Chapitre 10

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, produit scalaire et produit vectoriel

10.1 Exercices sur le chapitre 10

Exercice 10.1.
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 4, 6)$

2) $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (-1, 2, -3)$

Exercice 10.2.
1) Les vecteurs $\vec{u_1} = (1, -2)$ et $\vec{u_2} = (2, 3)$ sont-ils libres dans $\mathbb{R}^2$?

2) Le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$?

Exercice 10.3.
1) Les vecteurs $\vec{u_1} = (1, 3, 2)$ et $\vec{u_2} = (1, -1, 4)$ sont-ils libres dans $\mathbb{R}^3$?

2) Le vecteur $\vec{u} = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$?

Exercice 10.4.
On munit le plan de sa base canonique et l'on note (x, y) les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

1) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et soit D la droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite vectorielle associée à D, un vecteur directeur $\vec{u}$ de D ainsi qu'un point $I \in D$.

2) Soit $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et soit A le point de coordonnées $(1, 4)$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite affine $D = A + \mathbb{R}\vec{u}$.

Exercice 10.5.
On munit l'espace de sa base canonique et l'on note (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit P le plan affine d'équation $ax + by + cz = d$. Déterminer l'équation cartésienne du plan vectoriel P associé, deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ engendrant P, et un point $I \in P$.

2) On considère les plans affines P, d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ et P_0, d'équation cartésienne $x + 2y + z = 1$. Déterminer l'intersection $P \cap P_0$ et montrer que c'est une droite affine D, dont on donnera un vecteur directeur $\vec{d}$ ainsi qu'un point $I \in D$.

Exercice 10.6.
Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on note $(\vec{u} \mid \vec{v})$ leur produit scalaire et l'on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u} \mid \vec{u})}$ la norme euclidienne de $\vec{u}$. On dit que $\vec{u}$ est unitaire si $\|\vec{u}\| = 1$. On note O le point $(0, 0)$.

1) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et de $(\vec{u} \mid \vec{v})$.

2) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs unitaires tels que $\vec{u} + \vec{v}$ soit unitaire. Déterminer $(\vec{u} \mid \vec{v})$.

3) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires tels que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Déterminer les produits scalaires $(\vec{u} \mid \vec{v})$, $(\vec{v} \mid \vec{w})$ et $(\vec{w} \mid \vec{u})$.

4) Soient A, B, C trois points du cercle de centre O et de rayon 1, tels que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$$

Montrer que les points A, B, C forment un triangle équilatéral.

Exercice 10.7.
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire.

1) Soit $P = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ le plan affine d'équation $x_3 = 1$. Soit D la droite affine de P passant par les points $A = (1, 0, 1)$ et $B = (0, 1, 1)$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ puis écrire les équations cartésiennes de D dans P sous la forme $ax_1 + bx_2 = c$ et $x_3 = 1$.

2) Soit P' le plan affine d'équation $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$ et soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Montrer que pour tous points C et D de P', on a

$$(\overrightarrow{CD} \mid \vec{v}) = 0$$

Exercice 10.8.
1) Donner une équation cartésienne de la droite définie par les équations paramétriques :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2(1 + \lambda) \\ y & = & 3 - \lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Donner une représentation paramétrique de la droite d'équation $3x - y = 5$.

Exercice 10.9.
Donner une équation cartésienne du plan P passant par le point $A = (1, 2, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$

Exercice 10.10.
1) Donner une équation cartésienne du plan P paramétré par

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 2\mu \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

en utilisant 2 méthodes différentes.

2) Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.

3) Donner un système d'équations cartésiennes définissant la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 4\lambda + 5 \\ z = 3\lambda + 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4) Donner une représentation paramétrique de la droite donnée par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 10.11.
On considère le plan P d'équation cartésienne $x - y + z = 2$ et le plan P' d'équation cartésienne $x + 2y + 3z = 4$.

1) Vérifier que P et P' ne sont pas parallèles et donner une équation paramétrique de la droite D d'intersection de P et P'.

2) Donner une équation cartésienne du plan P'' perpendiculaire à D et passant par le point $A = (1, 0, -1)$.

Exercice 10.12.
1) Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u_1} = (1, 0, 1)$ et $\vec{u_2} = (1, 2, 3)$.

2) Vérifier que les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ sont orthogonaux et de même que les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ sont orthogonaux.