Chapitre 8

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, produit scalaire, déterminant, produit vectoriel, droites et plans

Sommaire

8.1 Vecteurs et points

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ sont généralement considérés comme des points (du plan ou de l'espace) mais on peut aussi les considérer comme des vecteurs. On précise cette notion ci-dessous.

Il est d'usage de noter les vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche, comme ceci : $\overrightarrow{u}$. Le vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ dont toutes les coordonnées sont nulles est noté $\overrightarrow{0}$.

Définition 8.1 On définit sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire (c.-à-d. un élément de $\mathbb{R}$) :

— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$;
— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$ (on peut également écrire $\lambda\overrightarrow{u}$) ;
— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$;
— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ (on peut également écrire $\lambda\overrightarrow{u}$).

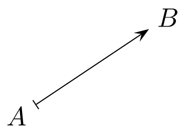
Proposition 8.2 L'addition et la multiplication par un scalaire définies sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ vérifient les propriétés suivantes :

(a) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{0}$ est élément neutre pour l'addition) ;
(b) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (l'addition est commutative) ;
(c) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (l'addition est associative) ;
(d) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un opposé, à savoir $(-1) \cdot \overrightarrow{u}$) ;
(e) pour tout $(\lambda, \mu, \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R}^2 \times E$: $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$;
(f) pour tout $(\lambda, \mu, \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R}^2 \times E$: $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda \cdot \overrightarrow{u}) + (\mu \cdot \overrightarrow{u})$.
(g) pour tout $(\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R} \times E^2$: $\lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (\lambda \cdot \overrightarrow{u}) + (\lambda \cdot \overrightarrow{v})$.
(h) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;
(i) pour tout $(\lambda, \overrightarrow{u}) \in \mathbb{R} \times E$: $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur.)

Définition 8.3 Un ensemble E qui, comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, est muni de deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire (c.-à-d. un élément de $\mathbb{R}$), et qui vérifie les propriétés de la proposition 8.2, s'appelle un espace vectoriel réel. (Ses éléments sont alors appelés des vecteurs.)

Définition 8.4 Si $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, on note $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$; les éléments de $\mathbb{R}^2$ étant représentés par des points du plan, on représente alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche issue de A et pointant sur B :

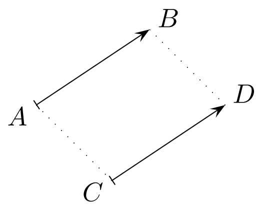


De même, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

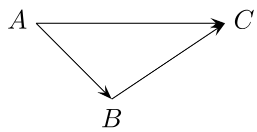
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on écrit aussi $B = A + \overrightarrow{u}$.

Remarque 8.5

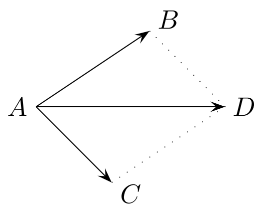
(a) Si A, B, C et D sont quatre points du plan, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(ABDC)$ est un parallélogramme :



(b) Si A, B et C sont trois points du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$:



(c) On en déduit que si A, B et C sont trois points du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ peut-être représenté par $\overrightarrow{AD}$ où le point D est tel que $(ABDC)$ est un parallélogramme :



8.2 Produit scalaire et norme

Définition 8.6 On définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par les formules suivantes :

— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = u_1v_1 + u_2v_2$;
— pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$;

le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

Proposition 8.7 Le produit scalaire défini sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) le produit scalaire est bilinéaire, c.-à-d. :

— pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{v}) = \lambda_1(\overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{v}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{v})$;
— pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in E^3$ et $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$: $(\overrightarrow{u} \mid \mu_1\overrightarrow{v_1} + \mu_2\overrightarrow{v_2}) = \mu_1(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1}) + \mu_2(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_2})$;

(b) le produit scalaire est symétrique, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$;
(c) le produit scalaire est défini positif, c.-à-d. :
- le produit scalaire est positif, c.-à-d. : pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}) \geqslant 0$;
- de plus pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur.)

Définition 8.8 On définit la norme (dite euclidienne) sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u})}$, c.-à-d. :
- pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$: $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$;
- pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$: $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Remarque 8.9 La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la distance entre A et B.

Proposition 8.10 La norme euclidienne définie sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ vérifie les propriétés suivantes :
(a) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{u}\|$;
(b) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$;
(c) pour tout $\overrightarrow{u} \in E$: $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur.)

