qu'il en est bien ainsi.

(i) Soit x dans $\text{Im } u = (\text{Ker } u^*)^\perp$.

Si z appartient à $(\text{Ker } u)^\perp$, on a

$$(U^*(x) | z) = (x | U(z)) = (x | u(z)) = (u^*(x) | z),$$

et, si z appartient à $\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp$, alors $s(z)$ se trouve dans $(\text{Im } u)^\perp$, et l'on a

$$(U^*(x) | z) = (x | U(z)) = (x | s(z)) = 0 = (u^*(x) | z).$$

Finalement

$$u^*(x) = U^*(x).$$

Alors, $u^*(x)$ appartient à $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ donc

$$UU^*(x) = Uu^*(x) = uu^*(x)$$

appartient à $\text{Im } u$ qui est donc stable par UU^* .

(ii) Soit x dans $(\text{Im } u)^\perp$. Si l'on prend y dans $\text{Im } u$, alors $uu^*(y)$ est dans $\text{Im } u$ et l'on a

$$((UU^*)(x) | y) = (x | (UU^*)(y)) = (x | uu^*(y)) = 0,$$

ce qui montre que $UU^*(x)$ appartient à $(\text{Im } u)^\perp$ et prouve la stabilité de ce sous-espace par UU^* .

Remarquons que l'on n'a plus unicité de la décomposition si u n'est pas inversible. En effet si r est un endomorphisme unitaire qui laisse stable $\text{Ker } u$ et qui vaut l'identité sur $(\text{Ker } u)^\perp$, alors $pr = p$ et

$u = p(rv)$ avec rv unitaire.

3) Si l'on part de la matrice

$$u = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 10 & -5 \end{bmatrix},$$

on a successivement

$$u^* = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad uu^* = \begin{bmatrix} 125 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 25B.$$

Le polynôme caractéristique de B vaut $\lambda^2 - 10\lambda + 9$ et a pour racines 9 et 1. On trouve immédiatement la base de vecteurs propres $((1, 1), (1, -1))$ qui donne les matrices de passage

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} Q,$$

avec

$$\frac{1}{2} QBQ = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} Quu^*Q = 25 \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$p = \sqrt{uu^*} = \frac{5}{2} Q \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour finir

$$v = p^{-1}u = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Si maintenant on part de

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on a

$$u^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad uu^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ici $p = uu^*$, et l'on constate que

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 98

Trouver les matrices A symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation

$$A^2 - SA + PI = 0,$$

où S et P sont deux réels tels que $S^2 - 4P$ soit positif.

Solution

Si on diagonalise la matrice dans une base orthonormée, la matrice diagonale D doit vérifier aussi l'équation

$$D^2 - SD + PI = 0.$$

Alors les valeurs propres de A (ou de D), sont racines du trinôme

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Ces racines sont réelles puisque le discriminant $S^2 - 4P$ est positif par hypothèse, et la matrice A possède au plus deux valeurs propres distinctes. Soit alors λ et μ deux racines de ce trinôme (éventuellement égales), il existe U orthogonale telle que

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} U^{-1},$$

et toute matrice de ce type répond à la question.

4.4 Endomorphismes antiautoadjoints - Matrices antisymétriques**Exercice 99**

Pour quelles valeurs de n existe-t-il des matrices réelles antisymétriques et orthogonales d'ordre n ? Quelles sont les valeurs propres de telles matrices ?

Solution

Si n est impair, une matrice antisymétrique n'est pas inversible. En effet

$$\det A = \det {}^t A = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$$

donc $\det A$ est nul, et A ne peut être orthogonale.

Si $n = 2p$, soit A une matrice orthogonale d'ordre p . Alors la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -{}^t A & 0 \end{bmatrix}$$

est antisymétrique et orthogonale d'ordre $2p$.

Les valeurs propres d'une telle matrice sont à la fois imaginaires pures et de module 1. Ce sont donc i et $-i$, et puisque le polynôme caractéristique est réel, ces deux valeurs propres sont au même ordre p .

Exercice 100

Soit A une matrice réelle antisymétrique. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont imaginaires pures, que A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice se met sous la forme diagonale par blocs

$$B = \begin{bmatrix} s_1 J & & & \\ & \ddots & & \\ & & s_k J & \\ & & & 0_{n-2k} \end{bmatrix},$$

où

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

et où les nombres s_j sont des nombres réels non nuls. Quel est le polynôme caractéristique de A ?

Solution

En identifiant un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et sa matrice colonne, notons

$$(X | Y) = {}^t \overline{X} Y$$

le produit hermitien de $\mathbb{C}^n$ rendant orthonormée la base canonique.

Puisque A est réelle antisymétrique, on a

$${}^t A = {}^t \overline{A} = -A.$$

Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique, on a alors

$$(\varphi(X) | Y) = {}^t \overline{A X} Y = {}^t \overline{X} {}^t \overline{A} Y = -{}^t \overline{X} A Y = -(X | \varphi(Y)).$$

Soit λ et μ deux valeurs propres de φ et X et Y des vecteurs propres associés. On a, d'une part,

$$(X | \varphi(Y)) = (X | \mu Y) = \mu (X | Y),$$

d'autre part,

$$(\varphi(X) | Y) = (\lambda X | Y) = \overline{\lambda} (X | Y).$$

Alors

$$\overline{\lambda} (X | Y) = -\mu (X | Y).$$

Si $\lambda = \mu$ et $X = Y$, on a

$$\overline{\lambda} \|X\|^2 = -\lambda \|X\|^2,$$

et il en résulte que

$$\overline{\lambda} = -\lambda.$$

Les valeurs propres sont donc imaginaires pures.

Si maintenant $\lambda \neq \mu$,

$$-\lambda(X | Y) = -\mu(X | Y),$$

donc $(X | Y)$ est nul et les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux.

Si les valeurs propres de φ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, soit

$$F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Ce sous-espace est stable par φ . Soit X dans F et Y dans $F^\perp$. Alors

$$0 = (\varphi(X) | Y) = -(X | \varphi(Y)),$$

et $\varphi(Y)$ est dans $F^\perp$ qui est donc également stable par φ . S'il n'était pas réduit à 0, la restriction de φ à $F^\perp$ aurait une valeur propre λ qui serait un des nombres λ_j et alors $F^\perp \cap E_{\lambda_j}$ ne serait pas nul : on aurait donc une contradiction. Il en résulte que $F^\perp$ vaut $\{0\}$ et que

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

La matrice A est diagonalisable.

Si maintenant is est une valeur propre non nulle associée à un vecteur V de norme 1, alors $-is$ est une valeur propre associée à $\bar{V}$, et les vecteurs V et $\bar{V}$ forment un système orthonormé.

Posons

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(V + \bar{V}) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{i\sqrt{2}}(V - \bar{V}).$$

Ces vecteurs sont réels, orthogonaux et de norme 1. Alors

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(V) + \varphi(\bar{V})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(siV - si\bar{V}) = \frac{si}{\sqrt{2}}(V - \bar{V}) = -sv,$$

et

$$\varphi(v) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\varphi(V) - \varphi(\bar{V})) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(isV + is\bar{V}) = \frac{s}{\sqrt{2}}(V + \bar{V}) = su.$$

La restriction de φ au plan engendré par u et v a pour matrice sJ . Il suffit de regrouper deux à deux les vecteurs propres conjugués d'une base orthonormée de E complexe diagonalisant A et d'ajouter une base orthonormée réelle du noyau de φ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle φ a pour matrice B .

Comme

$$\det(sJ - \lambda I) = \lambda^2 + s^2,$$

et que le noyau de φ est de dimension $n - 2k$, le polynôme caractéristique de A est alors

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) = (-1)^n \lambda^{n-2k} \prod_{j=1}^k (\lambda^2 + s_j^2).$$

Exercice 101

Soit E un espace euclidien réel de dimension finie et φ un endomorphisme de E .

1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $\varphi^* = -\varphi$;
- (ii) $(\forall x \in E)(\forall y \in E) \quad ((\varphi(x) | y) = -(x | \varphi(y)))$;
- (iii) $(\forall x \in E) \quad ((x | \varphi(x)) = 0)$.

2) Montrer que pour tout k réel non nul, l'endomorphisme $\varphi + k \text{Id}_E$ est inversible et que

$$\psi = (\varphi - k \text{Id}_E)(\varphi + k \text{Id}_E)^{-1}$$

est unitaire.

