

République Tunisienne Ministère de l'éducation ◇◇◇ Lycée secondaire : <i>Ibn Khaldoun</i>	Professeur : <i>Benjeddou Saber</i>
	Résumé : <i>Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte</i>
Année scolaire : <i>2016/2017</i>	Niveau : <i>Bac sciences techniques</i>

**Définition :** "Produit scalaire"

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace.  
 Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  est le réel défini par :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  si  $\vec{AB} = \vec{0}$  ou  $\vec{AC} = \vec{0}$ .
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$  si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont non nuls.

$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$  où  $\|\vec{AB}\|$  désigne la norme du vecteur  $\vec{AB}$ .

**Propriétés :**

Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace et tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

**Théorème :**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux  $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Théorème :** "Expression analytique du produit scalaire"


Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un RON de l'espace  $\xi$ .

Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Définition :** "Vecteurs normal à un plan"

Un vecteur normal  $\vec{n}$  à un plan  $P$  est un vecteur directeur d'une droite  $D$  quelconque perpendiculaire à ce plan.



Théorème :

Soit  $\vec{n}$  un vecteur non nul et  $A$  un point de l'espace.

L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

Théorème :

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $P: ax + by + cz + d = 0$  un plan avec  $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ .

Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $P$ .

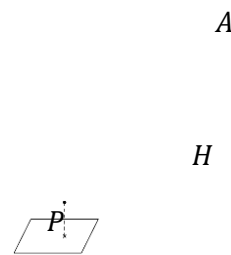
Théorème : "Distance d'un point à un plan"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $P: ax + by + cz + d = 0$  un plan,  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de l'espace et  $H$  son projeté orthogonal sur  $P$ .

La distance de  $A$  à  $P$  est le réel positif  $AH$  noté  $d(A, P)$  et tel que :

$$AH = d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Théorème :

Soit  $P$  et  $Q$  deux plans de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}$  et  $\vec{m}$ ,  $D$  et  $D'$  deux droites de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

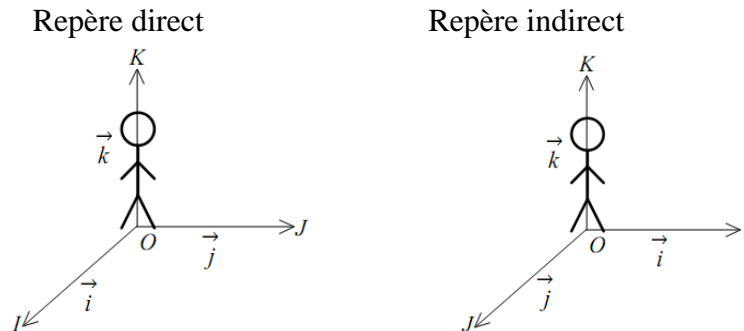
$P // Q \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires 	$D // D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires 	$D \perp P \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires 
$P \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{m}$ 	$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ 	$D // P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ 

## Définition : "Orientation de l'espace"

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace.

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe  $(O, \vec{k})$ , les pieds en  $O$  et regardant le point  $I$ .

Si l'observateur a le point  $J$  à sa gauche, le repère est dit direct. Il est dit indirect dans le cas contraire.

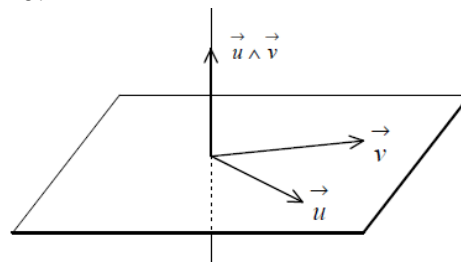


## Définition : "Produit vectoriel"

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , l'unique vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  et défini par :

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
- Si non, alors :

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \end{array} \right.$



## Propriétés :

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace et tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge (\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

## Propriété :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de l'espace.

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs directeurs d'un plan  $P$ , alors le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est un vecteur normal à  $P$ .

### Théorème : "Expression analytique du produit vectoriel"

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un ROND de l'espace.

Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , on a :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

### Théorème : "Cosinus et sinus de l'angle de deux vecteurs"

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace orienté. Alors :

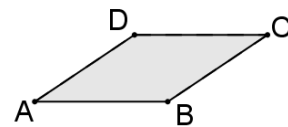
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

### Théorème : "Aire d'un parallélogramme – Aire d'un triangle"

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un RON de l'espace et  $ABCD$  un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme  $ABCD$  est égale à :  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$

En particulier, l'aire du triangle  $ABD$  est égale à :  $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$



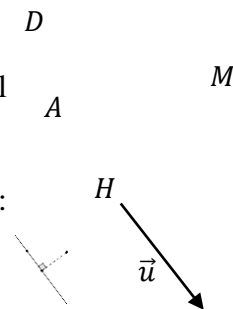
### Théorème : "Distance d'un point à une droite"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $D(A, \vec{u})$  une droite,  $M$  un point de l'espace et  $H$  son projeté orthogonal sur  $D(A, \vec{u})$ .

