DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS

H. Hocquard

HSE 2016-2017

Probabilités vs Statistiques

Exemple introductif

Un joueur parie sur le lancer d'un dé, s'il a raison il gagne la valeur de la face en euros, sinon il ne gagne rien. Que vaut-il mieux parier ?

- Y répondre : faire des **probabilités**.
- Analyser les fréquences : faire des **statistiques**.

Notion d'ensemble

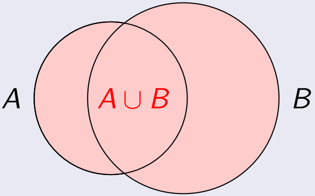
Définition

- Un **ensemble** est une collection d'objets appelés éléments. Ensemble des résultats possibles d'un lancé de dé : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- F est une **partie** (ou est inclus, ou est un sous-ensemble) de E si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. Cela se note $F \subset E$.
- On note $\emptyset$ **l'ensemble vide** : l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Dans la suite, E, A et B seront trois sous-ensembles d'un ensemble Ω.

Définition

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux est appelé **union** de A et B, noté $A \cup B$.

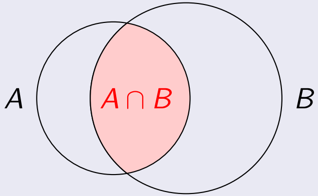


$$A \cup B = \left\{ x \in E \mid x \in A \ \text{ ou } \ x \in B \right\}$$

Notion d'ensemble : l'intersection

Définition

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B est appelé **intersection** de A et B, noté $A \cap B$.

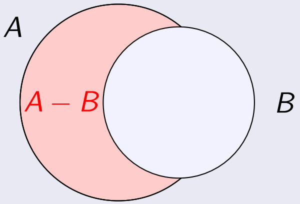


$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Notion d'ensemble : la différence

Définition

L'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé **différence** de A et B, noté $A - B$ ou $A \setminus B$.

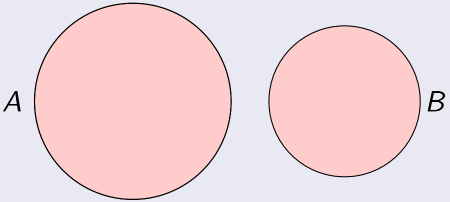


$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}$$

Notion d'ensemble : l'incompatibilité

Définition

Deux ensembles A et B sont **disjoints** ou **incompatibles** s'ils n'ont aucun élément en commun.

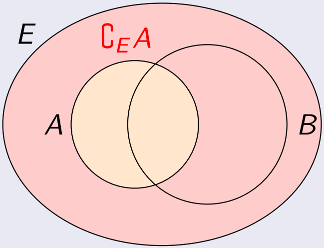


$$A \cap B = \emptyset$$

Notion d'ensemble : le complémentaire

Définition

L'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A est le **complémentaire** de A dans E noté $\bar{A}$, alors $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.



$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Notion d'ensemble : le produit cartésien

Définition

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est appelé **produit cartésien** de E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$.

Notion d'ensemble : le produit cartésien

Définition

L'ensemble de tous les couples d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est appelé **produit cartésien** de E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$.

Exemple

Attention car $E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1$ comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

Dénombrement

Définition

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé **cardinal** de E, noté $Card(E)$ ou $|E|$.

Dénombrement

Définition

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé **cardinal** de E, noté $Card(E)$ ou $|E|$.

Exemple

Si $A = \{1; 2; 3; a; b; c\}$ alors $Card(A) = 6$.

Dénombrement : Formules générales

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis.

$$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) - Card(E_1 \cap E_2)$$

$$Card(E_1 \times E_2) = Card(E_1) * Card(E_2)$$

Dénombrement : Principe fondamental

Proposition

Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si, pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences prises ensemble.

Dénombrement : Principe fondamental

Proposition

Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si, pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences prises ensemble.

Remarque

Ce principe se généralise facilement à plusieurs expériences.

Dénombrement : Principe fondamental

Proposition

Supposons qu'il faille réaliser deux expériences. Si l'expérience 1 peut produire l'un quelconque de m résultats et si, pour chacun d'entre eux, il y a n résultats possibles pour l'expérience 2, alors il existe $m \times n$ résultats pour les deux expériences prises ensemble.

Remarque

Ce principe se généralise facilement à plusieurs expériences.

Exercice

Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés "père et fils exemplaires", combien y a-t-il de choix différents possibles ?

Dénombrement : problème de placement

Problématique

On souhaite répondre à la question suivante : combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments.

Dénombrement : problème de placement

Problématique

On souhaite répondre à la question suivante : combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments.
Ce nombre est différent selon que l'on autorise ou non les répétitions (prendre plusieurs fois le même élément) et que l'on tienne compte ou pas de l'ordre des éléments.