Solution

1) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) car, par définition de l'adjoint d'un endomorphisme, la propriété (ii), qui s'écrit aussi

$$(\varphi(x) | y) = (x | -\varphi(y)) ,$$

quels que soient x et y dans E , signifie que

$$\varphi^* = -\varphi .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) car, si (ii) a lieu, en prenant $x = y$, on obtient

$$(\varphi(x) | x) = -(x | \varphi(x)) = -(\varphi(x) | x) ,$$

d'où

$$(x | \varphi(x)) = (\varphi(x) | x) = 0 .$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) car, si (iii) a lieu, on a en particulier

$$((x + y) | \varphi(x + y)) = 0 ,$$

et en développant

$$(x | \varphi(x)) + (x | \varphi(y)) + (y | \varphi(x)) + (y | \varphi(y)) = (x | \varphi(y)) + (y | \varphi(x)) ,$$

d'où

$$(\varphi(x) | y) = (y | \varphi(x)) = -(x | \varphi(y)) .$$

2) Soit λ une valeur propre (réelle) de φ et x un vecteur propre associé. Alors

$$(\varphi(x) | x) = (\lambda x | x) = \lambda(x | x) ,$$

mais aussi

$$(\varphi(x) | x) = -(x | \varphi(x)) = -(x | \lambda x) = -\lambda(x | x) .$$

Comme $(x|x)$ n'est pas nul, cela implique que $\lambda = 0$. Alors, si k est un nombre réel non nul, les nombres k et $-k$ ne sont pas des valeurs propres de φ et $\varphi + k \text{Id}_E$ ainsi que $\varphi - k \text{Id}_E$ sont inversibles. On obtient alors

$$\psi^{-1} = ((\varphi - k \text{Id}_E)(\varphi + k \text{Id}_E)^{-1})^{-1} = (\varphi + k \text{Id}_E)(\varphi - k \text{Id}_E)^{-1}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \psi^* &= ((\varphi - k \text{Id}_E)(\varphi + k \text{Id}_E)^{-1})^* &= ((\varphi + k \text{Id}_E)^{-1})^*(\varphi - k \text{Id}_E)^* \\ & &= ((\varphi + k \text{Id}_E)^*)^{-1}(\varphi - k \text{Id}_E)^* \\ & &= (\varphi^* + k \text{Id}_E)^{-1}(\varphi^* - k \text{Id}_E) \\ & &= (-\varphi + k \text{Id}_E)^{-1}(-\varphi - k \text{Id}_E) \\ & &= (\varphi - k \text{Id}_E)^{-1}(\varphi + k \text{Id}_E) \\ & &= (\varphi - k \text{Id}_E)^{-1}((\varphi - k \text{Id}_E) + 2k \text{Id}_E) \\ & &= \text{Id}_E + 2k(\varphi - k \text{Id}_E)^{-1} \\ & &= ((\varphi - k \text{Id}_E) + 2k \text{Id}_E)(\varphi - k \text{Id}_E)^{-1} \\ & &= (\varphi + k \text{Id}_E)(\varphi - k \text{Id}_E)^{-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\psi^* = \psi^{-1},$$

et ψ est unitaire.

Exercice 102

Soit E un espace euclidien réel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $(\forall x \in E) \quad ((\varphi(x) - x | \varphi(x)) = 0) ;$
- (ii) $\varphi^* \varphi - \varphi^*$ est antiautoadjoint ;
- (iii) $\varphi^* \varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi^*) ;$
- (iv) $2\varphi - \text{Id}_E$ est orthogonal .

En déduire que les valeurs propres complexes d'une matrice M de φ dans une base orthonormée de E sont de la forme $e^{it} \cos t$, que les sous-espaces propres complexes sont deux à deux orthogonaux, et que M est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Quelles sont les valeurs propres réelles possibles pour φ ? Si φ n'a que des valeurs propres réelles, quelle est sa nature?

Solution

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) car la propriété (i) revient à dire que, pour tout x de E

$$(\varphi^* \varphi(x) - \varphi^*(x) | x) = 0,$$

ce qui d'après l'exercice précédent équivaut au fait que $\varphi^* \varphi - \varphi^*$ est antiautoadjoint.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) car l'égalité

$$(\varphi^* \varphi - \varphi^*)^* = -(\varphi^* \varphi - \varphi^*),$$

équivalent à

$$\varphi^* \varphi - \varphi = -\varphi^* \varphi + \varphi^*,$$

puis à

$$2\varphi^* \varphi = \varphi + \varphi^*.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) car l'égalité

$$2\varphi^* \varphi = \varphi + \varphi^*,$$

s'écrit également

$$2(2\varphi^* \varphi - \varphi - \varphi^*) + \text{Id}_E = \text{Id}_E,$$

ou encore

$$(2\varphi - \text{Id}_E)^*(2\varphi - \text{Id}_E) = (2\varphi^* - \text{Id}_E)(2\varphi - \text{Id}_E) = \text{Id}_E,$$

qui signifie que $2\varphi - \text{Id}_E$ est orthogonal.

L'endomorphisme

$$\psi = 2\varphi - \text{Id}_E$$

étant orthogonal, les valeurs propres complexes de sa matrice $2M - I$ sont de module 1. Si l'on note e^{2it} une de ces valeurs propres, alors M a pour valeur propre

$$\lambda = \frac{1}{2}(e^{2it} + 1) = e^{it} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = e^{it} \cos t.$$

Comme ψ est orthogonal, la matrice $2M - I$ est aussi orthogonale et donc est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{C}^n$ et il en sera de même pour M .

Par ailleurs, le nombre

$$\lambda = e^{it} \cos t = \cos^2 t + i \sin t \cos t$$

est réel dans deux cas :

- 1) si $t = k\pi$, auquel cas $\lambda = 1$,
- 2) si $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ auquel cas $\lambda = 0$.

Si l'endomorphisme φ n'a que des valeurs propres réelles, c'est soit Id_E , soit 0_E , soit la projection orthogonale sur $\text{Im } \varphi$.

4.5 Projections orthogonales

Exercice 103 Projection orthogonale

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E de dimension finie.

1) Montrer que tout élément x de E s'écrit, de manière unique

$$x = p(x) + q(x),$$

où $p(x)$ appartient à F et $q(x)$ à $F^\perp$, et que, pour toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$ de F , on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^r (e_i | x) e_i.$$

En déduire que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

2) Vérifier que $p^2 = p$ et déterminer $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$. On appelle $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

3) Montrer que pour tout x de E

$$\|q(x)\| = \|x - p(x)\| = \inf_{t \in F} \|x - t\|.$$

Et préciser en quel vecteur la borne inférieure est atteinte.

4) Montrer que

$$\|q(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^r (e_i | x)^2.$$

5) On suppose maintenant que E est un espace euclidien réel. Soit F un sous-espace de E de dimension finie et G un supplémentaire de F dans E . Soit p la projection sur F parallèlement à G . Montrer que si, pour tout t de F et tout x de E , on a l'inégalité

$$\|x - p(x)\| \leq \|x - t\|,$$

alors G est l'orthogonal de F .

Solution

1) Puisque $F \cap F^\perp$ est réduit au vecteur nul, la décomposition, si elle existe, est unique.

En posant

$$p(x) = \sum_{i=1}^r (e_i | x) e_i,$$

on obtient un élément de F . Alors

$$(e_k | x - p(x)) = (e_k | x) - (e_k | p(x)) = (e_k | x) - \sum_{i=1}^r (e_i | x)(e_k | e_i).$$

Comme la base $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, il reste

$$(e_k | x - p(x)) = (e_k | x) - (e_k | x) = 0,$$

et donc $q(x) = x - p(x)$ appartient à $F^\perp$. La décomposition

$$x = p(x) + q(x)$$

existe bien, et elle est unique. Elle traduit le fait que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

2) Pour tout x dans F , la décomposition

$$x = x + 0$$

avec x dans F et 0 dans $F^\perp$ montre que

$$p(x) = x,$$

et en particulier, puisque $p(x)$ est dans F que

$$p^2(x) = p(p(x)) = p(x).$$

Donc p est la projection sur P parallèlement à $F^\perp$. On a alors $\text{Im } p = F$ et $\text{Ker } p = F^\perp$.

3) Soit t dans F et x dans E . On écrit

$$x - t = (p(x) - t) + (x - p(x)).$$

Comme $p(x) - t$ est dans F et $x - p(x)$ dans $F^\perp$, il résulte du théorème de Pythagore que

$$\|x - t\|^2 = \|p(x) - t\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2.$$

L'égalité est obtenue lorsque $\|p(x) - t\|$ est nul, c'est-à-dire pour $t = p(x)$.

4) Dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$, on a

$$\|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^r (e_i | x)^2.$$

et comme $q(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2.$$

On en déduit

$$\|q(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^r (e_i | x)^2.$$

5) Soit x dans G : le vecteur $p(x)$ est nul, et soit u dans F . Pour tout nombre réel λ , le vecteur λu est dans F , donc

$$\|x - p(x)\| = \|x\| \leq \|x - \lambda u\|.$$

Alors

$$\|x\|^2 \leq \|x - \lambda u\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda(x|u) + \lambda^2\|u\|^2,$$

d'où

$$0 \leq \|u\|^2\lambda^2 - 2(x|u)\lambda.$$

Le trinôme en λ du membre de droite est toujours positif. Cela signifie que son discriminant $4(x|u)^2$ est toujours négatif donc que $(x|u)$ est nul. Alors x appartient à $F^\perp$ et G est inclus dans $F^\perp$. Comme G et $F^\perp$ sont deux supplémentaires de F , ils sont égaux.

Exercice 104

Soit E un espace euclidien et φ un endomorphisme de E tel que

- (i) $(\forall x \in \text{Im } \varphi) \quad (\varphi(x) = x),$
- (ii) $(\forall x \in E) \quad ((\varphi(x) - x) \perp \varphi(x)).$

Montrer que $\varphi(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\text{Im } \varphi$.

Solution

Soit x dans E et y dans $\text{Im } \varphi$. On a donc

$$\varphi(y) = y.$$

D'autre part $\varphi(x + y) - (x + y)$ est orthogonal à $\varphi(x + y)$, donc

$$0 = (\varphi(x + y) - (x + y) | \varphi(x + y)) = (\varphi(x) + \varphi(y) - x - y | \varphi(x) + \varphi(y)),$$

et en développant

$$0 = (\varphi(x) - x | \varphi(x)) + (\varphi(y) - y | \varphi(y)) + (\varphi(x) - x | \varphi(y)) + (\varphi(y) - y | \varphi(x)).$$

Par hypothèse

$$(\varphi(x) - x | \varphi(x)) = (\varphi(y) - y | \varphi(y)) = 0,$$

d'où

$$(\varphi(x) - x | \varphi(y)) + (\varphi(y) - y | \varphi(x)) = (\varphi(x) - x | y) = 0,$$

et il en résulte que $\varphi(x) - x$ appartient à $(\text{Im } \varphi)^\perp$.

Comme $\varphi(x)$ appartient à $\text{Im } \varphi$, c'est bien la projection orthogonale de x sur $\text{Im } \varphi$.

Exercice 105

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E et φ un endomorphisme de E .

