

Produit scalaire : Résumé de cours et méthodes

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1 Introduction

DÉFINITION

le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

1-1 Produit scalaire et orthogonalité

PROPRIÉTÉ

Dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1-2 Règles de calcul

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- Pour tout réel k , $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté \vec{u}^2 et est appelé carré scalaire de \vec{u}
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (carré de la longueur du vecteur \vec{u})
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (cela signifie que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$)
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2 Produit scalaire et géométrie analytique

PROPRIÉTÉ

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$

► Exemple : soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

2-1 Applications aux équations de droite

PROPRIÉTÉS

- Rappel : toute droite admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
- On appelle vecteur normal d'une droite tout vecteur \vec{n} non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite.
- Si une droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette droite et, réciproquement, si une droite admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal alors elle admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

► Exemple : Soit $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

• Déterminons une équation de la médiatrice de $[BC]$.

Le vecteur $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la médiatrice qui admet donc une équation de la forme $-2x - 8y + c = 0$.

La médiatrice doit passer par $I \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, le milieu de $[BC]$.

On en déduit que $-2 \times 0 - 8 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$.

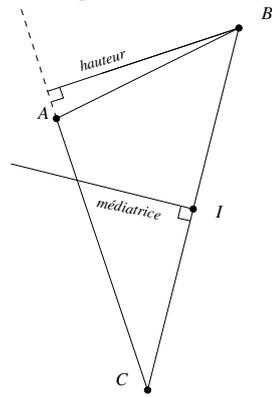
Une équation de la médiatrice est donc : $-2x - 8y - 8 = 0$.

• Déterminons une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

Le vecteur $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme $2x - 6y + c = 0$. La

hauteur passe par le point B . On en déduit que $2 \times 1 - 6 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 16$.

Une équation de la hauteur est donc : $2x - 6y + 16 = 0$.



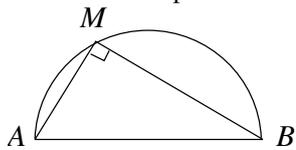
► **Remarque :** La droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est perpendiculaire à la droite D' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$ si et seulement si un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur directeur de D' . Ainsi, $D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \vec{u'} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-b) \times (-b') + a \times a' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

2-2 Applications aux équations de cercle

Pour déterminer une équation du cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon R , il suffit d'exprimer qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$.
Une équation est donc : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

► Exemple : une équation du cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon 3 est : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Pour déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, il suffit d'exprimer qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle si et seulement si le produit scalaire $\vec{AM} \cdot \vec{BM}$ est nul.



► Exemple : $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ avec $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$. Cela équivaut à $(x-1)(x-3) + (y+2)(y-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 + y^2 - 4y + 2y - 8 = 0$.

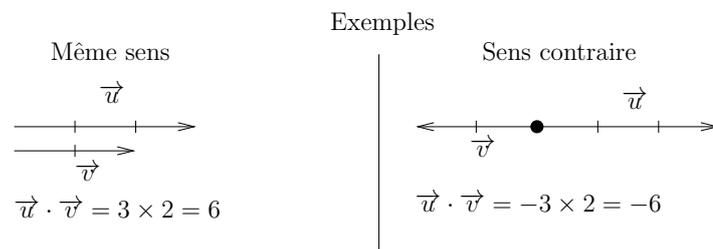
Une équation du cercle est donc : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

3 Produit scalaire et géométrie

3-1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ

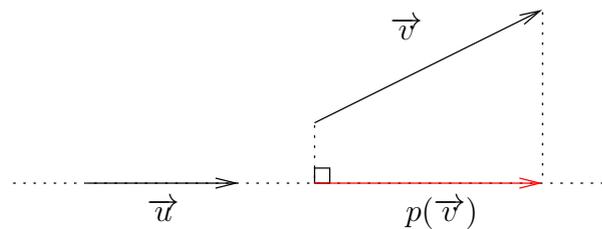
- Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls et de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (produit des longueurs)
- Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls et de sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (opposé du produit des longueurs)
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



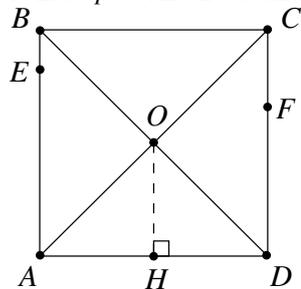
3-2 Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

PROPRIÉTÉ

Etant donné deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} .
 Si on note $p(\vec{v})$, la projection orthogonale de \vec{v} sur une droite portant \vec{u} , alors on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v})$
 (on est donc ramené au cas de deux vecteurs colinéaires)



► Exemple : $ABCD$ est un carré avec $AB = 3$



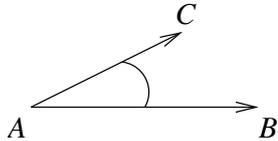
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ car \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{CB} sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$ car le projeté orthogonal de \overrightarrow{AO} sur (AD) est \overrightarrow{AH} et que \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AH} sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$ sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD}

et \vec{EF} sur (AD) on obtient à chaque fois \vec{AD} . Donc tous ces produits scalaires sont égaux à $\vec{AD} \cdot \vec{AD} = 3 \times 3 = 9$.

4 Produit scalaire et angles

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle ABC , $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.



► **Remarque :** De façon plus générale, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

► *Exemple :* Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut en déduire que la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{BAC} est égale à $\frac{\pi}{4}$.

PROPRIÉTÉ

Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC , $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$