Produit scalaire et produit vectoriel

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 16 et 19 mars 2014

Produit scalaire de vecteurs

Définition

Le produit scalaire des vecteurs (libres) non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\alpha)$$

où $\alpha \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est le nombre 0.

- **Attention :** ne pas confondre avec la multiplication scalaire d'un vecteur par un nombre.
- La définition vaut pour des vecteurs du plan ou pour des vecteurs dans l'espace, elle se lit dans les deux sens et le cosinus est bien défini pour un angle non orienté.

Proposition

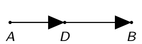
Des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, on a

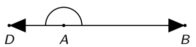
$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0.$$

Exemples et projections

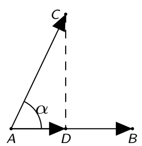
Proposition

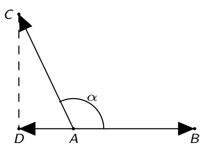
Pour tout vecteur (libre) $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$, d'où $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$.

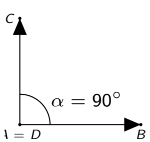




$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\|$







Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs (libres). La projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur (l'axe déterminé par) $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}'$ tel que

1. Le vecteur $\overrightarrow{v}'$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{u}$;
2. Le vecteur $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}'$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

On a alors $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v'}$.

Bases orthonormées

Définition

Une base de vecteurs est orthonormée si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. En particulier

- Une base orthonormée du plan est un couple de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ satisfaisant

$$\overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_1} = 1 \quad \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 \quad \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_2} = 1.$$

- Une base orthonormée de l'espace est un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ satisfaisant

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_1} = 1 & \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_3} = 0 \\ \overrightarrow{e_1} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_2} = 1 & \overrightarrow{e_2} \bullet \overrightarrow{e_3} = 0 \\ \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_1} = 0 & \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_2} = 0 & \overrightarrow{e_3} \bullet \overrightarrow{e_3} = 1. \end{array}$$

Les vecteurs de norme 1 sont aussi appelés *vecteurs unitaires*.

Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Dans le plan :

Proposition

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ont pour composantes (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ du plan, alors

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Dans l'espace :

Proposition

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace ont pour composantes (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_2) dans une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de l'espace, alors

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Propriétés du produit scalaire

Proposition

1. *Le produit scalaire est symétrique : on a*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$$

pour tous vecteurs libres $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

2. *Le produit scalaire est bilinéaire (distributif) : on a*
   - $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$ et $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$,
   - $(\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\lambda \vec{v})$

   pour tous vecteurs libres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre λ.
   En conséquence, on a
   - $(r\vec{u} + s\vec{v}) \bullet \vec{w} = r(\vec{u} \bullet \vec{w}) + s(\vec{v} \bullet \vec{w})$, *et*
   - $\vec{u} \bullet (r\vec{v} + s\vec{w}) = r(\vec{u} \bullet \vec{v}) + s(\vec{u} \bullet \vec{w})$,

   pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels r et s.
3. *Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} \bullet \vec{u} \geqslant 0$ et $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$.*

Composantes de vecteurs dans une base orthonormée

Proposition

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base orthonormée du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose dans cette base en

$$\vec{u} = (\vec{u} \bullet \vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{u} \bullet \vec{e_2})\vec{e_2}.$$

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée du plan. Tout vecteur $\vec{v}$ se décompose dans cette base en

$$\vec{v} = (\vec{v} \bullet \vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{v} \bullet \vec{e_2})\vec{e_2} + (\vec{v} \bullet \vec{e_3})\vec{e_3}.$$

Preuve :

- Dans le plan, on écrit $\vec{u} = r\vec{e_1} + s\vec{e_2}$, et on calcule $\vec{u} \bullet \vec{e_1}$ et $\vec{u} \bullet \vec{e_2}$.
- On fait de même dans l'espace avec les trois vecteurs de la base.

Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite

Soient $\vec{v}$ un vecteur libre et d une droite.

Définition

Le vecteur $\vec{v}$ se décompose de manière unique en $\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{v}^{\perp}$ où $\vec{v}_d$ est nul ou un vecteur directeur de d et où $\vec{v}^{\perp}$ est orthogonal à d. Le vecteur $\vec{v}_d$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur d.

On calcule facilement la projection d'un vecteur sur une droite, à l'aide du produit scalaire.

