Fiche de cours : Produit scalaire et produit vectoriel.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire (espace euclidien).

Produit scalaire

A - Produit scalaire dans l'espace $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \sum_{i=i}^{3} x_i\ y_i = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\,(\vec{u}\,,\vec{v})$
2) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\,.\perp \vec{v}$
3) Le p.s. est *symétrique* : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
4) Le p.s. est *bilinéaire* : Soit k de $\mathbb{R}$, alors on a : $(k\,\vec{u}\,)\,.\,\vec{v} = k\,(\vec{u}\,.\,\vec{v}\,) = \vec{u}.(k\,\vec{v}\,)$

   $(\vec{u} + \vec{v}\,).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

B – Propriétés

1°) **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\boxed{|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

Avec égalité ssi $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ lié (soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ colinéaires)

$(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ lié ⇔ ∃ (a,b) ∈ K \ {0,0} tel que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = 0$ ⇔ ∃ k ∈ K tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

2°) **Inégalité de Minkowski. :** $\boxed{|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$

<u>Cas d'égalité</u> :

$|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$ ssi l'un des deux vecteurs est nul ou si ils sont colinéaires de sens opposé

(soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou ∃ k ∈ $\mathbb{R}_-$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$)

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ssi l'un des deux vecteurs est nul ou si ils sont colinéaires de même sens

(soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou ∃ k ∈ $\mathbb{R}_+$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$)

Produit vectoriel.

1°) Définition du Produit vectoriel dans E espace euclidien de dimension 3.

Dans une base orthonormée

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2.y_3 - x_3.y_2 \\ x_3.y_1 - x_1.y_3 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{pmatrix}$$

2°) Propriétés.

- L'application produit vectoriel est *bilinéaire* et *antisymétrique* ($\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$).
- $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ est liée ⇔ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}\,) \perp \vec{u}\ et\ (\vec{u} \wedge \vec{v}\,) \perp \vec{v}$
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |sin(\vec{u},\vec{v})|$
- L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ est égale à : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$
- **Double produit vectoriel** : $\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}\,) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}}$
- **Identité de Jacobi** : $\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}\,) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}\,) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}\,) = \vec{0}}$

M. DUFFAUD