Chapitre 0, Troisième partie : Produit vectoriel, Produit mixte

On appelle $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. On rappelle que deux vecteurs non-colinéaires définissent un plan vectoriel et que trois vecteurs non-coplanaires forment une base de $\mathcal{V}$, ou trièdre. Rappelons que si $\mathcal{P}$ est un plan, le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \{\overrightarrow{AB} | A, B \in \mathcal{P}\}$. Trois vecteurs sont coplanaires ssi ils appartiennent à un même $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
On admet que les bases peuvent appartenir à deux classes distinctes : celle des bases directes, définie par la règle de la main droite, et celle des bases indirectes.

1 Produit vectoriel : définition

Notation : On note $\mathcal{A}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'aire du parallèlogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Rappel : cette aire vaut $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\theta)|$ où θ est l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

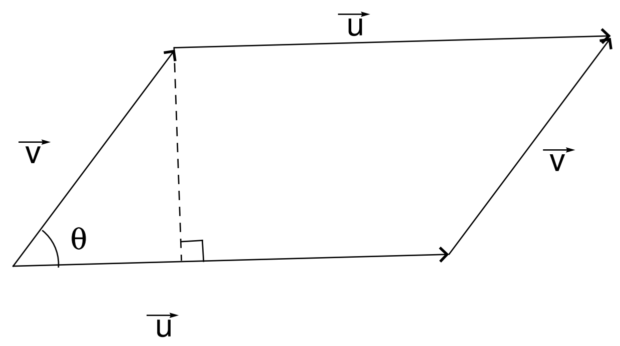

Fig. 1

Définition 1.1 *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$. Si $\overrightarrow{u}$ col $\overrightarrow{v}$ on pose $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Sinon, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur tel que :*
1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$,
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$,
3. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ *est un trièdre direct,*
4. $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \mathcal{A}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Les propriétés suivantes sont immédiates d'après la définition :

Propriété 1.1
1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *(alternance)*
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ *(antisymétrie)*
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$
4. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *ssi* $\overrightarrow{u}$ *col* $\overrightarrow{v}$.

Démonstration :
Laissée en exercice.

2 Produit mixte : définition

On notera $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le produit scalaire.

Définition 2.1 *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$. On appelle produit mixte de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ le réel $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] := \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$.*

Ce nombre est aussi appelé le « déterminant en BOND » des trois vecteurs, et se note alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Notation : On note vol$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le volume du parallélépipède $\mathcal{P}$ construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

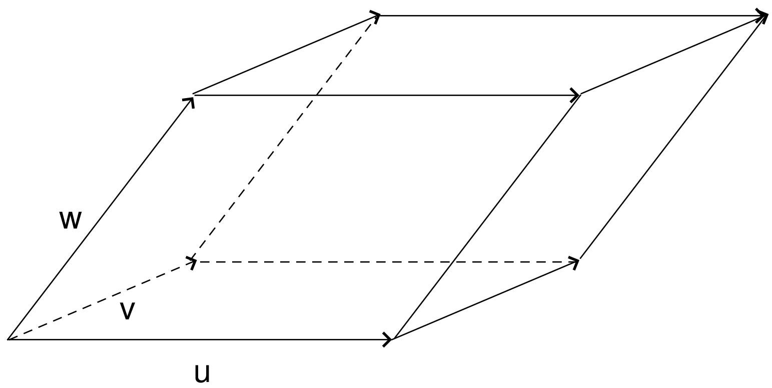

Fig. 2

Rappel : $\mathcal{P} = \{x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w} | x, y, z \in [0; 1]\}$.

Théorème 2.1 $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \pm \mathrm{vol}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
De plus, le signe est + si le trièdre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est direct, et il est $-$ dans le cas contraire.

Démonstration: Premier cas : les trois vecteurs sont coplanaires. Alors le volume est nul. Quant au produit mixte il est également nul d'après les propriétés 1 et 2 du produit vectoriel, ajouté au fait qu'un produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux est nul.
Second cas : les trois vecteurs forment un trièdre direct.
Alors on sait que le volume du parallélépipède est égal à l'aire de la base fois la hauteur correspondante. On obtient donc (voir figure 3) :

$$\mathrm{vol}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \times h \tag{1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \mathcal{A}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \times \cos((\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})) \|\overrightarrow{w}\| \\ &= \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \\ &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \end{aligned} \tag{2}$$

