Dénombrement

Table des matières

1 Dénombrer des listes

Définition 1 : Une liste est une suite d'éléments ordonnés d'un ensemble E. Une liste induit donc une notion d'ordre.

1.1 Permutation

Définition 2 : Une permutation de n éléments d'un ensemble E est une liste de n éléments de cet ensemble E.

Remarque : Toutes les permutations d'un ensemble E représente toutes les possibilités d'énumérer les éléments de cet ensemble E.

Exemples :

1) Trouver tous les classements possibles d'une épreuve sportive qui comporte 10 athlètes.
2) Trouver tous les anagrammes du mot « ACHILE ».
3) Trouver tous les nombres de 4 chiffres que l'on peut former avec les chiffres de 1 789.

Théorème 1 : Le nombre de permutations d'un ensemble$E$ de n éléments est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

$n!$ est appelé « factorielle n ». Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples :

1) Le nombre de classements possibles d'une compétition avec 10 athlètes est :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$$

2) Le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec le mot « ACHILE » (6 lettres distinctes) est :

$$6! = 6 \times 5 \times \cdots \times 2 \times 1 = 720$$

Par contre le nombre d'anagrammes avec le mot « ENSEMBLE » (8 lettres non distinctes) n'est pas $8!$, car les 3 « E » ne sont pas discernables. Les permutations possibles des 3 « E » sont de $3! = 6$. On a donc compté avec $8!$, 6 fois plus d'anagrammes.

Le nombre d'anagramme du mot « ENSEMBLE » est donc de :

$$\frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times \cdots \times 5 \times 4 = 6\,720$$

3) Le nombre de nombres de 4 chiffres que l'on peut former à partir des chiffres de 1 789 est égal à :
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Il est important de se familiariser avec la notation factorielle. Voici quelques exemples de simplification sans l'aide de la calculatrice.

- $\dfrac{21!}{20!} = \dfrac{21 \times 20!}{20!} = 21$
- $\dfrac{6! - 5!}{5!} = \dfrac{5!(6-1)}{5!} = 5$
- $\dfrac{6 \times 4!}{5!} = \dfrac{6 \times 4!}{5 \times 4!} = \dfrac{6}{5}$
- $\dfrac{9!}{5! \times 4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2} = 126$
- $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1) \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n-1)$
- $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$
- $\dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = \dfrac{9!}{3! \times 4!}$
- $n(n+1)(n+2) = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

1.2 Arrangement

Définition 3 : Un arrangement de p éléments d'un ensemble E de n éléments ($p \leqslant n$) est une liste composée de p éléments distincts 2 à 2 de l'ensemble E

Remarque :
- Une permutation de l'ensemble E est un arrangement des n éléments de E.
- Un arrangement peut être associé à p tirages successifs sans remise dans une urne qui contient n éléments.

Exemples :

1) Trouver tous les tiercés, dans l'ordre, possibles avec 20 chevaux au départ.
2) Trouver tous les bureaux (président, vice-président, trésorier et secrétaire) que l'on peut élire dans une association de 30 membres.
3) Trouver le nombre de tirages successifs, sans remise, possibles de 3 boules dans une urne qui comporte 9 boules numérotées de 1 à 9.

Théorème 2 : Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble de n éléments est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Par convention, on a : $A_n^0 = 1$

Exemples :

1) Le nombre de tiercés dans l'ordre avec 20 chevaux au départ est de :

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$$

2) Le nombre de bureaux éligibles de 4 personnes d'une association de 30 membres est de :

$$A_{30}^4 = 30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657\,720$$

3) Le nombre de tirages successifs, sans remise, de 3 boules dans une urne comportant 9 boules numérotées de 1 à 9 est de :

$$A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

1.3 p-liste

Définition 4 : Une p-liste est une liste de p éléments distincts ou non d'un ensemble E de n éléments.

Remarque : Une p-liste peut être associée à p tirages successifs avec remise dans une urne qui contient n éléments.

Exemples :

1. Trouver le nombre de codes possibles à 4 chiffres pour une carte bancaire.
2. Trouver le nombre de numéros de téléphone portable possible (numéro commançant par 06).
3. Trouver le nombre de résultats possibles lorsque l'on lance un dé à jouer trois fois de suite.
4. Trouver le nombre de choix possibles pour ranger 5 paires de chaussettes dans trois tiroirs.

Théorème 3 : Le nombre de p-liste dans un ensemble E à n éléments est égal à :

$$n^p$$

Exemples :

1) Le nombre de code à 4 chiffres pour une carte bancaire est de : $10^4 = 10\,000$

2) Le nombre de numéros de téléphone portable possibles (06 plus 8 chiffres) est de : $10^8 = 1\,000\,000$
3) Le nombre de résultats possibles lorsque l'on lance un dé à jouer 3 fois de suite est de : $6^3 = 216$.
4) Le nombre de rangements possibles de 5 paires de chaussetes dans trois tiroirs (il peut y avoir un ou 2 tiroir(s) vide(s)) est de : $3^5 = 243$

2 Combinaison

2.1 Définition

Définition 5 : Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

Remarque : Dans une combinaison, contrairement à une liste l'ordre n'intervient pas. On peut alors associer une combinaison à un tirage simultanée de p éléments dans une urne qui en contient n.

Exemples :

1) Soit un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Les combinaisons de 2 éléments de E sont :

$$\{a, b\} \quad , \quad \{a, c\} \quad , \quad \{a, d\} \quad , \quad \{b, c\} \quad , \quad \{b, d\} \quad , \quad \{c, d\}$$

2) Trouver le nombre de délégations de 4 personnes que l'on peut désigner dans un groupe de 15 personnes.
3) Trouver le nombre de mains de 5 cartes possibles avec un jeu de 32 cartes.
4) Trouver le nombre de poignées de main échangées si toutes les personnes d'un groupe de 18 se saluent de cette façon.

2.2 Nombre de combinaisons

Théorème 4 : Le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble E de n éléments ($0 \leqslant p \leqslant n$) est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On prononce $\binom{n}{p}$: « C n p ».

Exemples :

1) Le nombre de délégations de 4 personnes que l'on peut désigner dans un groupe de 15 personnes est :

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2} = 1365$$

2) Le nombre de mains de 5 cartes possibles avec un jeu de 32 cartes est de (avec la calculatrice) :
$$\binom{32}{5} = 201\,376$$

3) le nombre de poignées de mains échangées dans un groupe de 18 personnes est de :
$$\binom{18}{2} = \frac{18 \times 17}{2} = 153$$

Il est bon de se familiariser avec cette formule dans un premier temps

- $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

- $\binom{12}{8} = \dfrac{12!}{8!(12-8)!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495$

- $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} = \dfrac{7!}{5!2!} \times \dfrac{6!3!}{9!} = \dfrac{7!6!3!}{5!2!9!} = \dfrac{7! \times 6 \times 5! \times 3 \times 2}{5! \times 2 \times 7! \times 8 \times 9} = \dfrac{1}{4}$

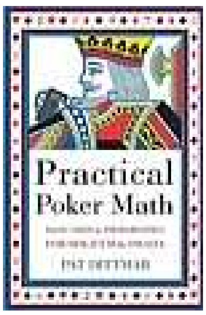
- Trouver n pour que : $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

  On obtient alors :
$$\begin{aligned}
&3 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 14 \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&\frac{(n-2)(n-3)}{4} = 14 \\
&n^2 - 3n - 2n + 6 = 56 \\
&n^2 - 5n - 50 = 0
\end{aligned}$$

  On calcule $\Delta = 225 = 15^2$, on trouve alors la solution $n = 10$

2.3 Un exemple : le jeu de cartes

On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes (du 7 à l'as). Combien y-a-t-il de mains contenant :



1) *Le valet de trèfle ?*
2) *Exactement deux cœurs ?*
3) *Exactement un roi, une dame et deux valet ?*
4) *Ni le roi de trèfle, ni un pique ?*
5) *Au moins un roi ?*
6) *L'as de pique et au moins deux trèfles ?*
7) *Exactement un roi et deux carreaux ?*

Pour résoudre ce type d'exercice, il est important de réaliser une partition de ce jeu de 32 cartes.

Définition 6 : On appelle partition d'un ensemble E, un ensemble de sous-ensembles E_i deux à deux disjoints dont l'union est cet ensemble E

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p = E \quad \text{et} \quad \forall (i,j)\ E_i \cap E_j = \varnothing$$

1) On réalise la partition composée du valet de trèfle et des 31 autres cartes.

1 Valet de trèfle	31 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{1}{1}\binom{31}{4} = 31\ 465$$

2) On sépare les cœurs des autres cartes.

8 cœurs	24 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{8}{2}\binom{24}{3} = 56\ 672$$

3) On sépare les rois, les dames, les valets des autres cartes.

4 rois	4 dames	4 valets	20 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{20}{1} = 1\ 920$$

4) On sépare le roi de trèfle et les piques des autres cartes.

1 roi de trèfle	8 piques	23 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{1}{0}\binom{8}{0}\binom{23}{5} = 33\ 649$$

5) Ici, une astuce consiste à passer par la combinaison contraire « aucun roi ». On soustrait ensuite le nombre totale de mains possibles avec le nombre de combinaisons contraires

4 rois	28 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{32}{5} - \binom{4}{0}\binom{28}{5} = 103\,096$$

6) On doit ici sommer les différentes possibilités : avoir l'as de pique avec 2 trèfles, l'as de pique avec 3 trèfles et l'as de pique avec 4 trèfles :

1 as de pique	8 trèfles	23 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{1}{1}\left[\binom{8}{2}\binom{23}{2} + \binom{8}{3}\binom{23}{1} + \binom{8}{4}\binom{23}{0}\right] = 8\,442$$

7) Ici deux choix se présentent : soit on a le roi de carreau et 1 carreau supplémentaire soit on a un roi (non de carreau) et deux carreaux.

1 roi de carreau	3 autres rois	7 autres carreaux	21 autres cartes

On obtient alors le nombre de combinaisons :

$$\binom{1}{1}\binom{3}{0}\binom{7}{1}\binom{21}{3} + \binom{1}{0}\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2} = 22\,540$$

3 Résumé des situations

3.1 Critères à retenir

Les critères sont : les éléments peuvent-ils être répétés ? L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On peut résumer les différentes réponses par le tableau suivant :

Critères	Les éléments peuvent être répétés	Les éléments sont distincts
On tient compte de l'ordre	Utiliser des p-listes	Utiliser des arrangements
On ne tient pas compte de l'ordre	Hors programme !	Utiliser des combinaisons

3.2 Exemples

1) ***Le loto*** *: on tire, au hasard, 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ? (On ne tient pas compte du numéro complémentaire)*

➪ Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro lors d'un tirage ?
Non ! Donc les éléments sont distincts.

- ➪ L'ordre d'apparition des différents numéros a-t-il de l'importance ?
  Non ! On considère les six numéros globalement ! Donc l'ordre n'a pas d'importance.

  Nous devons donc utiliser les combinaisons !

2) ***La course et le podium*** *: dans une course de 100m, il y a huit partants numérotés de 1 à 8. Sur le podium, il y aura les trois médaillés (or - argent - bronze). Combien y a-t-il de podiums possibles ?*

   - ➪ Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro sur un podium ?
     Non ! Un même coureur ne peut pas être à la fois médaillé d'or et d'argent ! Donc les éléments sont distincts.
   - ➪ L'ordre d'apparition des différents numéros sur le podium a-t-il de l'importance ?
     Oui ! Car les médailles sont différentes. Autrement dit l'ordre est ici déterminant.

     Nous devons donc utiliser les arrangements !

3.3 Combinaisons

Quand on utilise plusieurs combinaisons, faut-il additionner ou multiplier ? Cela dépend de la situation !