La distance de  $M$  à  $D(A, \vec{u})$  est le réel positif  $MH$  noté  $d(M, D)$  et tel que :

$$MH = d(M, D) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



### Définition : "Produit mixte"

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

On appelle produit mixte des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  le réel :  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

### Propriétés :

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$  trois vecteurs de l'espace.

1)  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

2)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires  $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

Propriété :

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base orthonormée.

- 1)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est directe  $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 1$
- 2)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est indirecte  $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -1$

Théorème : "Volume d'un parallélépipède"

L'espace est muni d'un ROND  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède et  $V$  son volume. Alors :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$= |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})|$$



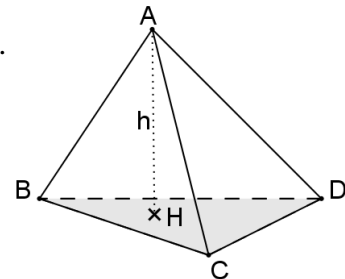
Théorème : "Volume d'un tétraèdre"

L'espace est muni d'un ROND  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $ABCD$  un tétraèdre,  $V$  son volume et  $h$  la hauteur issue de  $A$ .

Alors :

- 1)  $V = \frac{1}{3} \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$   
 $= \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$
- 2)  $h = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$



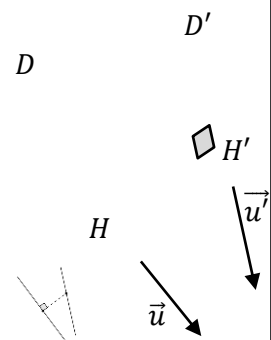
Théorème : "Distance de deux droites"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(A', \vec{u}')$  deux droites non coplanaires,  $H$  et  $H'$  les intersections de  $D$  et  $D'$  avec leur perpendiculaire commune.

La distance de  $D(A, \vec{u})$  à  $D'(A', \vec{u}')$  est le réel positif  $HH'$  noté  $d(D, D')$  et tel que :

$$d(D, D') = HH' = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{AA'}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

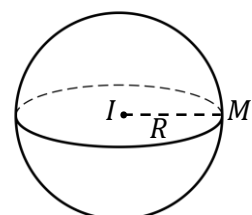


Définition : "Sphère"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $I$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.

On appelle sphère de centre  $I$  et de rayon  $R$ , l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $IM = R$ . On la note :  $S(I, R)$ .



### Conséquence : "Equation cartésienne d'une sphère"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $I(a, b, c)$  un point de l'espace et  $R$  un réel strictement positif.

Une équation cartésienne de la sphère  $S(I, R)$  est :

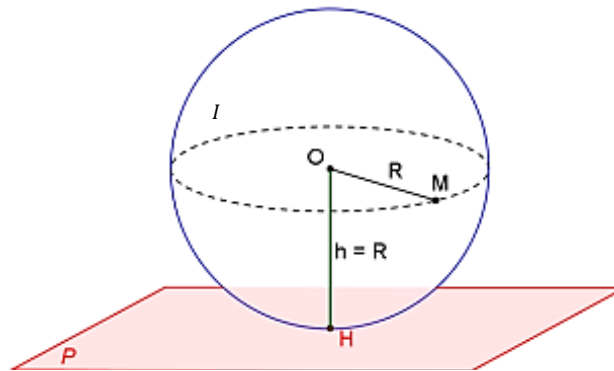
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

### Théorème : "Section plane d'une sphère"

L'espace est muni d'un RON  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $S(O, R)$  une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Soit  $P$  un plan,  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $P$ . Posons  $h$  la distance de  $O$  à  $P$  ( $h = OH$ ).

- 1) Si  $h > R$ , alors  $S \cap P = \emptyset$ . Donc  $S$  et  $P$  sont disjoints.
- 2) Si  $h = R$ , alors  $S \cap P = \{H\}$ . Donc  $S$  et  $P$  sont tangents en  $H$ .



- 3) Si  $h < R$ , alors  $S \cap P =$  le cercle du plan  $P$  de centre  $H$  et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ .

