

Chapitre 5 — Produit vectoriel, produit mixte

Produit vectoriel

1 Rappels

1. On a vu que $\vec{V} \times \vec{V}'$, le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de $\mathbb{R}^3$ est donné par les formules :

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad \vec{V}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$$

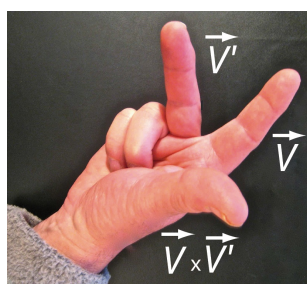
$$\boxed{\vec{V} \times \vec{V}' = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}}$$

et qu'on le calcule de la façon suivante :

a	a'	$bc' - cb'$
b	b'	$ca' - ac'$
c	c'	$ab' - ba'$

2. Que se passe-t-il si l'on change de repère ? Les composantes des vecteurs ne sont plus les mêmes, est-ce qu'on trouve un autre résultat ?

- le produit vectoriel est orthogonal à $\vec{V} \times \vec{V}'$,
- sa norme est l'aire du parallélogramme construit à partir de $\vec{V} \times \vec{V}'$,
- il est orienté selon la règle des 3 doigts :



Conclusion : $\vec{V} \times \vec{V}'$ ne dépend pas du repère choisi pour le calculer.

3. Pour calculer le produit vectoriel, il suffit de se rappeler que :

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$	$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$	$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$	$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$	$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$
$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$	$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$	$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

et que le produit vectoriel est doublement distributif :

$$(a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}) \times (a' \vec{i} + b' \vec{j} + c' \vec{k}) = a a' (\vec{i} \times \vec{i}) + a b' (\vec{i} \times \vec{j}) + \dots + c b' (\vec{k} \times \vec{j}) + c c' (\vec{k} \times \vec{k})$$

2 Quelques utilisations du produit vectoriel

1. Pour les *vecteurs*, le produit vectoriel est un détecteur de *colinéarité* :

$$u \vec{V} = u' \vec{V}' \iff \vec{V} \times \vec{V}' = \vec{O}$$

2. Pour les *points*, le produit vectoriel est un détecteur de *d'alignement* :



$$A, B, C \text{ alignés} \iff \vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{O}$$

On peut faire jouer le même rôle aux 3 points :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= (\vec{OB} - \vec{OA}) \times (\vec{OC} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OB} \times \vec{OC} - \vec{OB} \times \vec{OA} - \vec{OA} \times \vec{OC} + \vec{OA} \times \vec{OA} \end{aligned}$$

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{O}$$

3. En *géométrie*, le produit vectoriel est lié à la notion de *rotation*.

4. Le produit vectoriel permet de calculer l'*aire d'un triangle* :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

5. En *physique* (*mécanique, électricité, ...*), on rencontre très souvent des produits vectoriels.

Exemple : *Théorème du moment cinétique*

Le point O est fixe. Le *moment cinétique* par rapport à O du point mobile M , de masse m et de vitesse $\vec{V}$ est $\vec{OM} \times m \vec{V}$. Si F est la résultante des forces qui s'appliquent à M , on a :

$$\frac{d}{dt}(\vec{OM} \times m \vec{V}) = \vec{OM} \times \vec{F}$$

En effet, si $\vec{A}$ est l'accélération de M :

$$\frac{d}{dt}(\vec{OM} \times m \vec{V}) = \vec{V} \times m \vec{V} + \vec{OM} \times m \vec{A} = \vec{OM} \times \vec{F}$$

Dans le cas où M est soumis à une *force centrale* dirigée vers O , le deuxième membre est nul et $\vec{OM} \times m \vec{V}$ est un vecteur constant, donc le *mouvement est plan*.

3 Applications à la géométrie plane

1. Dans le cas où $\vec{V}$ est dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et le calcul de $\vec{V} \times \vec{k}$ donne :

$$\begin{array}{ccc} a & 0 & b \\ b & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \vec{V} \times \vec{k} = b\vec{i} - a\vec{j}$$

est le vecteur qui se déduit de $\vec{V}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

Cet exemple assez simple laisse deviner qu'il existe une relation entre les *produits vectoriels* et les *rotations*.