- 1) On suppose que, pour tout x de E , le vecteur $\varphi(x)$ appartient à F et que $\varphi(x) - x$ est orthogonal à $\varphi(x)$. Est-ce que φ est la projection orthogonale sur F ?
- 2) On suppose que pour tout x de E et tout y de F , le vecteur $\varphi(x) - x$ est orthogonal à y . Est-ce que φ est la projection orthogonale sur F ?
- 3) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \cos t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

où t n'est pas multiple entier de $\pi/2$. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\varphi(x) - x$ et $\varphi(x)$ sont orthogonaux, mais que φ n'est pas une projection.

Solution

1) La réponse est non, car toute projection orthogonale sur un sous-espace de F vérifie ces propriétés, et en particulier $\varphi = 0$.

2) La réponse est non. La symétrie orthogonale S_F par rapport à F vérifie les mêmes propriétés. On a

$$S_F(x) = 2\text{pr}_F(x) - x,$$

donc, si x est dans E et y dans F ,

$$(S_F(x) - x | y) = 2(\text{pr}_F(x) - x | y) = 0.$$

3) Si $x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ on a

$$\varphi(x) - x = \begin{bmatrix} u \cos^2 t - v \sin t \cos t - u \\ u \sin t \cos t + v \cos^2 t - v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u \sin^2 t - v \sin t \cos t \\ u \sin t \cos t - v \sin^2 t \end{bmatrix} = -\sin t \begin{bmatrix} u \sin t + v \cos t \\ -u \cos t + v \sin t \end{bmatrix},$$

et

$$\varphi(x) = \cos t \begin{bmatrix} u \cos t - v \sin t \\ u \sin t + v \cos t \end{bmatrix}.$$

Alors

$$(\varphi(x) - x | \varphi(x)) = 0,$$

mais φ n'a pas de valeurs propres réelles et 0 et 1 ne peuvent être valeurs propres de φ qui n'est donc pas une projection.

Exercice 106

- 1) Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de dimension finie de E et U un vecteur de F . Soit V dans E . Montrer que U et V sont orthogonaux si et seulement si $\text{pr}_F U$ et $\text{pr}_F V$ le sont.
- 2) Soit E un espace euclidien de dimension finie n , F un sous-espace de dimension $n - 1$ de E et U et V dans E . On suppose que U et V sont orthogonaux, ainsi que $\text{pr}_F U$ et $\text{pr}_F V$. Montrer que U ou V est dans F . Donner un exemple où ce résultat est faux avec $\dim F < n - 1$.

Solution

- 1) On suppose que U est dans F , donc

$$\text{pr}_F(U) = U.$$

Par ailleurs, par définition, $V - \text{pr}_F V$ est orthogonal à F , donc à U , c'est-à-dire

$$(V - \text{pr}_F V | U) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$(V | U) = (\text{pr}_F V | U) = (\text{pr}_F V | \text{pr}_F U).$$

Donc $(V | U)$ est nul si et seulement si $(\text{pr}_F V | \text{pr}_F U)$ est nul.

- 2) On suppose que

$$(U | V) = (\text{pr}_F U | \text{pr}_F V) = 0.$$

Si V n'est pas dans F , alors $V - \text{pr}_F V$ n'est pas nul et est orthogonal à F . Il engendre une droite D , et puisque F est de dimension $n - 1$, on a $D = F^\perp$ et D et F sont supplémentaires.

Comme $U - \text{pr}_F U$ est orthogonal à F , alors il appartient à D et il existe λ tel que

$$U - \text{pr}_F U = \lambda(V - \text{pr}_F V).$$

Puisque la projection orthogonale est un opérateur autoadjoint qui vérifie $\text{pr}_F^2 = \text{pr}_F$, on a

$$0 = (\text{pr}_F U | \text{pr}_F V) = (U | \text{pr}_F^2 V) = (U | \text{pr}_F V),$$

et aussi

$$(\text{pr}_F U | V) = (U | \text{pr}_F V) = 0.$$

Alors

$$\|U - \text{pr}_F U\|^2 = \lambda(U - \text{pr}_F U | V - \text{pr}_F V) = \lambda((U | V) - (\text{pr}_F U | V) - (U | \text{pr}_F V) + (\text{pr}_F U | \text{pr}_F V)) = 0,$$

ce qui montre que $\text{pr}_F U = U$, donc que U est dans F .

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, soit

$$F = \{(x, y, 0, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

ainsi que les vecteurs

$$U = (1, -1, 1, -1) \quad \text{et} \quad V = (1, 1, 1, 1).$$

Alors

$$\mathrm{pr}_F U = (1, -1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_F V = (1, 1, 0, 0),$$

donc

$$(U | V) = (\mathrm{pr}_F U | \mathrm{pr}_F V) = 0,$$

mais, ni U , ni V ne sont dans F .

Chapitre 5

INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ POUR LES FONCTIONS

Dans les exercices suivants on utilise dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, le produit scalaire

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Exercice 107

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Montrer que

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Solution

On obtient le résultat en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $|f|$ et 1.

Exercice 108

Soit f continument dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que

$$(f(b)^2 - f(a)^2)^2 \leq 4 \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right).$$

En déduire que, si $b \geq a > 0$, on a

$$\ln \frac{b}{a} \geq 2 \frac{b-a}{b+a}.$$

Solution

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions f et f' , il vient

$$\left(\int_a^b f(t) f'(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right).$$

Mais

$$\int_a^b f(t) f'(t) dt = \left[\frac{f(t)^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} (f(b)^2 - f(a)^2),$$

et l'on obtient

$$\frac{1}{4} (f(b)^2 - f(a)^2)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right).$$

En particulier si $f(x) = \sqrt{x}$, l'inégalité devient

$$\frac{1}{4} (b-a)^2 \leq \left(\int_a^b t dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{4t} dt \right),$$

d'où

$$(b-a)^2 \leq 4 \frac{b^2 - a^2}{2} \frac{1}{4} (\ln b - \ln a).$$

Alors, après simplification, on obtient

$$2 \frac{b-a}{b+a} \leq \ln \frac{b}{a}.$$

Exercice 109

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$. On pose

$$u = \sqrt{\sqrt{f^2 + g^2} - f} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\sqrt{f^2 + g^2} + f}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions u et v , montrer que

$$(i) \quad \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 + \left(\int_a^b g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt \right)^2.$$

En déduire que pour toute fonction h définie et continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes

$$(ii) \quad \left| \int_a^b h(t) dt \right| \leq \int_a^b |h(t)| dt.$$

Solution

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b u(t)v(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b u(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b v(t)^2 dt \right).$$

On a tout d'abord

$$uv = g,$$

et donc

$$\left(\int_a^b g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b (\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} - f(t)) dt \right) \left(\int_a^b (\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} + f(t)) dt \right),$$

d'où

$$\left(\int_a^b g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt - \int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt + \int_a^b f(t) dt \right),$$

et finalement

$$\left(\int_a^b g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b (\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} dt) \right)^2 - \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2,$$

ce qui donne l'inégalité (i).

Si maintenant

$$h = F + iG$$

où F et G sont les parties réelle et imaginaire de h ,

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b F(t) dt + i \int_a^b G(t) dt,$$

donc

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right|^2 = \left(\int_a^b F(t) dt \right)^2 + \left(\int_a^b G(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b |F(t)| dt \right)^2 + \left(\int_a^b |G(t)| dt \right)^2.$$

Alors, en appliquant l'inégalité (i) à $f = |F|$ et $g = |G|$, on obtient

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{|F(t)|^2 + |G(t)|^2} dt \right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |h(t)| dt \right)^2,$$

d'où l'inégalité (ii).

Exercice 110

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty[$. On pose

$$A = \int_0^1 f(t) dt.$$

Montrer que

$$\sqrt{1 + A^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + f(t)^2} dt \leq 1 + A.$$

Solution

On a

$$\sqrt{1 + A^2} = \sqrt{1 + \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2} = \sqrt{\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 1 dt \right)^2} = \left| \int_0^1 (f(t) + i) dt \right|.$$

En utilisant l'exercice précédent, on peut alors majorer

$$\sqrt{1 + A^2} \leq \int_0^1 |f(t) + i| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + f(t)^2} dt.$$

Par ailleurs

$$1 + f(t)^2 \leq 1 + 2f(t) + f(t)^2 = (1 + f(t))^2.$$

Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f(t)^2} dt \leq \int_0^1 (1 + f(t)) dt = 1 + A.$$

Exercice 111

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0.

1) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$

2) Si de plus $f(1) = 0$, améliorer l'inégalité précédente.

Solution

1) Pour x dans $[0, 1]$, partons de la relation

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x 1 \times f'(t) dt,$$

on obtient

$$f(x)^2 \leq \left(\int_0^x dt \right) \left(\int_0^x f'(t)^2 dt \right) = x \int_0^x f'(t)^2 dt.$$

Si l'on intègre cette inégalité sur $[0, a]$, où $0 < a \leq 1$, on obtient

$$\int_0^a f(x)^2 dx \leq \int_0^a \left(x \int_0^x f'(t)^2 dt \right) dx.$$

On peut alors intégrer par parties le membre de droite, ce qui donne

$$\int_0^a f(x)^2 dx \leq \left[\frac{x^2}{2} \int_0^x f'(t)^2 dt \right]_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{2} f'(x)^2 dx,$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^a f(x)^2 dx \leq \frac{a^2}{2} \int_0^a f'(t)^2 dt.$$

L'inégalité demandée s'obtient en faisant $a = 1$ dans la formule précédente.