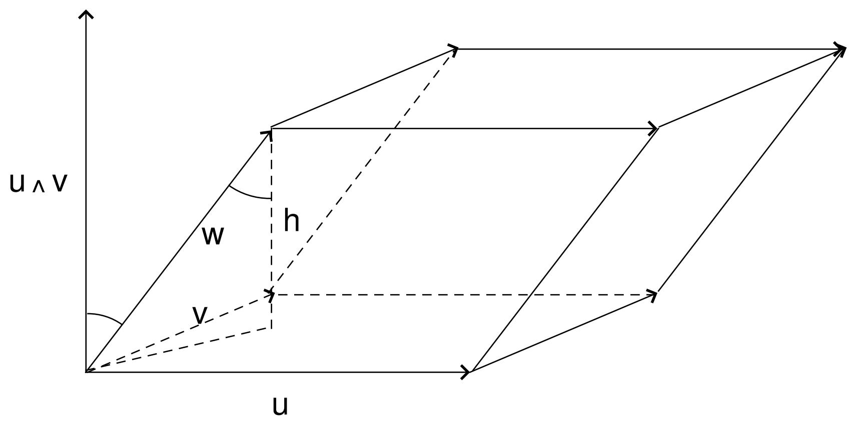

Fig. 3

Troisième cas : les vecteurs forment un trièdre indirect. À la ligne (2) le cosinus (négatif) est précédé d'un signe moins. ¶

Un corollaire important du théorème précédent est que le produit mixte de trois vecteurs est nul ssi ceux-ci sont coplanaires, ou encore, le produit mixte est non-nul ssi les trois vecteurs forment une base de l'espace.

Corollaire 2.2 *Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire de ses arguments, i.e. :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$$

Le produit mixte change de signe quand on transpose deux de ses arguments, par exemple :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$$

Démonstration: Les volumes étant manifestement égaux, il s'agit simplement d'appliquer la règle de la main droite ! ¶

3 Produit vectoriel et produit mixte : propriétés de linéarité

Propriété 3.1 *(distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition)*
$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$,

1. $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
2. $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}$

Démonstration: 1)On va montrer que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
<u>Premier cas</u> : $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ sont non-coplanaires.
Pour montrer que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$, il suffit de montrer que $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{t} \rangle = 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{t}$(en effet le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul). Mais grâce à la linéarité du

produit scalaire par rapport à la seconde variable, il suffit de vérifier cette dernière propriété pour trois vecteurs d'une base, il suffit donc de vérifier que $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$.
Or $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}), \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{u} \wedge v, \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle$. Or par définition, le produit vectoriel de n'importe quel vecteur avec $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Les trois termes du second membre sont donc nuls. Donc $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$.
Calculons $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \rangle &= \langle \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}), \overrightarrow{v} \rangle - \underbrace{\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}_{0} - \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle && (3) \\ &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] && (4) \end{aligned}$$

Or vol$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$=vol$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$. En effet ces deux parallélépipèdes ont la même hauteur et $\mathcal{A}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \mathcal{A}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ car ces deux parallélogrammes ont la même hauteur et une base commune.

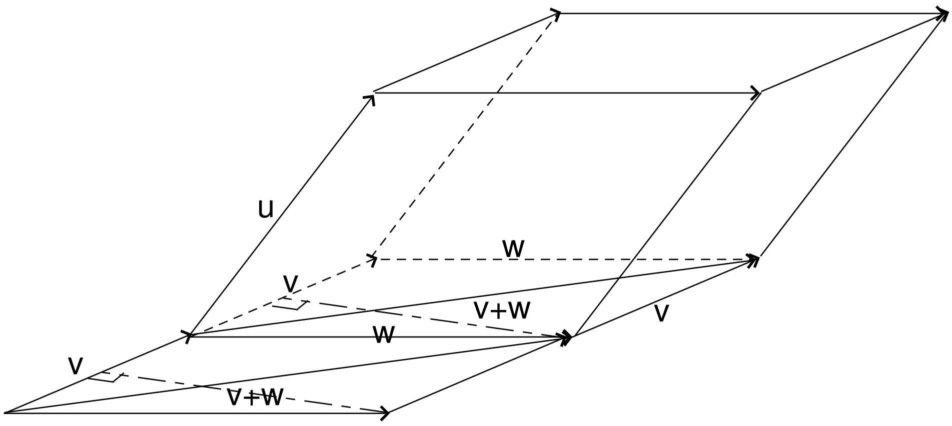

Fig. 4

De plus, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ ont la même orientation. Donc $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ et donc $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
En faisant un raisonnement tout-à-fait analogue, on trouve $\langle \overrightarrow{r}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. D'où le résultat.