2. On considère deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad \vec{V}' = a'\vec{i} + b'\vec{j}$$

Pour pouvoir calculer leur produit vectoriel, il faut introduire une troisième dimension.

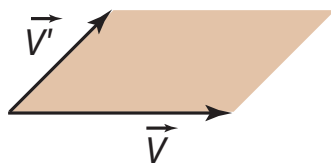
On ajoute un vecteur $\vec{k}$, pour compléter le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ccc} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ 0 & 0 & ab' - ba' \end{array} \Rightarrow \boxed{\vec{V} \times \vec{V}' = (ab' - ba')\vec{k}}$$

Le produit vectoriel est remplacé par le nombre $\Delta = ab' - ba'$. On le note :

$$\Delta = ab' - ba' = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \det(\vec{V}, \vec{V}')$$

On l'appelle le *déterminant* des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ car il détermine s'ils sont colinéaires ou pas. Sa valeur absolue est l'aire du parallélogramme :



3. Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une droite $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des points $M = (x, y)$ qui vérifient une équation du type :

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma}$$

dans laquelle α et β ne sont pas nuls tous les deux.

Avec $\vec{N} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, cette équation devient :

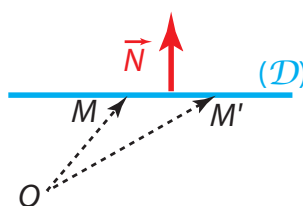
$$\boxed{\vec{N} \cdot \vec{OM} = \gamma}$$

On en tire plusieurs conséquences :

► La droite $(\mathcal{D})$ passe par O si et seulement si $\gamma = 0$.

► Si M' est un autre point de $(\mathcal{D})$:

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM'} &= \gamma \\ \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} &= \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$



Le vecteur $\vec{N}$ est orthogonal à $(\mathcal{D})$

Pour obtenir $\vec{D}$, un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, il suffit de calculer le produit vectoriel de $\vec{N}$ et de $\vec{k}$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D} = \beta \vec{i} - \alpha \vec{j}}$$

4. Soient deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations :

$$(\mathcal{D}) \quad \alpha x + \beta y = \gamma \quad (\mathcal{D}') \quad \alpha' x + \beta' y = \gamma'$$

$$\det(\vec{D}, \vec{D}') = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ -\alpha & -\alpha' \end{vmatrix} = \alpha \beta' - \alpha' \beta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \det(\vec{N}, \vec{N}')$$

$$\vec{D} \cdot \vec{D}' = \alpha \alpha' + \beta \beta' = \vec{N} \cdot \vec{N}'$$

$$(\mathcal{D}) // (\mathcal{D}') \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\vec{D}, \vec{D}') = \alpha \beta' - \alpha' \beta = 0$$

$$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{D} \cdot \vec{D}' = \alpha \alpha' + \beta \beta' = 0$$

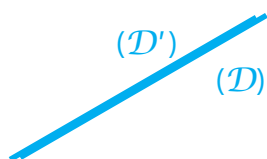
5. Chercher les points $M = (x, y)$ communs à $\vec{D}$ et $\vec{D}'$ revient à résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

C'est pour cela qu'un tel système est qualifié de *linéaire*.

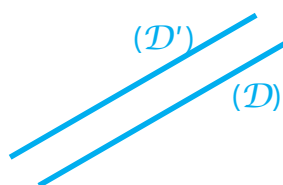
Il y a 3 possibilités :

Cas (I) :



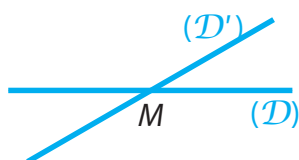
- les deux droites sont *confondues*,
- leurs équations sont les mêmes à un facteur près,
- le système est *indéterminé*.

Cas (II) :



- les deux droites sont *parallèles*,
- les *premiers membres* de leurs équations sont les mêmes à un facteur près,
- le système est *impossible*.

Cas (III) :



- les deux droites sont *concourantes*,
- le système admet *une et une seule solution*.

On va le résoudre en utilisant le produit vectoriel.