2) Si l'on fait $a = 1/2$ dans la formule on obtient cette fois

$$(1) \quad \int_0^{1/2} f(x)^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^{1/2} f'(t)^2 dt.$$

Mais on peut également appliquer cette formule à la fonction $g : x \mapsto f(1-x)$, puisque maintenant $g(0) = f(1) = 0$. Donc

$$\int_0^{1/2} f(1-x)^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^{1/2} f'(1-t)^2 dt.$$

Par changement de variable on en déduit l'inégalité

$$(2) \quad \int_{1/2}^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_{1/2}^1 f'(t)^2 dt.$$

Alors en additionnant les inégalités (1) et (2), on obtient

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{8} \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$

Exercice 112

Soit (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et soit f dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Etablir l'inégalité

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(x)^2 dx.$$

Solution

Puisque, pour tout x de $[a, b]$, on a

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt,$$

et, en raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(1) \quad (f(x) - f(a))^2 \leq \left(\int_a^x dt \right) \left(\int_a^x f'(t)^2 dt \right) = (x - a) \left(\int_a^x f'(t)^2 dt \right)$$

En outre, la fonction $x \mapsto \int_a^x f'(t)^2 dt$ est croissante sur $[a, b]$, donc, pour tout x de $[a, b]$, on a

$$\int_a^x f'(t)^2 dt \leq \int_a^b f'(t)^2 dt.$$

Ainsi (1) donne

$$(2) \quad (f(x) - f(a))^2 \leq (x - a) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right).$$

En intégrant l'inégalité (2), on a alors

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2 dx \leq \left[\frac{(x - a)^2}{2} \right]_a^b \int_a^b f'(x)^2 dx,$$

ce qui donne l'inégalité désirée.

Exercice 113

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives, et A l'ensemble des nombres

$$I_f = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \right),$$

lorsque f décrit E . L'ensemble A est-il borné inférieurement ? supérieurement ? Si oui, les bornes sont-elles atteintes ?

Solution

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$, on a

$$1 = \left(\int_0^1 dt \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \right).$$

Il en résulte que 1 est un minorant de A . De plus, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\sqrt{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{f}},$$

ou encore

$$f = \lambda.$$

Le minimum est donc atteint pour n'importe quelle fonction constante.

Posons

$$f_n(t) = e^{nt}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f_n(t)} dt \right) &= \left(\int_0^1 e^{nt} dt \right) \left(\int_0^1 e^{-nt} dt \right) \\ &= \frac{1}{n}(e^n - 1) \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \\ &= \frac{1}{n^2}(e^n + e^{-n} - 2). \end{aligned}$$

Cette expression tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte que A n'est pas borné supérieurement.

Exercice 114

Soit (a, b) un couple de nombres réels tels que $a < b$, et f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe deux nombres réels m et M tels que, pour tout t de $[a, b]$,

$$0 < m \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq M.$$

Prouver que

$$\left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2,$$

et écrire cette inégalité à l'aide d'un produit scalaire. Quand a-t-on égalité?

Solution

Posons $h = f/g$. C'est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives qui atteint son maximum M et son minimum m . Donc

$$0 < m \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq M.$$

Comme le trinôme $(X - m)(X - M)$ est négatif sur $[m, M]$, on a sur cet intervalle

$$X^2 \leq (M + m)X - Mm,$$

donc, pour tout t de $[a, b]$,

$$h^2(t) \leq (M + m)h(t) - Mm,$$

puis

$$h^2(t)g^2(t) \leq (M + m)h(t)g^2(t) - Mmg^2(t),$$

et en intégrant

$$\int_a^b h^2(t)g^2(t) dt \leq (M + m) \int_a^b h(t)g^2(t) dt - Mm \int_a^b g^2(t) dt.$$

Posons

$$\lambda(x) = \frac{g^2(x)}{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

L'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction λ vaut 1. On obtient alors

$$\int_a^b h^2(t)\lambda(t) dt \leq (M + m) \int_a^b h(t)\lambda(t) dt - Mm.$$

Posons maintenant

$$U = \int_a^b h(t)\lambda(t) dt.$$

On a l'encadrement

$$m = m \int_a^b \lambda(t) dt \leq U \leq M \int_a^b \lambda(t) dt = M,$$

et

$$\frac{1}{U^2} \int_a^b h^2(t)\lambda(t) dt \leq \frac{(M + m)U - Mm}{U^2}.$$

Etudions la fonction φ définie sur $[m, M]$ par

$$\varphi(X) = \frac{(M + m)X - Mm}{X^2}.$$

On obtient

$$\varphi'(X) = \frac{2Mm - (M + m)X}{X^3}.$$

La fonction φ possède un maximum en $X_0 = \frac{2Mm}{M + m}$, et l'on a

$$M - X_0 = \frac{M(M - m)}{M + m} > 0 \quad \text{et} \quad X_0 - m = \frac{m(M - m)}{M + m} > 0,$$

donc X_0 appartient bien à $[m, M]$. Alors le maximum de φ sur $[m, M]$ vaut

$$\varphi(X_0) = \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

et par suite

$$\frac{1}{U^2} \int_a^b h^2(t) \lambda(t) dt \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

donc

$$\int_a^b h^2(t) \lambda(t) dt \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b h(t) \lambda(t) dt \right)^2.$$

En remplaçant λ et h par leurs valeurs, on obtient

$$\frac{\int_a^b f^2(t) dt}{\int_a^b g^2(t) dt} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \frac{\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2}{\left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^2},$$

d'où l'on tire l'inégalité voulue.

En utilisant le produit scalaire

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt,$$

cette inégalité peut s'écrire

$$\|f\| \|g\| \leq \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}} (f | g).$$

Si l'on veut obtenir l'égalité, il faut en particulier avoir l'égalité dans l'inégalité

$$h^2(t) \leq (M+m)h(t) - Mm,$$

et comme h est continue on aura donc, pour tout t de $[a, b]$ ou bien $h(t) = M$, ou bien $h(t) = m$. Mais alors nécessairement $M = m$, et $f = Mg$. Inversement, s'il en est ainsi, il est facile de constater que l'inégalité devient une égalité.

Chapitre 6

FORME QUADRATIQUE

Pour toute forme quadratique Q sur un espace euclidien réel E , on notera B la forme bilinéaire symétrique associée et $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$ la signature de Q .

6.1 Généralités

Exercice 115

Soit E un espace euclidien de dimension 2 et (e_1, e_2) une base orthonormée de E . Soit Q une forme quadratique sur E . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) il existe deux réels α_1, α_2 tels que, pour tout vecteur x de E de coordonnées (x_1, x_2) dans la base (e_1, e_2) , on ait

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 ;$$

(ii) la matrice M de Q dans une base orthonormée de E est diagonalisable et ses vecteurs propres sont e_1 et e_2 ;

(iii) si S est la symétrie définie par $S(e_1) = e_1$ et $S(e_2) = -e_2$, alors, pour tout x de E , on a

$$Q(x) = Q(S(x)) .$$

Solution

Soit M la matrice de Q dans une base orthonormée et f l'endomorphisme autoadjoint de E de matrice M dans cette base. On a alors, quels que soient x et y dans E

$$B(x, y) = (f(x) | y) .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si (i) a lieu, alors

$$(f(e_1) - \alpha_1 e_1 | e_1) = (f(e_1) | e_1) - \alpha_1 (e_1 | e_1) = B(e_1, e_1) - \alpha_1 = Q(e_1) - \alpha_1 = 0 ,$$

et

$$(f(e_1) - \alpha_1 e_1 | e_2) = (f(e_1) | e_2) - \alpha_1 (e_1 | e_2) = B(e_1, e_2) = 0.$$

Il en résulte que $f(e_1) - \alpha_1 e_1$ est nul. de même $f(e_2) - \alpha_2 e_2$ est nul, ce qui montre que f , et donc M , est diagonalisable et a pour vecteurs propres e_1 et e_2 .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si l'on a

$$f(e_1) = \alpha_1 e_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \alpha_2 e_2,$$

alors, si

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

on a

$$f(x) = \alpha_1 x_1 e_1 + \alpha_2 x_2 e_2,$$

et

$$Q(x) = B(x, x) = (f(x) | x) = (\alpha_1 x_1 e_1 + \alpha_2 x_2 e_2 | x_1 e_1 + x_2 e_2).$$

Alors, compte tenu de l'orthogonalité de la base (e_1, e_2) , on obtient

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) Si l'on a

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

alors

$$S(x) = x_1 e_1 - x_2 e_2,$$

et

$$Q(S(x)) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 (-x_2)^2 = S(x).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si la forme bilinéaire est telle que

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2,$$

alors

$$Q(S(x)) = \alpha_1 x_1^2 - 2\beta x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2.$$

Si l'on a, pour tout x de E

$$Q(S(x)) = Q(x)$$

alors $\beta x_1 x_2$ est nul quels que soient x_1 et x_2 , donc β est nul et

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2.$$

Exercice 116

Soit E un espace euclidien réel de dimension finie, Q une forme quadratique sur E de matrice M dans une base orthonormée, et B la forme bilinéaire symétrique associée.

1) Montrer que

$$(1) \quad \lambda \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \Lambda \|x\|^2,$$

où λ (resp. Λ) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de M .

En déduire que les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si B est un produit scalaire sur E .

2) Quels sont les points de la sphère unité $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ où la forme quadratique Q est maximale ? minimale ?

3) Application : si $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel, trouver ces points lorsque

$$Q(x) = x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Solution

1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E dans laquelle M se diagonalise. Si

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

on a alors dans cette base

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,$$

où λ_i est la valeur propre associée à e_i . Alors en minorant tous les λ_i par λ et en les majorant par Λ , on obtient les inégalités (1).

Si les valeurs propres sont strictement positives, alors $\lambda > 0$ et, pour tout x non nul,

$$Q(x) \geq \lambda \|x\|^2 > 0,$$

ce qui montre que la forme bilinéaire symétrique B est un produit scalaire.