Concrètement :

- ➪ Si les différentes étapes sont reliées par un "**et**", on **multiplie**.
- ➪ Si les différents cas sont reliés par un "**ou**", on **additionne**.

4 Formules

4.1 Formules relatives aux combinaisons

Théorème 5 : Pour tous n et p, tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3) $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

4) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstration : Les 2 premières formules sont immédiate.

Formule 3 : Choisir p éléments dans un ensemble E qui en compte n revient à ne pas choisir $(n-p)$ élements dans E (le complémentaire). Leur nombre est donc identique.

Formule 4 : Peut se démontrer de deux façon différente : soit à l'aide de la formule des combinaisons, soit à l'aide de la partition de l'ensemble E

1) A l'aide de la formule des combinaisons :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

On met au même dénominateur

$$\begin{aligned} &= \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(p-n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

2) On considère un ensemble E de n éléments. Soit a un élément de E. Considérons les sous ensembles de E à p éléments. Il y en a donc :

$$\binom{n}{p}$$

Parmi ces sous-ensembles, ceux qui contiennent a sont au nombre de :

$$\binom{1}{1}\binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}$$

Parmi ces sous-ensembles, ceux qui ne contiennent pas a sont au nombre de :

$$\binom{1}{0}\binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p}$$

On a donc bien :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Exemple : Calculer $\binom{7}{5}$.

D'après la série (1), on a :

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Exemple : Calculer $\binom{7}{1} + \binom{7}{2}$.

D'après la série (2), on a :

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

4.2 Triangle de Pascal

Grâce à la dernière série de formules, on peut remplir le tableau suivant, appelé **triangle de Pascal**

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

On a pour les cases rouges :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} \quad \text{ce qui donne} \quad 4 + 6 = 10$$

4.3 Le binôme de Newton

Théorème 6 : Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Soit encore :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$$

Exemple : Developper $(x-1)^7$ et $(i+1)^6$.

D'après le binôme de Newton et le triangle de Pascal ci-dessus, on a :

$$(x-1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$$

$$\begin{aligned}(i+1)^6 &= i^6 + 6i^5 + 15i^4 + 20i^3 + 15i^2 + 6i + 1 \\ &= -1 + 6i + 15 - 20i - 15 + 6i + 1 \\ &= -8i\end{aligned}$$

Démonstration : Par récurrence :

Initialisation :

➪ pour $n=1$, on a : $\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b=(a+b)^1$

➪ pour $n=2$, on a : $\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

On retrouve bien la formule aux rangs $n=1$ et $n=2$ (pour $n=0$ immédiat)

Hérédité :

➪ On admet que l'on a : $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}\,b^p$

➪ Montrons que : $(a+b)^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^{n+1-p}\,b^p$

On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&= a\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}\,b^p \;+\; b\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}\,b^p\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}\,b^{p+1}\\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}a^{n-p}\,b^{p+1} \;+\; b^{n+1}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on change $p \to p+1$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}a^{n-(p-1)}\,b^p \;+\; b^{n+1}\\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; b^{n+1}\\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{p=1}^{n}\left[\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}\right]a^{n+1-p}\,b^p \;+\; b^{n+1}
\end{aligned}$$

D'après la formule sur les combinaisons, on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} \;+\; \sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p}a^{n+1-p}\,b^p \;+\; \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\
&= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^{n+1-p}\,b^p
\end{aligned}$$

D'après l'initialisation et l'hérédité, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$$

Application : Nombre de sous-ensemble d'un ensemble E.

Soit un ensemble E qui contient n éléments.
Nous avons vu que le nombre de sous-ensemble à p éléments est égal à :

$$\binom{n}{p}$$

Le nombre de sous-ensemble - c'est à dire de 0 à n éléments - est donc de :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

or si l'on calcule :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} 1^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

Théorème 7 : Le nombre de sous-ensembles que l'on peut former à partir d'un ensemble E à n éléments est égal à :

$$2^n$$