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

On introduit les 3 vecteurs :

$$\vec{A} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \quad \vec{B} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j} \quad \vec{C} = \gamma \vec{i} + \gamma' \vec{j}$$

Si x et y sont des nombres quelconques :

$$x \vec{A} + y \vec{B} = (x \alpha + y \beta) \vec{i} + (x \alpha' + y \beta') \vec{j}$$

et le système (S) est équivalent à l'équation vectorielle :

$$\boxed{x \vec{A} + y \vec{B} = \vec{C}}$$

- En multipliant à droite par $\vec{B}$:

$$x (\vec{A} \times \vec{B}) + y (\vec{B} \times \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{B}$$

$$x \det(\vec{A}, \vec{B}) = \det(\vec{C}, \vec{B}) \Rightarrow \boxed{x = \frac{\gamma \beta' - \gamma' \beta}{\alpha \beta' - \alpha' \beta}}$$

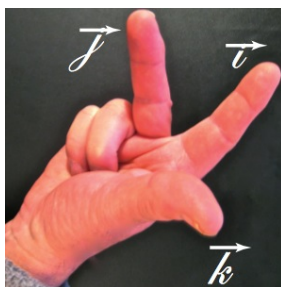
- En multipliant à gauche par $\vec{A}$:

$$x (\vec{A} \times \vec{A}) + y (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{C}$$

$$y \det(\vec{A}, \vec{B}) = \det(\vec{A}, \vec{C}) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\alpha \gamma' - \alpha' \gamma}{\alpha \beta' - \alpha' \beta}}$$

4 Application à la géométrie dans l'espace

1. On a choisi un repère orthonormé *direct* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:



Un plan $(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ qui vérifient une équation du type :

$$\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta}$$

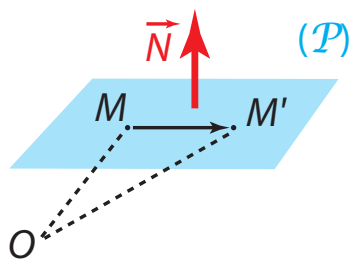
dans laquelle α , β et γ ne sont pas nuls tous les trois. Avec $\vec{N} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$, cette équation devient :

$$\boxed{\vec{N} \cdot \vec{OM} = \delta}$$

2. On en tire plusieurs conséquences :

- Le plan $(\mathcal{P})$ passe par O si et seulement si $\delta = 0$.
- Si M' est un autre point de $(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \vec{OM}' &= \delta \\ \vec{N} \cdot \vec{OM} &= \delta \end{aligned} \Rightarrow \vec{N} \cdot (\vec{OM}' - \vec{OM}) = \vec{N} \cdot \vec{MM}' = 0$$



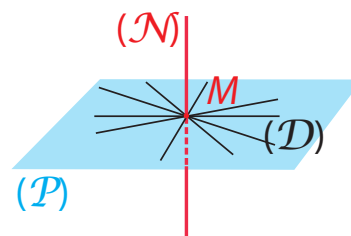
Le vecteur $\vec{N}$ est orthogonal à tous les vecteurs de (P) .

Réciproquement, si M est un point du plan (P) , et si $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM} &= \delta \\ \vec{N} \cdot \overrightarrow{MM'} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{MM'} = \delta$$

et M' est dans le plan (P) .

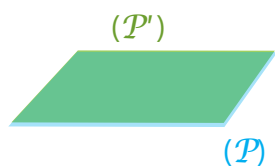
Conclusion Un plan (P) s'obtient à partir d'une droite (N) et d'un point M de (N) , en prenant toutes les droites (D) passant par M et orthogonales à (N) .



3. Soient deux plans (P) et (P') d'équations :

$$(P) \quad ax + by + cz = \delta \quad (P') \quad \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta'$$

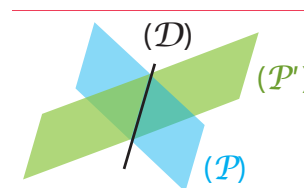
Il y a 3 possibilités :



(I)



(II)



(III)

Cas (I) et (II) : $\boxed{\vec{N} \times \vec{N'} = \vec{0}}$ les plans sont *parallèles* ou *confondus*.

Cas (III) : $\boxed{\vec{N} \times \vec{N'} \neq \vec{0}}$ les plans se coupent selon une droite (D) .