Réciproquement, si B est un produit scalaire, alors

$$B(e_i, e_i) = Q(e_i) = \lambda_i > 0.$$

2) Sur la sphère unité on a donc

$$\lambda \leq Q(x) \leq \Lambda.$$

Si x appartient au sous-espace propre associé à Λ , on aura

$$Q(x) = \Lambda,$$

et Q atteint son maximum pour les vecteurs de module 1 de ce sous-espace propre. Ce sont les seuls, en effet, si x n'est pas dans ce sous-espace, il existe un indice i tel que x_i soit non nul et $\lambda_i < \Lambda$. Alors

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 < \Lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \Lambda.$$

De même $Q(x)$ atteint son minimum λ en tout vecteur de module 1 du sous-espace propre associé à λ .

3) La forme quadratique Q a pour matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\det(A - XI) = -X^3 + X^2 + 6X = -X(X - 3)(X + 2).$$

Alors $\lambda = -2$ et $\Lambda = 3$. On détermine facilement les sous-espaces propres correspondants ils sont respectivement engendrés par $(1, 0, -1)$ et $(1, 1, 1)$. Alors Q atteint son maximum sur le sphère unité pour les vecteurs $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, et son minimum pour les vecteurs $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

6.2 Valeurs propres

Exercice 117

Déterminer suivant les valeurs du nombre réel a la signature et le rang de la forme quadratique Q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a(x_1^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + \dots + x_n)^2.$$

Solution

En développant, on obtient

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (a - 1)(x_1^2 + \dots + x_n^2) - \sum_{i \neq j} x_i x_j,$$

et la matrice A de cette forme quadratique est alors

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & a-1 \end{bmatrix}.$$

On calcule le déterminant de $A - \lambda I$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-1-\lambda & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la somme des $n-1$ dernières lignes à la première, on met en facteur $a-n-\lambda$. On a donc

$$\det(A - \lambda I) = (a - n - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & a-1-\lambda & \ddots & & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix}.$$

En ajoutant alors la première lignes aux autres on obtient

$$\det(A - \lambda I) = (a - n - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & a-\lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a - n - \lambda)(a - \lambda)^{n-1}.$$

La matrice A admet donc a comme valeur propre d'ordre $n-1$ et $a-n$ comme valeur propre simple. On a alors le tableau suivant.

	σ_+	σ_-	σ	$\text{rg } Q = \sigma_+ + \sigma_-$
$a < 0$	0	n	$(0, n)$	n .
$a = 0$	0	1	$(0, 1)$	1
$0 < a < n$	$n-1$	1	$(n-1, 1)$	n
$a = n$	$n-1$	0	$(n-1, 0)$	$n-1$
$a > n$	n	0	$(n, 0)$	n

Exercice 118

Soit Q une forme quadratique sur un espace E de dimension n . On suppose qu'une matrice A de Q possède les propriétés suivantes :

- (i) A possède une valeur propre d'ordre $n-1$;
- (ii) $\det A > 0$;
- (iii) $\text{tr } A \leq 0$.

Trouver la signature de Q .

Solution

Soit λ la valeur propre d'ordre $n - 1$. Comme A est diagonalisable, il existe une autre valeur propre μ qui est valeur propre simple. Alors

$$\det A = \mu \lambda^{n-1} \quad \text{et} \quad \text{tr } A = \mu + (n - 1)\lambda.$$

Si $n = 2p + 1$, alors $\det A = \mu \lambda^{2p}$, et μ est positif, puis $(n - 1)\lambda = \text{tr } A - \mu$ est négatif. On a donc

$$\sigma = (1, n - 1).$$

Si $n = 2p$, alors $\det A = \mu \lambda^{2p-1}$ donc μ et λ sont de même signe qui est aussi celui de $\text{tr } A$. On a donc cette fois

$$\sigma = (0, n).$$

Exercice 119

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des nombres réels non tous nuls. Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j x_i x_j.$$

Quelles sont les valeurs propres de la matrice A de cette forme quadratique ?

Solution

On a simplement

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2.$$

Il en résulte que $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 0$, donc $\sigma = (1, 0)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 1$.

La matrice A a donc 0 comme valeur propre d'ordre $n - 1$. Il existe une valeur propre d'ordre 1 qui n'est autre que

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Exercice 120

Déterminer la signature et le rang de la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ par

$$Q(f) = \int_{-1}^1 f(t)^2 \sin t \, dt .$$

Solution

La forme bilinéaire associée est définie par

$$B(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) \sin t \, dt .$$

On remarque que si f et g ont la même parité, alors $B(f, g)$ est nulle. Notons

$$I_n = \int_{-1}^1 t^n \sin t \, dt .$$

Dans la base $(1, X^2, X^4, X, X^3)$ de $\mathbb{R}_4[X]$, la matrice A de la forme quadratique s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_1 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & I_5 \\ 0 & 0 & 0 & I_5 & I_7 \\ I_1 & I_3 & I_5 & 0 & 0 \\ I_3 & I_5 & I_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

On a alors

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \lambda^k d_{5-k}$$

où d_p est la somme des déterminants d'ordre p extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale. On a donc

$$d_1 = \operatorname{tr} A = 0 ,$$

puis

$$d_2 = -(I_1^2 + 2I_3^2 + 2I_5^2 + I_7^2) .$$

Le coefficient d_3 est nul car tous les déterminants d'ordre 3 extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale comportent un bloc de quatre zéros, donc ont deux colonnes proportionnelles et sont nuls.

Les déterminants d'ordre 4 non nuls extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale sont de la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & U \\ {}^tU & 0 \end{vmatrix} = (\det U)^2 .$$

Alors

$$\begin{aligned} d_4 &= \begin{vmatrix} I_1 & I_3 \\ I_3 & I_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} I_3 & I_5 \\ I_5 & I_7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} I_1 & I_3 \\ I_5 & I_7 \end{vmatrix}^2 \\ &= (I_1 I_5 - I_3^2)^2 + (I_3 I_7 - I_5^2)^2 + (I_1 I_7 - I_3 I_5)^2. \end{aligned}$$

Pour finir

$$d_5 = \det A = 0,$$

car les trois premiers vecteurs de la matrice A forment un système de rang 2 au plus. Finalement

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^4 + d_2 \lambda^2 + d_4).$$

La matrice A étant symétrique a des valeurs propres réelles. Le trinôme $X^2 + d_2 X + d_4$ a donc deux racines positives u et v , et les valeurs propres sont alors

$$0, \quad \pm\sqrt{u}, \quad \pm\sqrt{v}.$$

Si ces racines ne sont pas nulles, on obtient $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 2$, d'où $\sigma = (2, 2)$ et Q est de rang $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

Il suffit donc pour cela que d_4 soit non nul, ou même que $I_1 I_5 - I_3^2$ soit non nul.

On peut calculer les intégrales I_{2k+1} si $k \geq 0$. En intégrant par partie deux fois de suite

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \left[-t^{2k+1} \cos t \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (2k+1)t^{2k} \cos t \, dt \\ &= \left[-t^{2k+1} \cos t + (2k+1)t^{2k} \sin t \right]_{-1}^1 - (2k+1)(2k) \int_{-1}^1 t^{2k-1} \sin t \, dt \\ &= 2(-\cos 1 + (2k+1) \sin 1) - 2k(2k+1)I_{2k-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc successivement

$$I_1 = 2(-\cos 1 + \sin 1),$$

$$I_3 = 2(-\cos 1 + 3 \sin 1) - 6I_1 = 2(5 \cos 1 - 3 \sin 1),$$

$$I_5 = 2(-\cos 1 + 5 \sin 1) - 20I_3 = 2(-101 \cos 1 + 65 \sin 1).$$

Alors

$$I_1 I_5 - I_3^2 = 16 \cos^2 1 (14 \tan^2 1 - 34 \tan 1 + 19).$$

Or

$$14 \tan^2 1 - 34 \tan 1 + 19 > 0,0054 > 0,$$

et il en résulte que d_4 est non nul.

Exercice 121

Soit a, b deux nombres réels non tous deux nuls. Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x, y, z) = ax^2 - (a+b)y^2 + bz^2 + 2bxy + 2ayz - 2(a+b)xz.$$

Solution

La matrice de Q est donc

$$A = \begin{bmatrix} a & b & -(a+b) \\ b & -(a+b) & a \\ -(a+b) & a & b \end{bmatrix}.$$

Cherchons ses valeurs propres. On a

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b & -(a+b) \\ b & -(a+b) - \lambda & a \\ -(a+b) & a & b - \lambda \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la somme des deux dernières lignes à la première, on obtient

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ b & -(a+b) - \lambda & a \\ -(a+b) & a & b - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & -(a+b) - \lambda & a \\ -(a+b) & a & b - \lambda \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première colonne aux deux autres, on trouve

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -(a+2b) - \lambda & a-b \\ -(a+b) & 2a+b & a+2b-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left((\lambda+a+2b)(\lambda-a-2b) - (a-b)(a+2b) \right),$$

d'où

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - (a+2b)^2 - (a-b)(2a+b)) = -\lambda(\lambda^2 - 3(a^2 + b^2 + ab)).$$

Comme $a^2 + b^2 + ab$ est toujours positif, on obtient trois valeurs propres distinctes : $0, \pm \sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}$. On a alors $\sigma_+ = \sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

Exercice 122

Soit a, b, c, d quatre nombres réels non tous nuls. Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x, y, z, t) = 2axz + 2bxt + 2cyz + 2dyt.$$

Solution

La matrice A de Q est donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & U \\ {}^tU & 0 \end{bmatrix},$$

où

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Puisque A est diagonalisable, cherchons les valeurs propres, nécessairement réelles, de A . On a

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{p=0}^3 (-1)^p \lambda^p d_{4-p} + \lambda^4$$

où d_k est la somme des déterminants d'ordre k extraits de A qui sont symétriques par rapport à la diagonale principale. On calcule donc

$$d_4 = \det A = \det U \det {}^tU = (\det U)^2 = (ad - bc)^2.$$

Ensuite d_3 est nul car les déterminants d'ordre 3 contiennent un bloc de quatre zéros. Puis

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

et finalement

$$d_1 = \operatorname{tr} A = 0.$$

On obtient donc le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (ad - bc)^2.$$

Si $ad - bc$ est nul, on a

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

et P possède une racine double nulle et deux autres de signes opposés $\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. On a alors $\sigma_+ = \sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

Si $ad - bc$ n'est pas nul, le trinôme $X^2 - X(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (ad - bc)^2$ possède nécessairement deux racines strictement positives α et β et P a pour racines $\pm\sqrt{\alpha}$ et $\pm\sqrt{\beta}$. On a alors $\sigma_+ = \sigma_- = 2$, donc $\sigma = (2, 2)$ et le rang vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

Exercice 123

Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ définie dans la base canonique par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i x_{n-i}.$$

Solution

La matrice de Q dans la base canonique est donc

$$A_n = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

On remarque que A_n est symétrique et orthogonale. Ses valeurs propres ne peuvent valoir que 1 ou -1 et le rang vaut n .