Proposition

Soient $\vec{v}$ un vecteur (libre) et $\vec{e}$ un vecteur directeur normé de d. La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur d est

$$\vec{v}_d = (\vec{v} \bullet \vec{e})\vec{e}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, alor la projection de $\vec{v}$ sur d est

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Norme et relations dans les triangles

- On a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u}$, par définition;
- On a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$;
- Dans un triangle ABC, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Proposition

Dans tout triangle ABC, on a

- $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$;
- $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$;
- $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\| \cos(\widehat{ABC})$.

- **Intérêt :** Lier les angles et les longueurs dans un triangle quelconque. Calculer l'intensité d'une résultante.

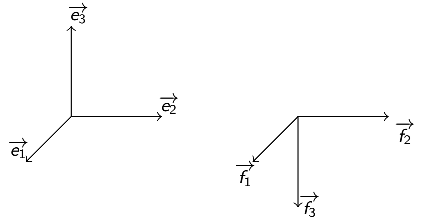
Proposition

Soit ABC un triangle. On a la relation suivante :

$$\frac{\sin(\widehat{ABC})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{BCA})}{AB} = \frac{\sin(\widehat{CAB})}{CB}.$$

Bases orthonormées positives et négatives de l'espace

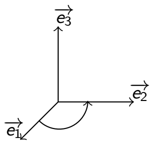
- Considérons les bases orthonormés suivantes de l'espace.

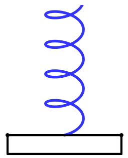


- Si on "déplace" la deuxième, pour "appliquer" $\vec{f_1}$ sur $\vec{e_1}$ et $\vec{f_2}$ sur $\vec{e_2}$, alors $\vec{e_3}$ et $\vec{f_3}$ sont opposés.
- Toute base orthonormée peut alors être "appliquée sur l'une des deux par un déplacement.
- En sciences, la première base est dite *droite* et l'autre *gauche*. En mathématiques, on dit que ces bases n'ont pas la même *orientation*. *Orienter* l'espace, c'est choisir un de ces types de bases, et décider que ce sont les bases *positives*.

Orientation et tire bouchon

Voici un tire-bouchon (pour droitiers) et une base. Si on visse pour rabattre $\vec{e_1}$ sur $\vec{e_2}$ (par le plus court chemin), le tire-bouchon va vers "le haut", dans le sens de $\vec{e_3}$: la base est droite.





La notion d'orientation est valable pour des bases quelconques : deux bases ont la même orientation si elles peuvent être déformées continûment l'une sur l'autre, en gardant une base à chaque instant.

Produit vectoriel de vecteurs dans l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs libres de l'espace.

Definition

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur libre défini par le conditions suivantes :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont multiples l'un de l'autre, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- Dans le cas contraire :
  1. La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou au plan vectoriel déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$);
  2. La norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a donc
     $$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin(\theta),$$
     où θ est l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  3. Son sens est tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit une base positive.

Propriétés de l'opération "produit vectoriel"

1. Le produit vectoriel est antisymétrique : on a

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}, \quad \text{et en particulier} \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0},$$

   pour tous vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$;
2. Le produit vectoriel est bilinéaire (distributif) : on a
   - $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$,
   - $(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v})$

   pour tous vecteurs libres $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tout nombre λ.
3. En général, on a
   - $(r\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = r(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w})+s(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$, et
   - $\overrightarrow{u}\wedge(r\overrightarrow{v}+s\overrightarrow{w}) = r(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})+s(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w})$,

   pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tous réels r et s.

Composantes de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans une base orthonormée positive

Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base othonormée positive de l'espace, on a

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2} \\
\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}.
\end{array}}$$

En utilisant la linéarité du produit vectoriel par rapport à ses deux arguments, on a

Proposition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour composantes respectives (u_1, u_1, u_2) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée positive alors

$$\boxed{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} : (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_2), u_1v_2 - u_2v_1).}$$

Produits vectoriels et déterminants

On peut exprimer la règle de calcul précédente à l'aide de matrices.

Définition

Une matrice de type (p, q) $(p, q \in \mathbb{N}^*)$ est un tableau rectangulaire de nombres réels ayant p lignes et q colonnes.

Type $(2,2)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Type $(2,3)$: $\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$ Type $(1,3)$: $\begin{pmatrix} k & l & m \end{pmatrix}\ldots,$

où $a, \ldots, m$ sont réels.

Définition

Le *déterminant* d'une matrice de type $(2,2)$ est défini par

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$$

Calcul par déterminants

- On donne les vecteurs dans un base orthonormée positive $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2, v_3)$.
- On forme une matrice dont on cache une colonne à la fois.

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} : \quad (\det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix})$$

- 99% des erreurs viennent du signe $-$ que l'on oublie facilement;
- On vérifie que le résultat obtenu est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.