Théorème 8.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$;
(a) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$ on a : $\left|(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})\right| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$;
(b) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\left|(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})\right| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Preuve : Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = 0$, $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ; il n'y a donc rien à montrer dans ce cas. On suppose donc désormais $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et on considère la fonction polynomiale de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(\lambda) = (\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \|\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 ;$$

(a) d'après la proposition 8.7 et la definition 8.8, on a :

$$P(\lambda) = \|\overrightarrow{u}\|^2\lambda^2 + 2(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})\lambda + \|\overrightarrow{v}\|^2 ;$$

de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(\lambda) \geqslant 0$; le discriminant de $P(\lambda)$ est donc négatif ou nul (s'il était strictement positif, $P(\lambda)$ aurait deux racines réelles distinctes, $\lambda_1 < \lambda_2$, et on aurait $P(\lambda) < 0$ pour $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$) ; on a donc :

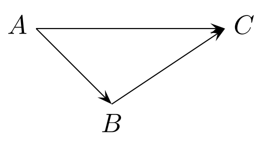
$$4\,(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})^2 - 4\,\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant 0$$

c.-à-d. : $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$, d'où, en prenant la racine carré :

$$\left|(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})\right| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| ;$$

(b) d'après ce qui précède, si $\left|(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})\right| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$, alors le discriminant de $P(\lambda)$ est nul, donc $P(\lambda)$ admet exactement un racine réelle ; mais $P(\lambda) = \|\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$, donc si $P(\lambda) = 0$, alors $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. □

Théorème 8.12 (Inégalité triangulaire) Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$;
(a) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$ on a : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$;
(a') pour tout $(A, B, C) \in E$ on a : $\|\overrightarrow{AC}\| \leqslant \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$; autrement dit : la distance de A à C est plus courte que la somme des distances de A à B et de B à C (d'où le nom d'inégalité triangulaire).



(b) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens. (Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, l'énoncé n'a pas d'intérêt.)

Preuve :

(a) D'après les définitions et les propriétés du produit scalaire et de la norme euclidienne, on a

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) + \|\overrightarrow{v}\|^2;$$

d'après l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 = \big(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\big)^2$$

d'où : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$;

(b) on suppose $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$; d'après les calcul qui précèdent, on a $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$ donc, d'après le théorème 8.11 (cas de l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz), $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, et comme $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on a $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \neq 0$; mais alors $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \mid \lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\|\overrightarrow{u}\|^2$, or $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| > 0$, donc $\lambda > 0$. □

Définition 8.13 On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = 0$.

8.3 Déterminant

Définition 8.14

(a) Soient $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$; on appelle déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

(b) Soient $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$; on appelle déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ le nombre :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3.$$

Remarque 8.15 La formule du déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est facile à retenir. Celle du déterminant de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est plus complexe. Pour la mémoriser, on utilise la méthode suivante connue sous le nom de « règle de Sarrus » : on dispose les coordonnées de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ en carré, et on répète les deux premières lignes en dessous du carré ainsi formé :

$$\begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{array}$$

le déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une somme dont trois termes sont affectés d'un signe « + » et trois termes affectés d'un signe « − » ; ils correspondent aux produits des termes regroupés selon les figures suivantes :

signe « + » signe « − »

$$\begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{array}$$

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3$$

Proposition 8.16 Le déterminant défini sur $E = \mathbb{R}^2$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) le déterminant est bilinéaire, c.-à-d. :

— pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $\det(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \lambda_1 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + \lambda_2 \det(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})$;
— pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in E^3$ et $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$: $\det(\overrightarrow{u}, \mu_1\overrightarrow{v_1} + \mu_2\overrightarrow{v_2}) = \mu_1 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + \mu_2 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})$;

(b) le déterminant est antisymétrique, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;

(c) le déterminant est alterné, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

(La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur.)

Proposition 8.17 Le déterminant défini sur $E = \mathbb{R}^3$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) le déterminant est multilinéaire, c.-à-d. :

— pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w},) \in E^4$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $\det(\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda_1 \det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})+\lambda_2 \det(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
— pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) \in E^4$ et $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$: $\det(\overrightarrow{u}, \mu_1\overrightarrow{v_1} + \mu_2\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = \mu_1 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) + \mu_2 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w})$;
— pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in E^4$ et $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$: $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \nu_1\overrightarrow{w_1}+\nu_2\overrightarrow{w_2}) = \nu_1 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1})+\nu_2 \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2})$;

(b) le déterminant est antisymétrique, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$:

— $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
— $\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
— $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;

(c) le déterminant est alterné, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$:

— si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$;
— si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$ alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$;
— si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$;

(La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur.)