Dénombrement : problème de placement

Problématique

On souhaite répondre à la question suivante : combien y a-t-il de façons de construire un ensemble de p éléments pris dans un ensemble de n éléments.
Ce nombre est différent selon que l'on autorise ou non les répétitions (prendre plusieurs fois le même élément) et que l'on tienne compte ou pas de l'ordre des éléments.
Il y a quatre possibilités classiques et un cas particulier.

Dénombrement : les p-listes

Nombre de tirages avec remise et avec ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et avec ordre.

Nombre de tirages avec remise et avec ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est alors n^p.

Nombre de tirages avec remise et avec ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est alors n^p.

Exemple

Si $E = \{a, b, c, d, e\}$, alors il y a $5^3 = 125$ mots de 3 lettres.

Dénombrement : les arrangements

Nombre de tirages sans remise et avec ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et avec ordre.

Dénombrement : les arrangements

Nombre de tirages sans remise et avec ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $A_n^p = n * (n-1) * ... * (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Dénombrement : les arrangements

Nombre de tirages sans remise et avec ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et avec ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $A_n^p = n * (n-1) * ... * (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exercice

Avec les lettres A,B et C, combien y-a-t-il de façons de former des paires de lettres distinctes ?

Dénombrement : les combinaisons

Nombre de tirages sans remise et sans ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et sans ordre.

Dénombrement : les combinaisons

Nombre de tirages sans remise et sans ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Dénombrement : les combinaisons

Nombre de tirages sans remise et sans ordre

Soient E un ensemble fini à n éléments et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

- Dans une urne à n boules, on tire p boules sans remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.
De combien de manières peut-il répondre ?

Dénombrement : les combinaisons

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.

Dénombrement : les combinaisons

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Dénombrement : les combinaisons

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$.
- Pour $1 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

Dénombrement : les combinaisons

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^p = 0$ si $p > n$.
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- $C_n^p = C_n^{n-p}$.
- Pour $1 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le triangle de Pascal

Dénombrement : les p-suites

Nombre de tirages avec remise et sans ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et sans ordre.

Nombre de tirages avec remise et sans ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p}$.

Dénombrement : les p-suites

Nombre de tirages avec remise et sans ordre

- Dans une urne à n boules, on tire p boules avec remise et sans ordre.
- Le nombre de tirages différents est : $C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p}$.

Exercice

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Combien de couples distincts peut-on créer ?
Les couples $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont identiques.

Dénombrement : les permutations d'objets distinguables

Proposition

Le nombre de permutations de n objets est $n! = A_n^n$.

Proposition

Le nombre de permutations de n objets est $n! = A_n^n$.

Exercice

De combien de manières peut-on disposer 6 livres (distincts) sur une étagère ?

Dénombrement : les permutations d'objets partiellement distinguables

Proposition

Il y a

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

permutations différentes de n objets parmi lesquels les n_i $(1 \leq i \leq r)$ sont indistinguables entre eux.

Dénombrement : les permutations d'objets partiellement distinguables

Proposition

Il y a

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

permutations différentes de n objets parmi lesquels les n_i ($1 \leq i \leq r$) sont indistinguables entre eux.

Exercice

Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 4 Français, 3 Américains, 2 Anglais et un Brésilien. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leur identité, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elle ?

Dénombrement : en résumé

	avec ordre	sans ordre
avec répétitions	n^p	$C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p}$
sans répétitions	A_n^p	$C_n^p = \binom{n}{p}$

Probabilités : Vocabulaire

Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience donnant un résultat que l'on ne peut prévoir à l'avance. Par exemple, lancer un dé.

Probabilités : Vocabulaire

Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience donnant un résultat que l'on ne peut prévoir à l'avance. Par exemple, lancer un dé.
- **Ensemble fondamental** Ω : ensemble de tous les résultats possibles. Ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Probabilités : Vocabulaire

Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience donnant un résultat que l'on ne peut prévoir à l'avance. Par exemple, lancer un dé.
- **Ensemble fondamental** Ω : ensemble de tous les résultats possibles. Ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Évènements élémentaires** : sous-ensembles de Ω contenant un seul résultat possible. Ici les évènements élémentaires sont donc $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.

Probabilités : Vocabulaire

Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience donnant un résultat que l'on ne peut prévoir à l'avance. Par exemple, lancer un dé.
- **Ensemble fondamental** Ω : ensemble de tous les résultats possibles. Ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Évènements élémentaires** : sous-ensembles de Ω contenant un seul résultat possible. Ici les évènements élémentaires sont donc $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.
- **Évènement** : sous-ensemble de Ω. Si par exemple E est l'évènement "obtenir un résultat pair", alors $E = \{2, 4, 6\}$.