Second cas : Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires. On peut alors exprimer un vecteur en fonction des deux autres. La démonstration est laissée en exercice.
2) Il suffit d'utiliser l'anti-symétrie du produit vectoriel pour se ramener au cas précédent. ¶

Corollaire 3.1 *(additivité du produit mixte par rapport à la deuxième variable)*
$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{w}]$

Le corollaire est une application immédiate du théorème précédent. En faisant une permutation circulaire des variables on voit que le produit mixte est aussi additif par rapport à la première et à la troisième variable. En utilisant le 3) de la propriété 1 du produit vectoriel, on montre facilement le

Propriété 3.2 *Le produit mixte est linéaire en chacune de ses variables. C'est-à-dire :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \quad [\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \tag{5}$$

et de même par rapport aux deuxièmes et troisièmes variables.

Grâce à cette propriété nous allons pouvoir donner une formule pour le produit vectoriel en base orthonormée directe (BOND).

Théorème 3.2 *Soient* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *une BOND, et* $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *dans cette base. Alors :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{6}$$

où l'on a posé $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Démonstration: Pour démontrer ce théorème on a d'abord besoin d'un lemme :

Lemme 3.3 Avec les notations du théorème précédent on a :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \tag{7}$$

Preuve du Lemme: C'est une simple application de la règle de la main droite, sachant que le volume d'un cube unité est égal à 1. ♣

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \wedge (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}) \\ &= xx' \underbrace{\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}}_{\overrightarrow{0}} + xy' \underbrace{\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}}_{\overrightarrow{k}} + \dots \\ &= (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k} \end{aligned} \tag{8}$$

Le détail des calculs étant laissé en exercice. ¶

Nous obtenons comme corollaire la

Propriété 3.3 *(Règle de Sarrus)*

Soient $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ *dans une BOND. Alors la quantité*

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} := xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z'' \tag{9}$$

est égale à $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Démonstration: C'est juste un calcul... Exercice !! ¶

Remarque importante : Le produit vectoriel n'est pas associatif, i.e. il ne vérifie pas en général $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer une BOND $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et de calculer $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{i} \wedge (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$.

Remarque très importante : On définit d'une manière générale le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ dans une base quelconque $\mathcal{B}$ par la formule :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

où les entrées du déterminant sont les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$. Ce nombre **dépend** de la base. Ce que nous avons appelé produit mixte dans ce cours est en fait le déterminant **pris dans une base orthonormée directe**. En effet la propriété précédente montre que, pourvu que $\mathcal{B}$ soit une BOND, le déterminant a toujours la même valeur et est égal au produit mixte. Donc il faut retenir que le produit mixte est en fait le déterminant en base orthonormée directe.

4 Applications

Les formules précédentes peuvent avant tout servir à calculer des sinus, des aires et des volumes en BOND. Le produit vectoriel permet aussi de trouver facilement des BOND ou un vecteur normal à un plan, ce qui en BOND, permet de trouver une équation du plan. Des exemples seront proposés en TD. Voyons une autre application : la résolution de systèmes 3×3.

Soit à résoudre le système (S) : $\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{cases}$

On introduit une BOND de l'espace, et les vecteurs $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$.

Alors

$$(S) \Leftrightarrow x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B} + z\overrightarrow{C} = \overrightarrow{D}$$

En prenant le produit vectoriel de chaque côté par $\overrightarrow{A}$ on obtient :

$$y\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A} + z\overrightarrow{C} \wedge A = \overrightarrow{D} \wedge \overrightarrow{A}$$

Puis en faisant le produit scalaire avec $\overrightarrow{B}$:

$$z\langle \overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle = \langle \overrightarrow{D} \wedge \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle$$

D'où, si $\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})$ (qu'on appelle déterminant du système) est non-nul :

$$z = \frac{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{D})}{\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C})} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

On a par permutation circulaire des formules similaires pour y et x, appellées formules de Cramer. Notre raisonnement montre que si un triplet solution (x, y, z) existe dans le cas où $\det(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}) \neq 0$, alors il est donné par ces formules.

Exercice 4.1 Montrer que ces formules définissent bien un triplet solution lorsque le déterminant du système est non-nul, et que le système soit n'a pas de solutions, soit en a une infinité lorsque le déterminant est nul.