Produit vectoriel
Produit mixte

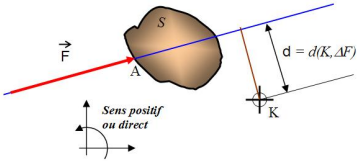
Isabelle GIL

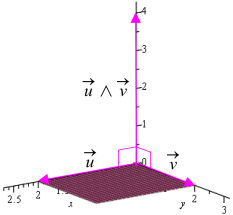
Maître de Conférences, Cnam

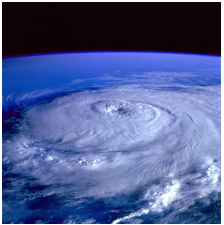
Moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point K.

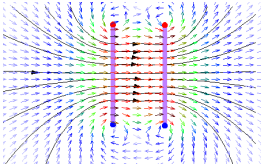
M(F)= - F x d
N.m N m

Dans ce cas particulier le moment est négatif car f tend à faire tourner l'objet dans le sens indirect autour de K.





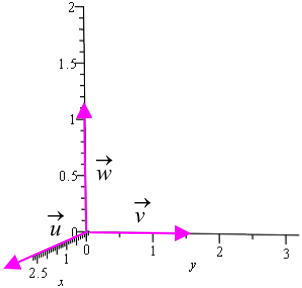




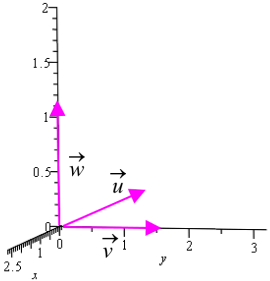
Orientation de l'espace

Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs du plan de l'écran, on distingue :

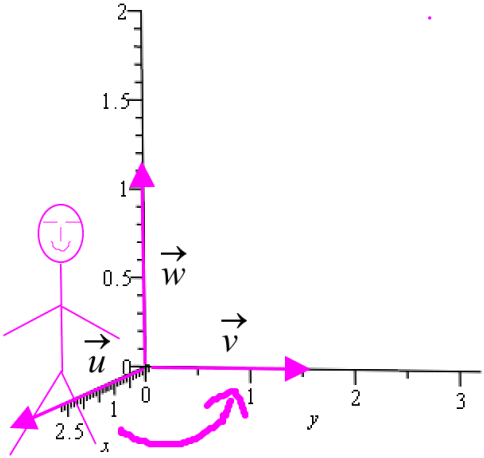
le **trièdre direct**



du **trièdre indirect**

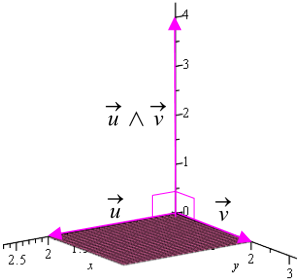


Règle de l'observateur



Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **vecteur** $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :



- ☞ sa direction est perpendiculaire au plan $(\vec{u}, \vec{v})$,
- ☞ son sens est tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct,
- ☞ sa norme est :

$$||\vec{u}||||\vec{v}||| \sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Propriétés

- ☞ $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$
- ☞ $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- ☞ $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- ☞ $\left(k\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = k\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \vec{u} \wedge \left(k\vec{v}\right)$
- ☞ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Produit vectoriel dans une base orthonormée

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de plan, on vérifie facilement que :

- ☞ $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$
- ☞ $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$
- ☞ $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
- ☞ $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$
- ☞ $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- ☞ $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

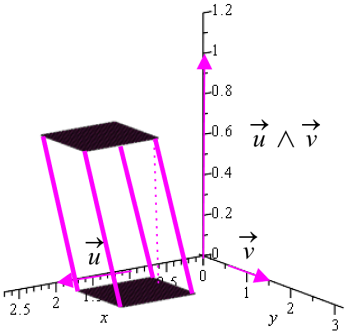
Produit vectoriel dans une base orthonormée

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de plan,
si $\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$,
et si $\vec{v} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$,
alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= x_1 y_2 \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) &&+ x_1 z_2 \left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) \\
&+ y_1 x_2 \left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) &&+ y_1 z_2 \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) \\
&+ z_1 x_2 \left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) &&+ x_1 y_2 \left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\vec{i} &&+ (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Produit mixte

Si on cherche le volume du parallélépipède :



le volume est la hauteur fois l'aire de la base.

Produit mixte

On en déduit que le volume est :

$$\Delta = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Propriétés :

- ☞ $\Delta > 0$ si $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont du même côté du plan $(\vec{u}, \vec{v})$,
- ☞ $\Delta = 0$ si $\vec{w}$ est dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$,
- ☞ $\Delta < 0$ si $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont de part et d'autre du plan $(\vec{u}, \vec{v})$.