On étudie $P_n = \det(A_n - \lambda I_n)$ suivant la parité de n .

Si $n = 2p$, on a

$$P_{2p} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & & & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne

$$P_{2p} = (-\lambda) \begin{vmatrix} \vdots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & & & & & -\lambda \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis en développant les deux déterminants d'ordre $2p-1$ par rapport à la dernière ligne

$$P_{2p} = (-\lambda)^2 P_{2p-2} - P_{2p-2} = (\lambda^2 - 1) P_{2p-2}.$$

Comme

$$P_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

on en déduit que

$$P_{2p} = (\lambda^2 - 1)^p = (\lambda - 1)^p (\lambda + 1)^p.$$

Donc $\sigma_+ = \sigma_- = p$ et $\sigma = (p, p)$.

Si $n = 2p + 1$, on a cette fois

$$P_{2p+1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 - \lambda & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & & -\lambda & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & & & & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la $(p + 1)$ -ième ligne, on trouve

$$P_{2p+1} = (1 - \lambda)P_{2p} = -(\lambda - 1)^{p+1}(\lambda + 1)^p.$$

Donc $\sigma_+ = p + 1$, $\sigma_- = p$ et $\sigma = (p + 1, p)$.

6.3 Réduction par la méthode de Gauss

Exercice 124

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2xz.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient

$$Q(x, y, z) = (x + 2y - z)^2 - 3y^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + 2y - z \\ Y &= y \\ Z &= z \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z) = X^2 - 3Y^2.$$

Alors $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - 2Y + Z \\ y &= Y \\ z &= Z \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 125

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 2xy - 4xz.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient

$$Q(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + 4y^2 - 8z^2 + 4yz,$$

puis, en regroupant les termes contenant y ,

$$Q(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + (2y + z)^2 - 9z^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + y - 2z \\ Y &= 2y + z \\ Z &= 3z \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z) = X^2 + Y^2 - Z^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - \frac{Y}{2} + \frac{5Z}{6} \\ y &= \frac{Y}{2} - \frac{Z}{6} \\ z &= \frac{Z}{3} \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 126

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + t^2 + 4xy + 4xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient

$$Q(x, y, z, t) = (x + 2y + 2z + t)^2 - 2y^2 - 4z^2 - 6yz - 2yt - 2zt,$$

puis, en regroupant les termes contenant y ,

$$Q(x, y, z, t) = (x + 2y + 2z + t)^2 - 2(y + 3z/2 + t/2)^2 + z^2/2 + t^2/2 + zt,$$

et enfin

$$Q(x, y, z, t) = (x + 2y + 2z + t)^2 - 2(y + 3z/2 + t/2)^2 + (z + t)^2/2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + 2y + 2z + t \\ Y &= y + \frac{3}{2}z + \frac{t}{2} \\ Z &= z + t \\ T &= t \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = X^2 - 2Y^2 + \frac{1}{2}Z^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - 2Y + Z - T \\ y &= Y - \frac{3}{2}Z + T \\ z &= Z - T \\ t &= T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 127

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + 6xy + 8yz + z^2 + 4zt + 4xt + t^2.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient

$$Q(x, y, z, t) = (x + 3y + 2t)^2 - 12yt - 9y^2 - 3t^2 + 8yz + z^2 + 4zt,$$

puis, en regroupant les termes contenant z ,

$$Q(x, y, z, t) = (x + 3y + 2t)^2 + (z + 4y + 2t)^2 - 28yt - 25y^2 - 7t^2,$$

et enfin, en regroupant les termes contenant y ,

$$Q(x, y, z, t) = (x + 3y + 2t)^2 + (z + 4y + 2t)^2 - (5y + 14t/5)^2 + 21t^2/25.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + 3y + 2t \\ Y &= z + 4y + 2t \\ Z &= 5y + \frac{14}{5}t \\ T &= \frac{t}{5} \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = X^2 + Y^2 - Z^2 + 21T^2.$$

Alors $\sigma_+ = 3$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (3, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - \frac{3}{5}Z - \frac{8}{5}T \\ y &= \frac{1}{5}Z - \frac{14}{5}T \\ z &= Y - \frac{4}{5}Z + \frac{6}{5}T \\ t &= 5T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & -14/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}.$$

Exercice 128

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2t^2 + 6xy - 4xz - 4yz + 8yt - 4zt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = (x + 3y - 2z)^2 - 8y^2 - 2z^2 - 2t^2 + 8yz + 8yt - 4zt,$$

puis en regroupant les termes restants,

$$Q(x, y, z, t) = (x + 3y - 2z)^2 - 2(2y - z - t)^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + 3y - 2z \\ Y &= 2y - z - t \\ Z &= z \\ T &= t \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = X^2 - 2Y^2.$$

Alors $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - \frac{3}{2}Y + \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2}T \\ y &= \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}T \\ z &= Z \\ t &= T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 129

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = 3x^2 + 2y^2 - z^2 - 2t^2 + 2xy - 2yz + 2yt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant z , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = -(z + y)^2 + 3x^2 + 3y^2 - 2t^2 + 2xy + 2yt,$$

puis en regroupant les termes contenant t ,

$$Q(x, y, z, t) = -(z + y)^2 - 2(t - y/2)^2 + 3x^2 + 7y^2/2 + 2xy,$$

enfin en regroupant les termes contenant x ,

$$Q(x, y, z, t) = -(z + y)^2 - 2(t - y/2)^2 + 3(x + y/3)^2 + 19y^2/6.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + \frac{y}{3} \\ Y &= y \\ Z &= z + y \\ T &= t - \frac{y}{2} \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = 3X^2 + \frac{19}{6}Y^2 - Z^2 - 2T^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 2$, donc $\sigma = (2, 2)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - \frac{1}{3}Y \\ y &= Y \\ z &= Z - Y \\ t &= \frac{1}{2}Y + T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 130

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = (x + y + z + t)^2 - z^2 - t^2 - 2zt - 2yt,$$

puis en regroupant les termes contenant z ,

$$Q(x, y, z, t) = (x + y + z + t)^2 - (z + t)^2 - 2yt,$$

enfin en écrivant yt comme différence de carrés,

$$Q(x, y, z, t) = (x + y + z + t)^2 - (z + t)^2 - 2(y/2 + t/2)^2 + 2(y/2 - t/2)^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + y + z + t \\ Y &= z + t \\ Z &= \frac{y + t}{2} \\ T &= \frac{y - t}{2} \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = X^2 - Y^2 - 2Z^2 + 2T^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 2$, donc $\sigma = (2, 2)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= X - Y - Z - T \\ y &= Z + T \\ z &= Y - Z + T \\ t &= Z - T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 131

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = 4xy + 6yz + 4zt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

Comme il n'y a pas de termes carrés dans Q , on introduit tout d'abord,

$$u = x + y \quad \text{et} \quad v = x - y,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Alors

$$Q(x, y, z, t) = u^2 - v^2 + 3(u-v)z + 4tz.$$

En regroupant dans un carré les termes contenant u , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = (u + 3z/2)^2 - v^2 - 3vz + 4tz - 9z^2/4,$$

puis en regroupant les termes contenant v ,

$$Q(x, y, z, t) = (u + 3z/2)^2 - (v + 3z/2)^2 + 4tz.$$

Le produit $4tz$ s'écrit comme différence de carrés et l'on obtient finalement,

$$Q(x, y, z, t) = (x + y + 3z/2)^2 - (x - y + 3z/2)^2 + (z + t)^2 - (z - t)^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + y + \frac{3z}{2} \\ Y &= x - y + \frac{3z}{2} \\ Z &= z + t \\ T &= z - t \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = X^2 - Y^2 + Z^2 - T^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 2$, donc $\sigma = (2, 2)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - \frac{3}{4}Z - \frac{3}{4}T \\ y &= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ z &= \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}T \\ t &= \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 132

Soit a un nombre réel. Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

En regroupant dans un carré les termes contenant y , on obtient,

$$Q(x, y, z) = (y + 2x - z)^2 + x^2 + 2xz + (a - 1)z^2,$$

puis en regroupant les termes contenant x ,

$$Q(x, y, z) = (y + 2x - z)^2 + (x + z)^2 + (a - 2)z^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= 2x + y - z \\ Y &= x + z \\ Z &= z \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z) = X^2 + Y^2 + (a - 2)Z^2.$$

Alors

- (i) si $a > 2$ on a $\sigma_+ = 3$ et $\sigma_- = 0$, donc $\sigma = (3, 0)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$;
- (ii) si $a = 2$ on a $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 0$, donc $\sigma = (2, 0)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$;
- (iii) si $a < 2$ on a $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= Y - Z \\ y &= X - 2Y + 3Z \\ z &= Z \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 133

