Formulaire sur les produits scalaires et vectoriels

Dans ce qui suit on se place dans $E = \mathbf{R}^3$, identifié avec l'espace vectoriel de la géométrie. Un vecteur sera noté avec une flèche et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ désigne la base canonique.

Produit scalaire

C'est une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ qui à un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs associe un nombre réel noté $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. linéarité par rapport à la première variable :
   quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, et les nombres réels λ_1 et λ_2,
   $$< \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v} >= \lambda_1 < \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v} > + < \lambda_2\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v} >$$
2. linéarité par rapport à la deuxième variable :
   quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et les nombres réels μ_1 et μ_2,
   $$< \overrightarrow{u}, \mu_1\overrightarrow{v_1} + \mu_2\overrightarrow{v_2} >= \mu_1 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} > + \mu_2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2} >$$
3. symétrie : quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$
   $$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$$
4. positivité : quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$
   $$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >\geq 0$$
5. $$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >= 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

On note $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >}$ la **norme** d'un vecteur. Elle vérifie

1. quels que soient le vecteur $\overrightarrow{u}$ et le nombre λ,
   $$\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$$
2. Inégalité triangulaire : quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
   $$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$
3. $$\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si
$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0\ .$$

Base orthonormée $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$. C'est une famille de trois vecteurs de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Inégalité de Schwarz : quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
$$|< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >| \leq \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$$

et on a égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Angle de deux vecteurs non nuls. C'est l'angle θ défini par

$$\theta = \arccos \frac{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >}{\| \overrightarrow{u} \| \, \| \overrightarrow{v} \|}$$

Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Si $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base orthonormée, on a

$$\overrightarrow{u} = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{I} > \overrightarrow{I} + < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{J} > \overrightarrow{J} + < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{K} > \overrightarrow{K}$$

Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Si $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base orthonormée, et si

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{I} + y\overrightarrow{J} + z\overrightarrow{K} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{I} + y'\overrightarrow{J} + z'\overrightarrow{K}$$

alors

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = xx' + yy' + zz'$$

et

$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, .$$

Ecriture matricielle du produit scalaire

Si U et V sont les matrices colonnes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormée, alors

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = {}^tUV$$

Matrice de changement de base orthonormée

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée, et $\mathcal{B}'$ une autre base. Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si $Q^{-1} = {}^tQ$. Une telle matrice Q est dite orthogonale et son déterminant vaut 1 ou -1.

Remarque

On choisira dans ce qui suit de prendre le produit scalaire rendant la base canonique orthonormée, c'est-à-dire celui qui est défini par

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = xx' + yy' + zz'$$

où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Orientation de l'espace

Si l'on prend une base $\mathcal{B}$ de matrice P dans la base canonique. On dira que $\mathcal{B}$ est une base directe si $\det P > 0$, et indirecte si $\det P < 0$.

On dira que deux bases de même nature (directes ou indirectes) ont la même orientation.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases, et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $\det Q > 0$. En particulier, si les bases sont orthonormées, elles ont même orientation si et seulement si $\det Q = 1$.

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base, où bien elle est directe ou bien $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, -\overrightarrow{w})$ est directe.

Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est la base canonique, alors $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$ et $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont des bases directes, alors que $(-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ sont des bases indirectes.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, et si $\mathcal{X}$ est un système de trois vecteurs de matrice Q dans $\mathcal{B}$ et Q' dans $\mathcal{B}'$, alors $\det Q = \det Q'$.

Produit mixte

Soit trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$. On appellera **produit mixte** de ces trois vecteurs et on notera $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique. Ce produit mixte a donc les propriétés du déterminant : c'est une forme linéaire antisymétrique.

Produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que, quel que soit $\overrightarrow{z}$,

$$< \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z} >= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}) \ .$$

Ce vecteur est appelé **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et se note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On a donc

$$< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z} >= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}) \ .$$

Expression du produit vectoriel dans la base canonique

Si

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}$$

alors

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - y'z)\,\overrightarrow{i} + (zx' - z'x)\,\overrightarrow{j} + (xy' - y'x)\,\overrightarrow{k}$$

Formellement cela revient à développer le déterminant suivant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} x & x' & \overrightarrow{i} \\ y & y' & \overrightarrow{j} \\ z & z' & \overrightarrow{k} \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit vectoriel

1. linéarité par rapport à la première variable :
   quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, et les nombres réels λ_1 et λ_2,

$$(\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v}$$

2. linéarité par rapport à la deuxième variable :
   quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et les nombres réels μ_1 et μ_2,

$$\overrightarrow{u} \wedge (\mu_1 \overrightarrow{v_1} + \mu_2 \overrightarrow{v_2}) = \mu_1\,\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1} + \mu_2\,\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2}$$

3. antisymétrie : quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$$

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}\ .$$

(En particulier $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$).

De plus on a la relation

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

Si $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base orthonormé directe, et si

$$\overrightarrow{u} = X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} + Z\overrightarrow{K} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = X'\overrightarrow{I} + Y'\overrightarrow{J} + Z'\overrightarrow{K}$$

alors

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (YZ' - Y'Z)\overrightarrow{I} + (ZX' - Z'X)\overrightarrow{J} + (XY' - Y'X)\overrightarrow{K}$$

L'expression du produit vectoriel est la même dans toute base orthonormée directe.

En particulier

$$\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \overrightarrow{K}\ ,\ \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{K} = \overrightarrow{I}\ ,\ \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \overrightarrow{J}$$

Définition géométrique

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires le produit vectoriel est nul. Sinon c'est l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$
2. $\|w\| = \|u\|\,\|v\|\,|\sin\theta|$, où θ est l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
3. la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est directe.

Remarques : a) $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

b) la valeur absolue du produit mixte $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$.

Complément

Double produit vectoriel :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} > \overrightarrow{v} - < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} > \overrightarrow{u}$$

Produit scalaire de deux produits vectoriels :

$$< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{z} > = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z} > - < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{z} >< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >$$