Probabilités : Vocabulaire

Définitions

- Si E est un évènement, son complémentaire $\bar{E}$ est l'**évènement contraire**. Ici $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$ c'est-à-dire "obtenir un résultat impair".

Définitions

- Si E est un évènement, son complémentaire $\bar{E}$ est l'**évènement contraire**. Ici $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$ c'est-à-dire "obtenir un résultat impair".
- Deux évènements E_1 et E_2 sont **incompatibles** ou **disjoints** si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Par exemple "obtenir un 4 ou un 6" et "obtenir un résultat impair" sont deux évènements incompatibles.

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout évènement E associe ses “chances” de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout évènement E associe ses “chances” de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- **Axiome 1** : $\mathbb{P}(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout évènement E associe ses "chances" de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- **Axiome 1** : $\mathbb{P}(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- **Axiome 2** : Pour l'évènement certain, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  Pour l'évènement impossible, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout évènement E associe ses “chances” de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- **Axiome 1** : $\mathbb{P}(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- **Axiome 2** : Pour l'évènement certain, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  Pour l'évènement impossible, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- **Axiome 3 (Axiome d'additivité)** : Si E_1 et E_2 sont deux évènements incompatibles ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2).$$

Probabilités : concept général

Définition

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction qui à tout évènement E associe ses "chances" de se réaliser $\mathbb{P}(E)$ et qui vérifie les axiomes suivants :

- **Axiome 1** : $\mathbb{P}(E)$ est un réel compris entre 0 et 1.
- **Axiome 2** : Pour l'évènement certain, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  Pour l'évènement impossible, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- **Axiome 3 (Axiome d'additivité)** : Si E_1 et E_2 sont deux évènements incompatibles ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2).$$

  Plus généralement si (E_i) est une suite d'évènements deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}(\bigcup_i E_i) = \sum_i \mathbb{P}(E_i)$.

Probabilités : Propriétés

Proposition

E_1 et E_2 sont deux évènements quelconques :

- $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$.

Probabilités : Propriétés

Proposition

E_1 et E_2 sont deux évènements quelconques :

- $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$.
- $\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.

Équiprobabilité

Définition

On dit qu'on est dans le cas d'équiprobabilité quand l'espace fondamental Ω est **fini** et que tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Alors pour tout évènement E,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}.$$

Équiprobabilité

Définition

On dit qu'on est dans le cas d'équiprobabilité quand l'espace fondamental Ω est **fini** et que tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Alors pour tout évènement E,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}.$$

Exemple

On lance deux fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ?

Équiprobabilité : Exemple en considérant l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

Équiprobabilité : Exemple en considérant l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

$$\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Équiprobabilité : Exemple sans considérer l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	{**1,1**}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2		{**2,2**}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3			{**3,3**}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4				{**4,4**}	{4,5}	{4,6}
5					{**5,5**}	{5,6}
6						{**6,6**}

Équiprobabilité : Exemple sans considérer l'ordre

dé	1	2	3	4	5	6
1	**{1,1}**	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2		**{2,2}**	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3			**{3,3}**	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4				**{4,4}**	{4,5}	{4,6}
5					**{5,5}**	{5,6}
6						**{6,6}**

$$\mathbb{P}(E) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Notation "standard" : $A \perp\!\!\!\perp B$.

Indépendance

Définition : Indépendance

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Notation "standard" : $A \amalg B$.

Remarque

Pour savoir si 2 évènements sont indépendants, il faut calculer séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Indépendance : exemple

Exemple

On joue 2 fois au P ou F de manière indépendante avec une pièce équilibrée *(tout évènement relatif au premier lancé est indépendant d'un évènement relatif au 2ème lancé)*.

Indépendance : exemple

Exemple

On joue 2 fois au P ou F de manière indépendante avec une pièce équilibrée *(tout évènement relatif au premier lancé est indépendant d'un évènement relatif au 2ème lancé)*.
Alors on a :

$$\mathbb{P}(\text{ P au 1}^{\text{er}}\text{ lancé ET P au 2}^{\text{ème}}\text{ lancé })$$

Indépendance : exemple

Exemple

On joue 2 fois au P ou F de manière indépendante avec une pièce équilibrée *(tout évènement relatif au premier lancé est indépendant d'un évènement relatif au 2ème lancé)*.

Alors on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{ P au } 1^{\text{er}} \text{ lancé ET P au } 2^{\text{ème}} \text{ lancé }) \\ = \; & \mathbb{P}(\text{ P au } 1^{\text{er}} \text{ lancé }) \times \mathbb{P}(\text{ P au } 2^{\text{ème}} \text{ lancé }) \\ = \; & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \; & \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue.

Non indépendance : exemple

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient
- $A = \{\text{le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6}\}$ et $B = \{\text{le chiffre de la face obtenue est pair}\}$.
- A et B sont ils indépendants ?

