Exposé 39 : Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3.Point de vue geometrique,point de vue analytique

Pre requis :

- repere et base du plan et de l'espace (notamment base orthonormé)
- homothetie, projection otrhtogonale et rotations
- vecteurs (colinearité…)
- prduit vectoriel

cadre : on pose l'espace affine euclidien orienté ε et on utilise la regle du petit bonhomme d'Ampere.
$\vec{\varepsilon}$ l'espace vectoriel associé

1) Produit vectoriel

a) Definition et construction geometrique

Definition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\varepsilon}$. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- sinon :
    - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
    - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
    - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Remarque : à l'oral, $|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ ne depend pas de l'orientation. Sans valeur absolue, on a besoin d'un plan orienté.

Theoreme : Soit $\vec{u} \in \vec{\varepsilon}$ non nul. Pour tout vecteur $\vec{v} \in \vec{\varepsilon}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se deduit de $\vec{v}$ par la composée de 3 applications lineaires de $\varepsilon \to \varepsilon$:

1) p la projection orthogonale sur le plan orthogonale à $\vec{u}$ passant par O
2) R la rotation d'axe $(O\vec{i})$ orienté par $\vec{u}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
3) H l'homothetie de rapport $\|\vec{u}\|$

b) Proprietes geometriques

i. Colinearité

Proposition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\varepsilon}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colineaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \Leftrightarrow |\vec{u}.\vec{v}| = 0$

Preuve : imediate $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\sin(\vec{u},\vec{v})\right|$

ii. Antisymetrie

Proposition : $\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{\varepsilon}^{2},\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

iii. Bilinearité

Proposition : Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\varepsilon}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$

- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{v})$

Preuve : par les appilcations.

iv. Base orthonormale

Proposition : Dans l'espace orienté ε ,soient $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ des vecteurs unitaires tels que $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit une base et $\vec{i}\perp\vec{j}$.

B est directe si et seulement si $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\Leftrightarrow\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\Leftrightarrow\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

Preuve :

Unitaire par la formule $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\sin(\vec{u},\vec{v})\right|$

Puis par $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe

c) Proprietes analytiques

1) Coordonnées d'un produit vectoriel

Proposition : soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal direct de ε. Alors pour tout vecteur $\vec{u}\left(x,y,z\right),\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ on a $(\vec{u}\wedge\vec{v})=(yz'-zy',x'z-z'x,xy'-yx')$

Preuve :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$

Puis on developpe sachant que $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

2) Double produit

Proposition : : Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\varepsilon}$, on a $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.

Preuve : posez une base telle que $\vec{v}$ colineaire au premier vecteur de la base et $\vec{w}$ orthogonal au premier vecteur de la base.

2) Applications

a) Calcul d'aire

Proposition : l'aire d'un triangle ABC est egale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

Celle d'un parallelogramme ABCD est $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ (2 triangles)

Preuve : reprendre la definition

b) Calcul de distance

Proposition : la distance d'un point M à une droite $D(A,\vec{u})$ est égale à $d(M,D)=\frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Preuve : faire un dessin

c) Volume

Tetraede : $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$

Pavé $V_{ABCD}=\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$

d) Equation d'un plan affine

Proposition : Soit $P(A,\vec{u},\vec{v})$,alors $\vec{\eta}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ normal à P et $M\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$
Cela donne l'equation du plan.

Autre application : cf exposé 40