Soit a, b, c trois nombres réels non nuls. Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = axy + bxz + cyz.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

Comme il n'y a pas de termes carrés dans Q , on introduit tout d'abord,

$$u = \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{x-y}{2},$$

c'est-à-dire

$$x = u + v \quad \text{et} \quad y = u - v.$$

Alors

$$Q(x, y, z) = a(u^2 - v^2) + b(u+v)z + c(u-v)z = au^2 - av^2 + (b+c)uz + (b-c)vz.$$

En regroupant dans un carré les termes contenant u , on obtient,

$$Q(x, y, z) = a \left(u + \frac{b+c}{2a} z \right)^2 - \frac{(b+c)^2}{4a} z^2 + (b-c)vz - av^2,$$

puis en regroupant les termes contenant v ,

$$Q(x, y, z) = a \left(u + \frac{b+c}{2a} z \right)^2 - a \left(v - \frac{b-c}{2a} z \right)^2 - \frac{bc}{a} z^2,$$

ou encore

$$Q(x, y, z) = \frac{1}{4a} (ax + ay + (b+c)z)^2 - \frac{1}{4a} (ax - ay - (b-c)z)^2 - \frac{bc}{a} z^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= ax + ay + (b+c)z \\ Y &= ax - ay - (b-c)z \\ Z &= z \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z) = \frac{1}{4a} X^2 - \frac{1}{4a} Y^2 - \frac{bc}{a} Z^2.$$

Alors

- (i) si $abc > 0$ on a $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 2$, donc $\sigma = (1, 2)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$;
- (ii) si $abc < 0$ on a $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2a}(X + Y - 2cZ) \\ y &= \frac{1}{2a}(X - Y - 2bZ) \\ z &= Z \end{cases} ,$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2c \\ 1 & -1 & -2b \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} ,$$

qui est telle que

$${}^tPAP = \frac{1}{2} {}^tP \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} P = \frac{1}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4bc \end{bmatrix} .$$

6.4 Réduction par deux méthodes

Exercice 134

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz + 8yz .$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss, puis en diagonalisant. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver pour chaque méthode, une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

1) En regroupant dans un carré les termes contenant x , on obtient,

$$Q(x, y, z) = (2x + y - z)^2 - 9z^2 + 10yz ,$$

puis en regroupant les termes contenant z ,

$$Q(x, y, z) = (2x + y - z)^2 - (3z - 5y/3)^2 + 25y^2/9 .$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= 2x + y - z \\ Y &= 5y - 9z \\ Z &= 5y \end{cases} ,$$

on a donc

$$Q(x, y, z) = X^2 - \frac{1}{9}Y^2 + \frac{1}{9}Z^2.$$

Alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{90}(45X - 5Y - 4Z) \\ y &= \frac{Z}{5} \\ z &= \frac{1}{9}(Z - Y) \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 45 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) En retirant à la première ligne le double de la deuxième, puis en ajoutant le double de la première colonne à la deuxième, on obtient

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 4 \\ -2 & 4 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2\lambda & -10 \\ 2 & 1 - \lambda & 4 \\ -2 & 4 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -10 \\ 2 & 5 - \lambda & 4 \\ -2 & 0 & -8 - \lambda \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième colonne ce qui donne

$$\det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(\lambda(8 + \lambda) - 20) = -(\lambda - 5)(\lambda + 10)(\lambda - 2).$$

Il y a deux valeurs propres strictement positives et une strictement négative. On retrouve la signature $\sigma = (2, 1)$. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe donc P orthogonale telle que

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Recherchons les vecteurs propres (x, y, z) de A en résolvant le système

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $\lambda = 5$, le système se réduit à

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z &= 0 \\ -2x + 4y - 13z &= 0 \end{cases},$$

qui donne $z = 0$ et $x = 2y$. On peut donc prendre comme vecteur unitaire

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0).$$

Pour $\lambda = 2$, le système se réduit à

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \end{cases},$$

qui donne $x = -z$ et $y = 2z$. On peut donc prendre comme vecteur unitaire

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1).$$

Pour $\lambda = -10$, le système se réduit à

$$\begin{cases} 7x + y - z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{cases},$$

qui donne $y = -2x$ et $z = 5x$. On peut donc prendre comme vecteur unitaire

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, 5).$$

La matrice P correspondante est donc la matrice des vecteurs (u_1, u_2, u_3)

$$P = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{5} & -2 \\ 0 & -\sqrt{5} & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 135

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z) = xy + xz + xt + yz + yt + zt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss, puis en diagonalisant. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, trouver pour chaque méthode, une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

1) Comme il n'y a pas de carré, on introduit les variables

$$u = \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{x-y}{2},$$

soit

$$x = u + v \quad \text{et} \quad y = u - v,$$

et donc

$$xy = u^2 - v^2.$$

Alors

$$Q(x, y, z, t) = xy + (x + y)(z + t) + zt = u^2 - v^2 + 2u(z + t) + zt.$$

En regroupant dans un carré les termes contenant u , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = (u + z + t)^2 - v^2 - z^2 - t^2 - zt,$$

puis en regroupant les termes contenant z ,

$$Q(x, y, z, t) = (u + z + t)^2 - (z + t/2)^2 - v^2 - 3t^2/4,$$

ou encore

$$Q(x, y, z, t) = \frac{1}{4} \left[(x + y + 2z + 2t)^2 - (x - y)^2 - (2z + t)^2 - 3t^2 \right].$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + y + 2z + 2t \\ Y &= x - y \\ Z &= 2z + t \\ T &= t \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = \frac{1}{4} \left[X^2 - Y^2 - Z^2 - 3T^2 \right].$$

Alors $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 3$, donc $\sigma = (1, 3)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 4$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(X + Y - Z - T) \\ y &= \frac{1}{2}(X - Y - Z - T) \\ z &= \frac{1}{2}(Z - T) \\ t &= T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = \frac{1}{2} {}^tP \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2) Cherchons le déterminant de la matrice $2A - I$. En ajoutant la somme des trois dernières lignes à la première, le nombre $3 - \lambda$ se met en facteur et donc

$$\det(2A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

On soustrait alors la première colonne aux autres et l'on obtient

$$\det(2A - \lambda I) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda-1)^3.$$

La matrice A a deux valeurs propres : $3/2$ valeur propre simple et $-1/2$ valeur propre triple. On retrouve la signature $\sigma = (1, 3)$. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe donc P orthogonale telle que

$${}^tPAP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-1/2$ est l'hyperplan d'équation

$$x + y + z + t = 0.$$

On choisit une base orthonormée de cet hyperplan. Par exemple

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1), \quad u_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1).$$

Le sous-espace propre associé à $3/2$ est la droite orthogonale au précédent, engendrée par le vecteur

$$u_4 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1).$$

La matrice P correspondante est donc la matrice des vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4)

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 136

Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la forme quadratique Q définie par

$$Q(x, y, z, t) = -z^2 + t^2 - 4xy - 2xz + 2xt - 2yz - 2yt.$$

Réduire la forme quadratique Q par la méthode de Gauss, puis en diagonalisant. Trouver sa signature et son rang. Si A est la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, trouver pour chaque méthode, une matrice de passage P telle que tPAP soit diagonale.

Solution

1) En regroupant dans un carré les termes contenant z , on obtient,

$$Q(x, y, z, t) = -(z + x + y)^2 + x^2 + y^2 + t^2 - 2xy + 2xt - 2yt,$$

puis en regroupant les termes contenant x ,

$$Q(x, y, z, t) = -(z + x + y)^2 + (x - y + t)^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} X &= x + y + z \\ Y &= x - y + t \\ Z &= z \\ T &= t \end{cases},$$

on a donc

$$Q(x, y, z, t) = -X^2 + Y^2.$$

Alors $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

On obtient facilement

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(X + Y - Z - T) \\ y &= \frac{1}{2}(X - Y - Z + T) \\ z &= Z \\ t &= T \end{cases},$$

d'où la matrice de passage

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

qui est telle que

$${}^tPAP = {}^tP \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) La matrice A étant de rang 2 et diagonalisable, possède une valeur propre nulle double et le sous-espace propre associé est de dimension 2. Déterminons le par la méthode du pivot.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & \boxed{1} \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur (x, y, z, t) du sous-espace vérifie donc

$$t = -x + y \quad \text{et} \quad z = -x - y.$$

On peut donc prendre comme vecteurs normés

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1, 1),$$

ces vecteurs sont de plus orthogonaux.

Il résulte de ces calculs que si l'on note C_j la j -ième colonne de A , alors

$$C_1 - C_3 - C_4 = C_2 - C_3 + C_4 = 0.$$

Pour trouver le déterminant de $A - \lambda I$ on va se servir des mêmes relations linéaires en remplaçant C_1 par $C_1 - C_3 - C_4$ et C_2 par $C_2 - C_3 + C_4$, où cette fois les C_i sont les colonnes de $A - \lambda I$, ce qui va permettre de mettre λ en facteur dans les deux premières colonnes. On trouve

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 & -1 \\ \lambda & \lambda & -1 - \lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

En additionnant la première ligne aux deux dernières, en développant par rapport à la première colonne, il vient

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Enfin en soustrayant la première colonne des deux autres

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

Il y a une valeur propre strictement positive et une strictement négative. On retrouve la signature $\sigma = (1, 1)$. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe donc P orthogonale telle que

$${}^t P A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Recherchons les vecteurs propres (x, y, z, t) de A associés aux valeurs propres non nulles en résolvant par la méthode du pivot le système

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On doit obtenir des droites. On se contente de faire le pivot sur les trois dernières lignes de $A - \lambda I$.