Non indépendance : exemple

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient
- $A = \{$le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et $B = \{$le chiffre de la face obtenue est pair$\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Non indépendance : exemple

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient
- $A = \{$le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6$\}$ et $B = \{$le chiffre de la face obtenue est pair$\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap B)\\
&= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6}\\
&\qquad\qquad \textit{ET} \text{ un nombre pair})\\
&= \mathbb{P}(\text{obtenir 6})\\
&= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\\
&\mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6})\\
&\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\text{obtenir un nombre pair})\\
&= \mathbb{P}(\text{obtenir 6}) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 2, 4 ou 6})\\
&= \tfrac{1}{6} \times \tfrac{3}{6}\\
&= \tfrac{1}{12}
\end{aligned}$$

Non indépendance : exemple

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient
- $A = \{\text{le chiffre de la face obtenue est un multiple de 6}\}$ et $B = \{\text{le chiffre de la face obtenue est pair}\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6} \\ &\qquad\qquad \textit{ET} \text{ un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6}) \\ &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ & \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de 6}) \\ &\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\text{obtenir un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir 6}) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 2, 4 ou 6}) \\ &= \tfrac{1}{6} \times \tfrac{3}{6} \\ &= \tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$,

Non indépendance : exemple

Exemple

- On lance un dé équilibré une fois et on note le chiffre de la face obtenue. Soient
- $A = \{\text{le chiffre de la face obtenue est un multiple de } 6\}$ et $B = \{\text{le chiffre de la face obtenue est pair}\}$.
- A et B sont ils indépendants ? On calcule séparément $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de } 6 \\ &\qquad\qquad ET \text{ un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir } 6) \\ &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ &\mathbb{P}(\text{obtenir un multiple de } 6) \\ &\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\text{obtenir un nombre pair}) \\ &= \mathbb{P}(\text{obtenir } 6) \times \mathbb{P}(\text{obtenir } 2,\ 4 \text{ ou } 6) \\ &= \tfrac{1}{6} \times \tfrac{3}{6} \\ &= \tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

Probabilités conditionnelles

Définition

- Probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Probabilités conditionnelles

Définition

- Probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Conséquence : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$.

Probabilités conditionnelles

Définition

- Probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Conséquence : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$.

Exercice

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours du jet unique d'un dé sachant que le résultat obtenu est impair ?

Probabilités conditionnelles

Définition

- Probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Conséquence : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$.

Exercice

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours du jet unique d'un dé sachant que le résultat obtenu est impair ?

Propriété

Si A et B sont indépendants alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
C'est-à-dire $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$: la réalisation d'un évènement n'affecte pas la réalisation du second.

Probabilités conditionnelles

Propriété (Formule de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Probabilités conditionnelles

Propriété (Formule de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Définition

On dit qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset\,;\ \forall i \neq j \in I$) et qu'ils recouvrent Ω ($\cup_{i\in I} A_i = \Omega$).

Probabilités conditionnelles

Propriété (Formule de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Définition

On dit qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$; $\forall i \neq j \in I$) et qu'ils recouvrent Ω ($\cup_{i \in I} A_i = \Omega$).

Proposition (Formule des probabilités totales)

Pour toute partition $(A_i)_{i \in I}$ et tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i)$$

Probabilités conditionnelles

Remarque

En couplant la formule de Bayes et la formule des probabilités totales à la partition $(B; \bar{B})$, on obtient une version très utile en pratique de la formule de Bayes suivante :

Probabilités conditionnelles

Remarque

En couplant la formule de Bayes et la formule des probabilités totales à la partition $(B; \bar{B})$, on obtient une version très utile en pratique de la formule de Bayes suivante :

Propriété (Formule de Bayes reformulée)

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B}).\mathbb{P}(\bar{B})}$$

Exercice

En Europe occidentale, 5% des garçons et $0,25\%$ des filles naissent daltoniens. 51% des naissances concernent des garçons.

1. Quelle est la proportion de garçons dans la population des bébés daltoniens ?
2. Quelle est la proportion d'enfants daltoniens ?

Probabilités conditionnelles

Exercice

En Europe occidentale, 5% des garçons et $0,25\%$ des filles naissent daltoniens. 51% des naissances concernent des garçons.

1. Quelle est la proportion de garçons dans la population des bébés daltoniens ?
2. Quelle est la proportion d'enfants daltoniens ?

Un coup de pouce ...

En Europe occidentale, parmi les garçons 5% sont daltoniens et parmi les filles $0,25\%$ naissent daltoniennes.

Références

Walter Apple
Probabilités pour les non-probabilistes
H&K, édition, 2013

Clément Rau
http ://www.math.univ-toulouse.fr/ rau/
Communication privée, 2015