4. Le système : $(S) \quad \begin{cases} ax + by + cz = \delta \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta' \end{cases}$

est un *système d'équations* de la droite (D) . Parce qu'un vecteur directeur $\vec{D}$ de (D) est contenu dans les plans (P) et (P') , il est orthogonal à $\vec{N}$ et $\vec{N'}$.

Réciproquement, un vecteur non nul, orthogonal à $\vec{N}$ et $\vec{N}'$, est contenu dans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, et c'est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

On prendra donc : $\boxed{\vec{D} = \vec{N} \times \vec{N}'}$

Si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un point de $(\mathcal{D})$, celle-ci admet la représentation paramétrique :

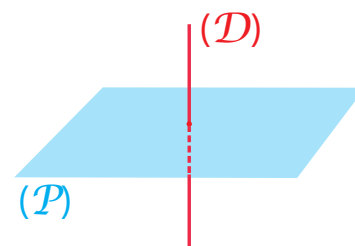
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(\beta\gamma' - \beta'\gamma) \\ y(t) = y_0 + t(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) \\ z(t) = z_0 + t(\alpha\beta' - \beta\alpha') \end{cases}$$

5. Quelques rappels.

• On écrit $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$ et on dit que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont *orthogonales* quand leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

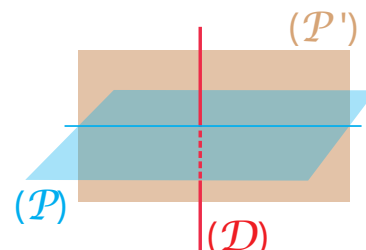
• On écrit $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$ et on dit que la droite $(\mathcal{D})$ est *orthogonale* au plan $(\mathcal{P})$ quand $\vec{D} \times \vec{N} = \vec{O}$.

Dans ce cas, $(\mathcal{D})$ est orthogonale à toutes les droites de $(\mathcal{P})$.



• On écrit $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$ et on dit que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont orthogonaux quand $\vec{N} \cdot \vec{N}' = 0$.

Pour que $(\mathcal{P})$ soit orthogonal à $(\mathcal{P}')$ il faut et il suffit que $(\mathcal{P}')$ contienne une droite orthogonale à $(\mathcal{P})$.



6. Soit $(\mathcal{D})$ la droite intersection de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, définie par le système d'équations :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$$

Si u et u' sont des nombres qui ne sont pas tous les deux nuls, les points $M(x, y, z)$ de $(\mathcal{D})$ vérifient aussi l'équation :

$$(u\alpha + u'\alpha')x + (u\beta + u'\beta')y + (u\gamma + u'\gamma')z = u\delta + u'\delta'$$

On ne peut pas avoir à la fois :

$$(u\alpha + u'\alpha') = 0 \quad (u\beta + u'\beta') = 0 \quad (u\gamma + u'\gamma') = 0$$

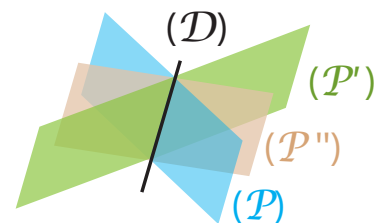
car cela signifierait que $u\vec{N} + u'\vec{N}' = \vec{O}$, mais les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ ne sont pas colinéaires.

Si l'on note $u(\mathcal{P}) + u'(\mathcal{P}')$ le plan défini par l'équation :

$$(u\alpha + u'\alpha')x + (u\beta + u'\beta')y + (u\gamma + u'\gamma')z = u\delta + u'\delta'$$

la droite $(\mathcal{D})$ est aussi contenue dans ce plan.

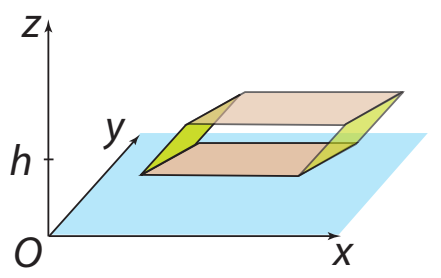
Il n'est pas difficile de démontrer que réciproquement, tout plan $(\mathcal{P}'')$ contenant $(\mathcal{D})$ est de la forme $u(\mathcal{P}) + u'(\mathcal{P}')$.



