Section technicien supérieur
Cours de mathématiques

Chapitre 5
Produit Vectoriel

Aymar de Saint-Seine
Année scolaire 2014–2015

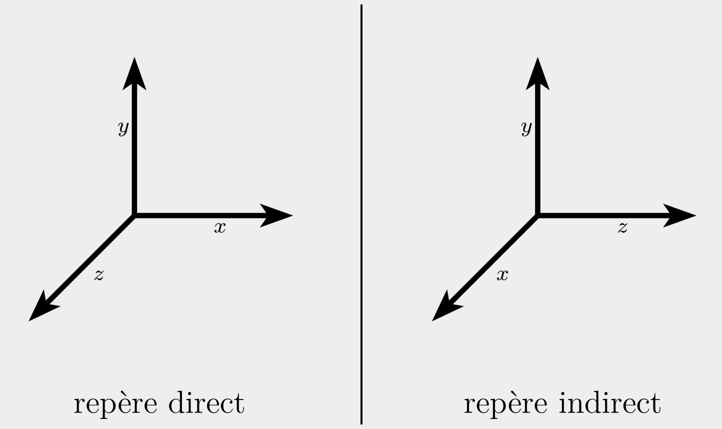
1. Produit vectoriel

Définition 1 : Repère direct de l'esapce

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est de sens ***direct*** *si le « bonhomme d'ampère » placé sur l'axe $(0z)$, les pieds en 0, la te du côté des z positifs et regardant les graduations positives de l'axe (Ox), a les graduations positives de l'axe (Oy) sur sa gauche.*
Dans le cas contraire, le repère est dit ***indirect*** *ou* ***rétrograde*** *.*

Remarque : Dans un repère direct, le pouce, l'index et le majeur de la main droite indiquent les axes positifs.

Illustration :



Définition 2 : Produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle ***produit vectoriel*** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que*

- *$\vec{w}=\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- *$\vec{w}$ est tel que :*
  - *sa direction est orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
  - *son sens est tel que la base $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ soit orientée dans le sens direct ;*
  - *sa norme est $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\vec{u},\vec{v})|$.*

Théorème 1 (admis) : Propriétés du produit vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k, on a :

- *Antisymétrie : $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$*
- *Distributivité par rapport à l'addition : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$*
- *Compatibilité avec la multiplication par un scalaire : $\vec{u}\wedge k\vec{v} = k\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$*
- *Produit nul : $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$*
- *Le produit vectoriel n'est pas associatif : c'est-à-dire qu'en général $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge w$ n'est pas égal à $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge w)$*

Théorème 2 : Coordonnées d'un produit vectoriel

Dans une base orthonormale directe $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et si* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *alors* $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-y'z\\zx'-z'x\\xy'-x'y\end{pmatrix}$

Démonstration : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Le repère étant orthonormé direct, on a par définition :

$$\begin{array}{ccc} \vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0} & \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k} & \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0} & \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j} & \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0} \end{array}$$

Par ailleurs, selon les coordonnées des vecteurs, on a

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

En développant le produit vectoriel, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}\wedge\vec{v} & = & (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}) \\ & = & xx'\vec{i}\wedge\vec{i}+xy'\vec{i}\wedge\vec{j}+xz'\vec{i}\wedge\vec{k}+yx'\vec{j}\wedge\vec{i}+yy'\vec{j}\wedge\vec{j}+yz'\vec{j}\wedge\vec{k}+\cdots \\ & & \cdots+zx'\vec{k}\wedge\vec{i}+zy'\vec{k}\wedge\vec{j}+zz'\vec{k}\wedge\vec{k} \\ & & \text{et en utilisant les définitions rappelées en début de preuve} \\ & = & \vec{0}+xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+\vec{0}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}+\vec{0} \\ & = & (yz'-y'z)\vec{i}+(zx'-z'x)\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k} \end{array}$$

□

2. Applications du produit vectoriel

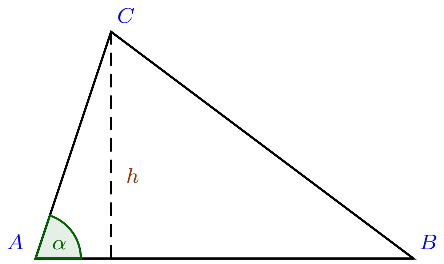
2.1. Aire d'un triangle/parallélogramme

Proposition 1 : Aire d'un triangle

L'aire $\mathcal{A}$ *d'un triangle* ABC *est donnée par*

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

Démonstration : Soit ABC un triangle. On considère la hauteur issue de C. On note h sa longueur.



$$S = \frac{AB \times h}{2} = \frac{AB \times AC \sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

□

Remarque : L'aire d'un parallélogramme étant le double de l'aire du triangleforme par trois sommets de ce parallélogramme, on a

$$S_{ABCD} = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

2.2. Equation d'un plan de l'espace

Théorème 3 (admis) : Équation d'un plan

Soit P un plan de l'espace. Il existe des nombres réels a, b, c et d tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et tels que P soit l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant $ax + by + cz + d = 0$.
Réciproquement, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) telles que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan.