8.4 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition 8.18 Pour tout $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ on définit le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (\, u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, u_3v_1 - u_1v_3 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1 \,) ;$$

le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur.

Proposition 8.19 Le produit vectoriel défini sur $E = \mathbb{R}^3$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) le produit vectoriel est bilinéaire, c.-à-d. :

— pour tout $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) \in E^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$: $(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda_1(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v})$;
— pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \in E^3$ et $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{u} \wedge (\mu_1\overrightarrow{v_1} + \mu_2\overrightarrow{v_2}) = \mu_1(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \mu_2(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2})$;

(b) le produit vectoriel est antisymétrique, c.-à-d. : pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$;

(c) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$: $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;

(d) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, c.-à-d. : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u}) = 0$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v}) = 0$;

(e) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2$;

(f) pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$: $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ;

Preuve : Les propriétés (a) à (e) s'obtiennent par calcul direct. La propriété (f) résulte de la formule (e) et du théorème 8.11 (cas de l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). □

8.5 Familles libres, familles génératrices et bases

Définition 8.20 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}) \in E^n$ une famille finie d'élément de E ;

(a) on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est liée s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$ (on dit que $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$ est une relation non triviale sur $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$) ;

(b) si la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ n'est par liée, on dit qu'elle est libre ; autrement dit : $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ est libre si pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ on a : $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)$;

(c) on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ est génératrice si pour tout $\overrightarrow{v}\in E$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_n\overrightarrow{u_n}$ (on dit que $\overrightarrow{v}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}$).

(d) on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Remarque 8.21 Si une une sous famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})\in E^p$ de $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})\in E^n$ (où $1\leqslant p\leqslant n$) est liée par une relation non triviale $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0}$, alors la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})\in E^n$ est liée par la relation $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p}+0\,\overrightarrow{u_{p+1}}+\dots+0\,\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{0}$ qui est également non triviale.

Définition 8.22 (Cas de deux vecteurs liés)

(a) Si une famille de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée, on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

(b) Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ et s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens.

(c) Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ et s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{-*}$ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens opposés.

Exemple 8.23

(1) La famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$, est une base, appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(2) La famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$, est une base, appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 8.24

(a) Une famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est libre si et seulement si $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\neq 0$.

(b) Une famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est libre si et seulement si $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\neq 0$.

Preuve :

(a) on pose $\Delta=u_1v_2-u_2v_1$; on va montrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée si et seulement si $\Delta=0$;

on suppose tout d'abord $\Delta=0$ et on distingue deux cas :

— si $\overrightarrow{u}=0$, alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée ; il n'y a rien a montrer dans ce cas là ;

— si $\overrightarrow{u}\neq 0$, on a :

$$\begin{cases} v_1\overrightarrow{u}-u_1\overrightarrow{v} = (\,0\,,-\Delta)=(0,0)\\ v_2\overrightarrow{u}-u_2\overrightarrow{v} = (\Delta,\ \ 0\,)=(0,0)\end{cases}\tag{$*$}$$

or $\overrightarrow{u}\neq 0$ donc $(v_1,-u_1)\neq(0,0)$ ou $(v_2,-u_2)\neq(0,0)$, ce qui montre qu'une des deux relations qui précèdent est non triviale, c.-à-d. que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée ;

réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée par une relation $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ où $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$; on a alors :

$$\begin{cases} 0=\det(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=\lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\mu\det(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=\lambda\Delta\\ 0=\det(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})=\lambda\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})+\mu\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\mu\Delta\end{cases}$$

or $\lambda\neq 0$ ou $\mu\neq 0$ d'où $\Delta=0$.