Produit mixte

1 Définition

1. On cherche le volume d'un *parallélépipède* posé sur le plan (x, y) :

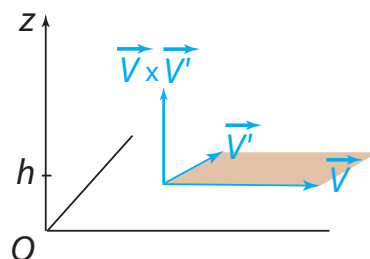


$$\mathcal{V} = \iiint_S dV = \int_0^h \left(\iint_{\mathcal{B}} d\omega \right) dz$$

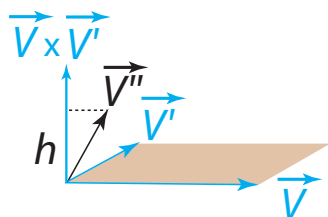
$$\mathcal{V} = h \times \text{aire}(\mathcal{B})$$

2. On va donner une interprétation géométrique de $\text{aire}(\mathcal{B})$ et de h .

$$\text{aire}(\mathcal{B}) = \left\| \vec{V} \times \vec{V}' \right\|$$



h s'obtient en projetant $\vec{V}''$ sur $\vec{V} \times \vec{V}'$:



$$\Rightarrow \mathcal{V} = |(\vec{V} \times \vec{V}') \cdot \vec{V}''|$$

3. Le nombre :

$$\Delta = (\vec{V} \times \vec{V}') \cdot \vec{V}'' = \det(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = \langle \vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'' \rangle$$

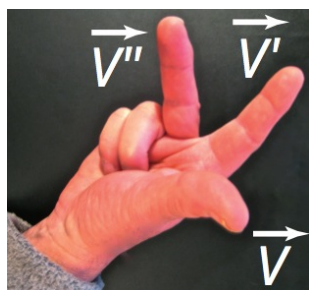
s'appelle le *déterminant*, ou le *produit mixte* de $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$.

2 Premières propriétés du produit mixte

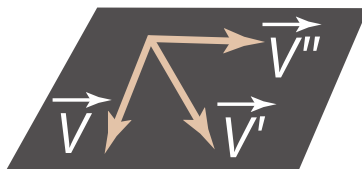
1. Son signe :

- $\Delta > 0$ quand $\vec{V}''$ et $\vec{V} \times \vec{V}'$ sont du même côté du plan $(\vec{V}, \vec{V}')$.
- $\Delta = 0$ quand $\vec{V}''$ est dans le plan $(\vec{V}, \vec{V}')$.
- $\Delta < 0$ quand $\vec{V}''$ et $\vec{V} \times \vec{V}'$ sont de part et d'autre du plan $(\vec{V}, \vec{V}')$.

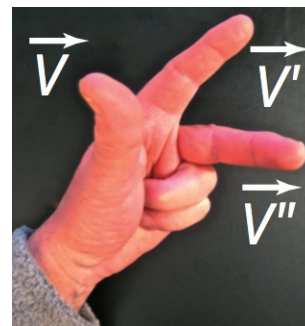
Conclusion



$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$

2. Calcul du produit mixte

$$\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{V}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$$

$$\vec{V}'' = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k}$$

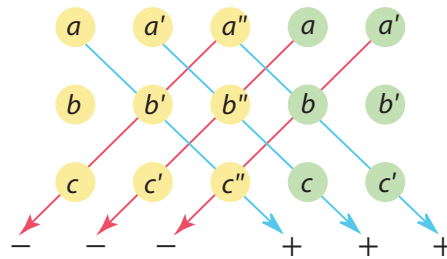
$\vec{V}$	$\vec{V}'$	$\vec{V} \times \vec{V}'$	$\vec{V}''$
a	a'	$b c' - c b'$	a''
b	b'	$c a' - a c'$	b''
c	c'	$a b' - b a'$	c''

$$\Delta = a b' c'' + a' b'' c + a'' b c' - a b'' c' - a' b c'' - a'' b' c$$

On note aussi :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

Règle de Sarrus



$$\Delta = a b' c'' + a' b'' c + a'' b c' - a b'' c' - a' b c'' - a'' b' c$$