Définition 3 : Équation cartésienne

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan P.

Théorème 4 : Vecteur normal à un plan

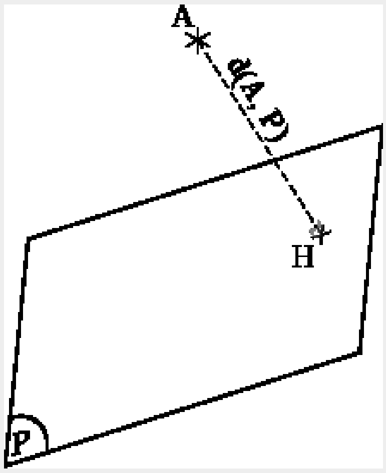
Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{N}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan P.

Théorème 5 : Distance d'un point à un plan

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et A un point de l'espace de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$. La distance δ du point A au plan P est donnée par :

$$\delta = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Illustration :



$$d(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration : Soient A un point de l'espace de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$, P le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $M(x; y; z)$ un point de ce plan.
La distance de A au plan P est par définition la longueur AH où H est le projeté orthogonal de A sur P.
Le vecteur $\overrightarrow{N}$ est un vecteur normal au plan. On exprime de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{AM}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} &= ||\overrightarrow{N}|| \times ||\overrightarrow{AH}|| \times \cos(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{AH}) \\
a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}||\overrightarrow{AH}|| \cos(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{AH}) \\
ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}||\overrightarrow{AH}|| \cos(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{AH})
\end{aligned}$$

Or $M(x; y; z)$ appartient au plan donc $ax+by+cz = -d$ et les vecteurs $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires donc $\cos(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{AH}) = \pm 1$

$$\begin{aligned}
|-ax_A - by_A - cz_A - d| &= \sqrt{a^2+b^2+c^2}|\overrightarrow{AH}| \\
AH &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

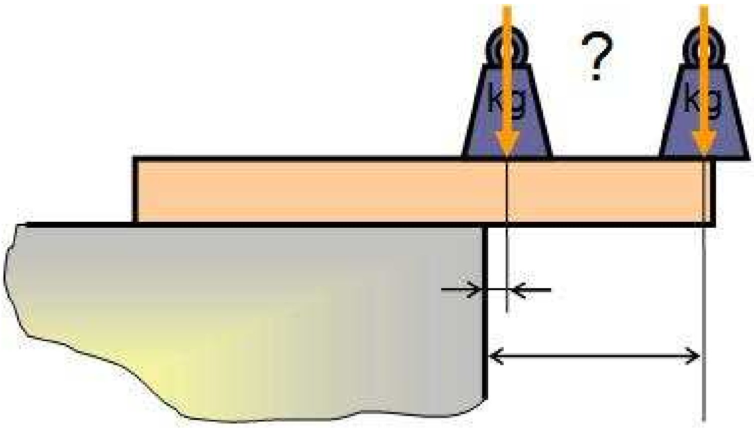
□

Exemple : Soit A le point de coordonnées $(-4; 5; -1)$ et P le plan d'équation cartésienne $3x - 3y - 2z + 1 = 0$.
La distance du point A au plan P est égale à

$$\delta = \frac{|3 \times (-4) - 3 \times 5 - 2 \times (-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12 - 15 + 2 + 1|}{\sqrt{22}} = \frac{24\sqrt{22}}{22} = \frac{12\sqrt{22}}{11}$$

2.3. Moment d'une force

Soit une planche en équilibre au bord d'un muret. Pour la déséquilibrer, on peut poser une charge sur la partie en porte-à-faux, au-dessus du vide. La capacité de cette charge à faire basculer la planche n'est pas la même suivant qu'elle est posée près du muret ou au bout de la planche. De même on peut, au même endroit, placer une charge plus lourde et constater une différence de basculement.



Le « pouvoir de basculement »dépend donc de l'intensité de la force, mais également de la position relative du point d'application de la force, et du point de rotation réel ou virtuel considéré.
On intègre ces trois composantes du problème par le modèle de moment d'une force, qui représente l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point donné, qu'on nommera pivot.

Définition 4 : Moment d'une force

Le ***moment d'une force*** $\vec{F}$ *s'exerçant au point P par rapport au pivot O, est le vecteur*

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

Table des matières