(b) on pose $\Delta=u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3$; on va montrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée si et seulement si $\Delta=0$; on procède comme au point précédent, mais les calculs sont plus complexes ; on donne les expressions suivantes de Δ (dans lesquelles on peut relever de nombreuses symétries) :

$$\begin{aligned}\Delta &= u_1(v_2w_3-v_3w_2)+v_1(w_2u_3-w_3u_2)+w_1(u_2v_3-u_3v_2)\\ \Delta &= u_2(v_3w_1-v_1w_3)+v_2(w_3u_1-w_1u_3)+w_2(u_3v_1-u_1v_3)\\ \Delta &= u_3(v_1w_2-v_2w_1)+v_3(w_1u_2-w_2u_1)+w_3(u_1v_2-u_2v_1)\end{aligned}$$

on suppose tout d'abord $\Delta=0$ et on distingue trois cas :

— si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée ; il n'y a rien a montrer dans ce cas là ;

— si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et si $(\,u_2v_3-u_3v_2\,,\,u_3v_1-u_1v_3\,,\,u_1v_2-u_2v_1\,)=(0,0,0)$, alors la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée et la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est donc également liée ; en effet, on a :

$$\begin{cases} v_1\overrightarrow{u}-u_1\overrightarrow{v}=(\ 0\ ,-(u_1v_2-u_2v_1),\ u_3v_1-u_1v_3\ )=(0,0,0)\\ v_2\overrightarrow{u}-u_2\overrightarrow{v}=(\ u_1v_2-u_2v_1\ ,\ 0\ ,-(u_2v_3-u_3v_2))=(0,0,0)\\ v_3\overrightarrow{u}-u_3\overrightarrow{v}=(-(u_3v_1-u_1v_3),\ u_2v_3-u_3v_2\ ,\ 0\ )=(0,0,0)\end{cases}$$

or $\overrightarrow{u} \neq 0$ donc $(v_1, -u_1) \neq (0,0)$, $(v_2, -u_2) \neq (0,0)$ ou $(v_3, -u_3) \neq (0,0)$, ce qui montre qu'une des trois relations qui précèdent est non triviale, c.-à-d. que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée ;

— si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et si $(\, u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, u_3v_1 - u_1v_3 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1 \,) \neq (0,0,0)$, on a :

$$\begin{cases} (v_2w_3 - v_3w_2)\overrightarrow{u} + (w_2u_3 - w_3u_2)\overrightarrow{v} + (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{w} = (\Delta, 0, 0) = (0,0,0) \\ (v_3w_1 - v_1w_3)\overrightarrow{u} + (w_3u_1 - w_1u_3)\overrightarrow{v} + (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{w} = (0, \Delta, 0) = (0,0,0) \\ (v_1w_2 - v_2w_1)\overrightarrow{u} + (w_1u_2 - w_2u_1)\overrightarrow{v} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{w} = (0,0,\Delta) = (0,0,0) \end{cases} \qquad (**)$$

or, par hypothèse, dans les trois expressions qui précèdent, au moins un des coefficient en facteur de $\overrightarrow{w}$ est non nul, ce qui montre qu'une des trois relations est non triviale, c.-à-d. que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée ;

réciproquement, on suppose que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée par une relation $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ où $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$; on a alors :

$$\begin{cases} 0 = \det(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda\Delta \\ 0 = \det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \mu\Delta \\ 0 = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \nu\Delta \end{cases}$$

or $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ ou $\nu \neq 0$ d'où $\Delta = 0$. □

Théorème 8.25

(a) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille libre de $\mathbb{R}^2$; alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base ; plus précisément : pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$; les nombres λ et μ s'appellent alors les coordonnées de $\overrightarrow{X}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;

(b) soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$; alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base ; plus précisément : pour tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$; les nombres λ, μ et ν s'appellent alors les coordonnées de $\overrightarrow{X}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Remarque 8.26 Du théorème 8.25 on déduit immédiatement que trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont nécessairement liés, et que quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ le sont également.

Preuve du théorème 8.25 :

(a) On montre d'abord l'existence de (λ, μ) : on pose $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ et $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$; on note $\Delta = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on considère la base canonique formée des vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$; on sait, d'après le théorème 8.24, que $\Delta \neq 0$; on a alors, d'après la formule $(*)$ de la preuve de la proposition 8.24 :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \dfrac{v_2}{\Delta} \cdot \overrightarrow{u} - \dfrac{u_2}{\Delta} \cdot \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{e_2} = -\dfrac{v_1}{\Delta} \cdot \overrightarrow{u} + \dfrac{u_1}{\Delta} \cdot \overrightarrow{v} \end{cases}$$

or $\overrightarrow{X}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{X}$ est aussi combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$; plus précisément : $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$ d'où $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ avec $\lambda = \dfrac{x_1v_2 - x_2v_1}{\Delta}$ et $\mu = -\dfrac{x_1u_2 - x_2u_1}{\Delta}$.