Pour $\lambda = 3$,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} -2 & -3 & -1 & -1 & 0 & -5 & -1 & -5 & 0 & -5 & -1 & -5 & 0 & 0 & \boxed{9} & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & \longrightarrow & 0 & -2 & -4 & -2 & \longrightarrow & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & \longrightarrow & 0 & 1 & 2 & 1 & \longrightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & -2 & & 1 & -1 & 0 & -2 & & 1 & -1 & 0 & -2 & & 1 & 0 & 2 & -1 & & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

qui donne $z = 0$, $x = t$, et $y = -t$. On peut donc prendre comme vecteur unitaire

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1).$$

Pour $\lambda = -3$, on a de même

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} -2 & 3 & -1 & -1 & 0 & \boxed{1} & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \longrightarrow & 0 & -2 & 2 & 4 & \longrightarrow & 0 & 0 & 0 & \boxed{18} & \longrightarrow & 0 & 0 & 0 & 18 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 4 & & 1 & -1 & 0 & 4 & & 1 & 0 & -1 & 11 & & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

qui donne $t = 0$, $x = z$ et $y = z$. On peut donc prendre comme vecteur unitaire

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0).$$

La matrice P correspondante est donc la matrice des vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4)

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 137

Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ définie dans la base canonique par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n x_1 x_j,$$

par la méthode de Gauss, puis en cherchant les valeurs propres de la matrice de Q dans la base canonique.

Solution

1) Par la méthode de Gauss, on a immédiatement

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^2 - (x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Donc $\sigma_+ = \sigma_- = 1$, $\sigma = (1, 1)$ et le rang vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

2) La matrice A de Q dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est de rang 2 car les deux premiers vecteurs colonnes son indépendants et les $n - 1$ derniers vecteurs sont égaux. La matrice A admet 0 comme valeur propre d'ordre $n - 2$. Alors, il existe deux autres valeurs propres non nulles et

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + d_1(-\lambda)^{n-1} + d_2(-\lambda)^{n-2},$$

où $d_1 = \text{tr } A = 1$ et d_2 est la somme des déterminants d'ordre 2 extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale. Les seuls déterminants non nuls sont de la forme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ et valent -1 et il y en a $n - 1$, donc $d_2 = -(n - 1)$ et

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - (n - 1)).$$

Comme le produit des racines non nulles est négatif, il y a une valeur propre strictement positive et une strictement négative et l'on retrouve $\sigma = (1, 1)$.

Exercice 138

Trouver la signature et le rang de la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$ définie dans la base canonique par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n x_1 x_j + 2 \sum_{i=2}^{n-1} x_i x_n + x_n^2,$$

par la méthode de Gauss, puis en cherchant les valeurs propres de la matrice de Q dans la base canonique.

Solution

1) Par la méthode de Gauss, on a immédiatement

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^2 - (x_2 + \dots + x_{n-1})^2.$$

Donc $\sigma_+ = \sigma_- = 1$, $\sigma = (1, 1)$ et le rang vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

2) La matrice A de Q dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est de rang 2 car les deux premiers vecteurs colonnes sont indépendants et les autres vecteurs sont égaux à un des deux premiers. La matrice A admet 0 comme valeur propre d'ordre $n-2$. Alors, il existe deux autres valeurs propres non nulles et

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + d_1(-\lambda)^{n-1} + d_2(-\lambda)^{n-2},$$

où $d_1 = \operatorname{tr} A = 2$ et d_2 est la somme des déterminants d'ordre 2 extraits de A et symétriques par rapport à la diagonale principale. Les seuls déterminants non nuls sont de la forme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et valent -1 et il y en a $n-2$ de chaque type, donc $d_2 = -2(n-2)$ et

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2)).$$

Comme le produit des racines non nulles est négatif, il y a une valeur propre strictement positive et une strictement négative et l'on retrouve $\sigma = (1, 1)$.

6.5 Divers

Exercice 139

Déterminer suivant les valeurs des nombres réels a et b la signature et le rang de la forme quadratique Q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x, y, z) = (ax + y)^2 + (bx + z)^2 - (y + z)^2.$$

Solution

Posons

$$\begin{cases} X &= ax + y \\ Y &= bx + z \\ Z &= y + z \end{cases}.$$

La matrice

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a pour déterminant $-(a+b)$. Si ce déterminant est non nul, c'est-à-dire si $a \neq -b$, on a, dans la nouvelle base,

$$Q(x, y, z) = X^2 + Y^2 - Z^2,$$

alors $\sigma_+ = 2$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (2, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 3$.

Si $a = -b$, alors, par la méthode de Gauss,

$$Q(x, y, z) = 2a^2x^2 + 2axy - 2axz - 2yz = 2(ax + y/2 - z/2)^2 - (y + z)^2/2,$$

alors $\sigma_+ = 1$ et $\sigma_- = 1$, donc $\sigma = (1, 1)$ et le rang de Q vaut $\sigma_+ + \sigma_- = 2$.

Exercice 140

1) Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q_1 définie par

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx.$$

Montrer que Q_1 est une forme quadratique définie positive.

2) Soit dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q_2 définie par

$$Q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + 6xy + 8yz + 8zx.$$

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire défini par la forme quadratique Q_1 qui soit aussi orthogonale pour la forme bilinéaire associée à Q_2 (base Q_1 -orthonormée et Q_2 -orthogonale).

Solution

1) On peut écrire

$$Q_1(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \right].$$

Cette forme est donc positive, et si $Q_1(x, y, z)$ est nul, on en déduit que

$$x + y = y + z = z + x = 0,$$

puis que (x, y, z) est nul. La forme quadratique est donc définie positive. Il en résulte que la forme bilinéaire associée est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2) La méthode consiste à écrire la matrice de Q_2 dans une base où la matrice de Q_1 est I , puis à diagonaliser la matrice de Q_2 ainsi trouvée dans une base orthonormée.

Posons

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+x) \end{cases},$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

d'où l'on tire

$$P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

on a alors

$$Q_1(x, y, z) = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et les vecteurs colonnes (e_1, e_2, e_3) de P forment une base orthonormée pour le produit scalaire B_1 associé à Q_1 . On a donc

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, -1) \quad , \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1).$$

Les matrices des deux formes quadratiques dans la base canonique sont

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le changement de variable ci-dessus est donc tel que

$${}^t P A_1 P = I.$$

Calculons $\mathcal{A}_2 = {}^t P A_2 P$. On a

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

On diagonalise la matrice $\mathcal{A}_2$ en calculant

$$\det(\mathcal{A}_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 & 4 \\ 4 & -2 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

En additionnant la somme des deux dernières lignes à la première, le nombre $4 - \lambda$ se met en facteur.

Il vient

$$\det(\mathcal{A}_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 - \lambda & 4 - \lambda \\ 4 & -2 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Puis en soustrayant la première colonne aux deux autres

$$\det(\mathcal{A}_2 - \lambda I) = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 - \lambda & -2 \\ 4 & -2 & -6 - \lambda \end{vmatrix},$$

et finalement

$$\det(\mathcal{A}_2 - \lambda I) = (4 - \lambda)((6 + \lambda)^2 - 4) = (4 - \lambda)(4 + \lambda)(8 + \lambda).$$

On obtient donc les trois valeurs propres simples de $\mathcal{A}_2$ qui sont 4, -4 et -8 . Cherchons un vecteur $xe_1 + ye_2 + ze_3$ des sous-espaces propres associés.

Valeur propre 4. En simplifiant le système devient

$$\begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{cases},$$

d'où l'on tire $x = y = z$.

Valeur propre -4 . En simplifiant le système devient

$$\begin{cases} y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases},$$

d'où l'on tire $x = 0$ et $y = -z$.

Valeur propre -8 . En simplifiant le système devient

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{cases},$$

d'où l'on tire $x = -2y$ et $y = z$.

On obtient alors une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de vecteurs propres de $\mathcal{A}_2$.

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3), \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3), \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_1 + e_2 + e_3),$$

et en revenant à la base canonique

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1), \quad f_2 = (-1, 1, 0), \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 2).$$

La base (f_1, f_2, f_3) répond à la question.

Exercice 141

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension n , ℓ une forme linéaire sur E et e un vecteur de E tel que $\ell(e) = 1$. Montrer que l'on définit une forme quadratique Q sur E en posant

$$Q(X) = \|X - \ell(X)e\|^2.$$

Quelle est la signature de cette forme quadratique ?

Si la forme linéaire ℓ est définie pour tout X de E par

$$\ell(X) = (X | e),$$

montrer que

$$Q(X) = \|X\|^2 - (X | e)^2.$$

Solution

Si l'on pose

$$B(X, Y) = (X - \ell(X)e | Y - \ell(Y)e),$$

on obtient une forme bilinéaire symétrique sur E , avec

$$Q(X) = B(X, X) = \|X - \ell(X)e\|^2.$$

Il en résulte que B est une forme bilinéaire symétrique positive, et que Q est une forme quadratique positive qui s'annule lorsque $X - \ell(X)e$ est nul, ce qui implique que X appartient à la droite vectorielle engendrée par e . Réciproquement, si l'on a

$$X = \lambda e,$$

alors

$$\ell(X) = \lambda \ell(e) = \lambda,$$

et donc

$$Q(X) = \|X - \ell(X)e\|^2 = \|X - \lambda e\|^2 = 0.$$

Toutes les valeurs propres d'une matrice de Q sont donc positives et une seule est nulle. Il en résulte que le rang de Q vaut $n - 1$ et que $\sigma = (n - 1, 0)$.

Si $\ell(X) = (X | e)$, comme $\ell(e) = 1$, cela implique que e est de norme 1. Alors, en développant,

$$B(X, Y) = (X | Y) + \ell(X)\ell(Y)\|e\|^2 - \ell(X)(e | Y) - \ell(Y)(X | e) = (X | Y) - \ell(X)\ell(Y),$$

d'où

$$Q(X) = \|X\|^2 - (X | e)^2.$$