Par ailleurs, si $\overrightarrow{X} = \lambda_1\overrightarrow{u} + \mu_1\overrightarrow{v} = \lambda_2\overrightarrow{u} + \mu_2\overrightarrow{v}$, alors $(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{u} + (\mu_1 - \mu_2)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ donc $\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ d'où $(\lambda_1, \mu_1) = (\lambda_2, \mu_2)$, ce qui montre l'unicité de (λ, μ).

(b) On montre d'abord l'existence de (λ, μ, ν) : on pose $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ et $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$; on note $\Delta = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et on considère la base canonique formée des vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$; on sait, d'après la proposition 8.24, que $\Delta \neq 0$; on a alors, d'après la formule $(**)$ de la preuve de la proposition 8.24 :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \dfrac{v_2w_3 - v_3w_2}{\Delta} \cdot \overrightarrow{u} + \dfrac{w_2u_3 - w_3u_2}{\Delta} \cdot \overrightarrow{v} + \dfrac{u_2v_3 - u_3v_2}{\Delta} \cdot \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{e_2} = \dfrac{v_3w_1 - v_1w_3}{\Delta} \cdot \overrightarrow{u} + \dfrac{w_3u_1 - w_1u_3}{\Delta} \cdot \overrightarrow{v} + \dfrac{u_3v_1 - u_1v_3}{\Delta} \cdot \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{e_3} = \dfrac{v_1w_2 - v_2w_1}{\Delta} \cdot \overrightarrow{u} + \dfrac{w_1u_2 - w_2u_1}{\Delta} \cdot \overrightarrow{v} + \dfrac{u_1v_2 - u_2v_1}{\Delta} \cdot \overrightarrow{w} \end{cases}$$

or $\overrightarrow{X}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ donc $\overrightarrow{X}$ est aussi combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Par ailleurs, si $\overrightarrow{X} = \lambda_1\overrightarrow{u}+\mu_1\overrightarrow{v}+\nu_1\overrightarrow{w} = \lambda_2\overrightarrow{u}+\mu_2\overrightarrow{v}+\nu_2\overrightarrow{w}$, alors $(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{u}+(\mu_1-\mu_2)\overrightarrow{v}+(\nu_1-\nu_2)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2 = 0$ d'où $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, ce qui montre l'unicité de (λ, μ, ν). □

Proposition et Définition 8.27 (Bases orthogonales et bases orthonormées)

(a) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, non nuls et orthogonaux ; alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$;

(b) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, non nuls et orthogonaux 2 à 2 ; alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$;

une telle base est dite orthogonale ; si de plus tous les vecteurs de la base sont de norme 1, alors elle est dite orthonormée.

Preuve : On traite le cas de $\mathbb{R}^3$; le cas de $\mathbb{R}^2$ se prouve de la même manière ; si $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ alors :

$$\begin{cases} 0 = (\overrightarrow{u} \mid \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w}) = \lambda\|\overrightarrow{u}\|^2 \\ 0 = (\overrightarrow{v} \mid \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}) = \mu\|\overrightarrow{v}\|^2 \\ 0 = (\overrightarrow{w} \mid \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{w}) = \nu\|\overrightarrow{w}\|^2 \end{cases}$$

or $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ et $\overrightarrow{w} \neq 0$ donc $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$, $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{w}\| \neq 0$ d'où $\lambda = \mu = \nu = 0$. □

Exemple 8.28

(1) Les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont des bases orthonormées.

(2) Soient $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$; si $\|\overrightarrow{u}\| = |\overrightarrow{v}\| = 1$ et $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = 0$ alors, d'après la proposition 8.19, $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}) = 0$ et $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| = 1$, donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée.

8.6 Repères

Définition 8.29

(a) Un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbb{R}^2$ est formé d'un point Ω et d'une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbb{R}^2$;

(b) un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\mathbb{R}^3$ est formé d'un point Ω et d'une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\mathbb{R}^3$;

(c) le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, où $O = (0,0)$, $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$ s'appelle le repère canonique de $\mathbb{R}^2$;

(d) le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$, où $O = (0,0,0)$, $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ s'appelle le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 8.24.

Proposition 8.30

(a) Soit $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère de $\mathbb{R}^2$; pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$; les nombres λ et μ s'appellent les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;

(b) soit $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ un repère de $\mathbb{R}^3$; pour tout point M de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$; les nombres λ, μ et ν s'appellent les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Définition 8.31

(a) Un repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbb{R}^2$ est formé d'un point Ω et d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$;

(b) un repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\mathbb{R}^3$ est formé d'un point Ω et d'une base orthonormé $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;

Exemple 8.32 Les repères canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont des repères orthonormés.

8.7 Droites et plans

Définition 8.33 (Droites) Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$.

(a) On appelle droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ de E, l'ensemble :

$$D = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(b) On appelle droite affine passant par un point A de E et dirigée par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ de E, l'ensemble :

$$\mathscr{D} = A + \mathbb{R}\vec{u} = \{A + \lambda\vec{u}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{M \in E\,;\, \exists\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}\}.$$

Définition 8.34 (Plans) Soit $E = \mathbb{R}^3$.

(a) On appelle plan vectoriel engendrée par une famille libre de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de E, l'ensemble :

$$P = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\,;\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(b) On appelle plan affine passant par un point A de E et dirigée par une famille libre de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de E, l'ensemble :

$$\mathscr{P} = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \{A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\,;\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{M \in E\,;\, \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\}.$$

Proposition et Définition 8.35 (Vecteur normal à une droite de $\mathbb{R}^2$ et équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$)

Soit $\mathscr{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$, passant par un point $A = (a_1, a_2)$ et dirigé par un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$, et soit $\vec{n} = (-u_2, u_1)$.

Alors, pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ on a $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$.

Autrement dit, pour tout $M = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si :

$$-u_2(x_1 - a_1) + u_1(x_2 - a_2) = 0 \tag{E}$$

L'équation (E) s'appelle l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Preuve : comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a $\vec{n} \neq \vec{0}$; de plus, on vérifie immédiatement que $(\vec{u} \mid \vec{n}) = 0$; d'après la proposition 8.27, la famille $(\vec{u}, \vec{n})$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Si $M \in \mathscr{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ donc $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = \lambda(\vec{n} \mid \vec{u}) = 0$.

Réciproquement, on suppose que $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$; comme $(\vec{u}, \vec{n})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{n}$ et alors $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = \mu\|\vec{n}\|^2$, donc $\mu = 0$, d'où $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, c.-à-d. $M \in \mathscr{D}$. □

Remarque 8.36 On remarque que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a $(\vec{n} \mid \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v})$; on a donc $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 - a_1 \\ u_2 & x_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0$.

Proposition et Définition 8.37 (Vecteur normal à un plan de $\mathbb{R}^3$ et équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$, passant par un point $A = (a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par une famille libre $(\vec{u}, \vec{v})$, et soit $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (n_1, n_2, n_3)$.

Alors, pour tout $M \in \mathbb{R}^3$ on a : $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$.

Autrement dit, pour tout $M = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on a $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si :

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0 \tag{E}$$

L'équation (E) s'appelle l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

Preuve : la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre donc, d'après la proposition 8.19, $\vec{n} \neq 0$; de plus $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{n}) = (\vec{n} \mid \vec{n}) = \|\vec{n}\|^2 \neq 0$, donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base de $\mathbb{R}^3$; on rappelle également que $(\vec{n} \mid \vec{u}) = (\vec{n} \mid \vec{v}) = 0$.

Si $M \in \mathscr{P}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ donc $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = \lambda(\vec{n} \mid \vec{u}) + \mu(\vec{n} \mid \vec{v}) = 0$.

Réciproquement, on suppose que $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$; comme $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{n}$ et alors $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = \nu\|\vec{n}\|^2$, donc $\nu = 0$, d'où $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, c.-à-d. $M \in \mathscr{P}$. □

Remarque 8.38 On remarque que pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ on a $(\vec{n} \mid \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ on a donc $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 - a_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 - a_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$.

Remarque 8.39 (Équations d'une droite dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $\mathscr{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^3$, passant par un point $A = (a_1, a_2, a_3)$ et dirigé par un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$.

Alors, pour tout $M \in \mathbb{R}^3$ on a $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = 0$.

Autrement dit, pour tout $M = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on a $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si les trois équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} u_2(x_3 - a_3) - u_3(x_2 - a_2) = 0 & (E_1) \\ u_3(x_1 - a_1) - u_1(x_3 - a_3) = 0 & (E_2) \\ u_1(x_2 - a_2) - u_2(x_1 - a_1) = 0 & (E_3) \end{cases}$$

On remarque cependant que $u_1(E_1) + u_2(E_2) + u_3(E_3)$ est l'équation $0 = 0$ qui est toujours vérifiée. Deux des équations parmi (E_1), (E_2) et (E_3) suffisent donc à définir $\mathscr{D}$.