Exercices de dénombrement

Exercice 1

En turbo Pascal, un entier relatif (type integer) est codé sur 16 bits. Cela signifie que l'on réserve 16 cases mémoires contenant des "0" ou des "1" pour écrire un entier.

1) La première case étant réservée au signe, combien peut-on écrire d'entiers positifs.

Il s'agit de placer des 0 et des 1 sur quinze places (que l'on peut numéroter de 1 à 15).
Tout placement (donc tout entier positif) correspond donc à une application de l'ensemble $[\![1,15]\!]$ dans l'ensemble $\{0,1\}$.
Il y a $2^{15} = 32768$ nombres positifs possibles.

2) En déduire combien on peut écrire de nombres du type "integer".

On a une case de plus qui peut prendre la valeur 0 ou 1. Tout nombre est alors codée sur 16 cases. Il correspond donc à une application de l'ensemble $[\![1,16]\!]$ dans l'ensemble $\{0,1\}$.
Il y a donc $2^{16} = 65536$ nombres possibles a priori.
Toutefois le nombre dont le symbole du signe est 0 et qui ne contient que des 0 correspond à l'entier 0, mais c'est également le cas du nombre s'écrivant avec un 1 et que des 0. Le même nombre est donc codée de deux façons différentes.
On a donc : 65536 – 1 = 65535 nombres du type « integer ».

3) Les entiers du type "longint" sont codés sur 32 bits, le premier bit étant réservé au signe. Combien peut-on écrire d'entiers de ce type ?

En raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve $2^{32} - 1 = 4294967295$ entiers du type « longint » possibles.

Exercice 2

Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie, 2 d'anglais.
Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1) De combien de façon peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?

S'il ne tient pas compte des disciplines, il a autant de façon de ranger ces 14 livres que de façons de ranger 14 objets distinct quelconques, c'est-à-dire 14! = 87178291200

2) De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie, puis ceux de math, et enfin ceux de philo ?

Le rangement se déroule selon quatre étapes successives : il a 2 ! façons de ranger les livres d'anglais, puis 5 ! façons de ranger les livres d'économie, puis 4 ! façons de ranger les livres de math et enfin 3 ! de ranger les livres de philosophie.
Il y a donc : $2! * 5! * 4! * 3! = 34560$ rangements de ce type.

3) De combien de façon peut-il le faire s'il range les livres par matière ?

Il faut prévoir une cinquième étape à la procédure de la question précédente. Une fois les rangements effectués dans chaque matière, il faut « ranger » les disciplines dans un ordre donné. Il y a 4 ! façons de le faire.
On a donc : $2! * 5! * 4! * 3! * 4! = 829440$ rangements de ce type.

Exercice 3

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.

1) Combien de mains contiennent 3 rois ?

Par convention parler d'une main de 3 rois, c'est parler d'une main d'exactement 3 rois.
Pour dire qu'il peut y avoir 3 rois ou plus, on dira que l'on a une mains contenant au moins 3 rois.
On se place dans la position du « tricheur » : je veux distribuer à quelqu'un une main contenant exactement trois rois et deux cartes autres que des rois. Je choisis donc trois rois parmi les quatre possibles, puis deux cartes parmi les 28 cartes restantes. On a d'après la règle du produit $\binom{4}{3}\binom{28}{2} =$ 1512 mains possibles.

2) Combien de mains contiennent 3 piques ?

Même raisonnement que dans la question précédente : on choisit 3 piques parmi 8, puis 2 cartes parmi les 24 restantes. Il y a $\binom{8}{3}\binom{24}{2} =$ 15456 mains possibles.

3) Combien de mains contiennent 3 cartes de même hauteur ?

Dans un jeu de 32 cartes, il y a huit hauteurs possibles. On doit d'abord choisir l'une de ces hauteurs. Il y a $\binom{8}{1} = 8$ façons de le faire, puis on procède comme dans les deux questions précédentes. On aura donc
$8 \times 1512 =$ 12096 mains possibles.

4) Combien de mains contiennent 3 cartes de la même couleur ?

Même raisonnement que dans la question précédente, mais on choisit d'abord une couleur parmi les 4 possibles. On a donc $4 \times 15456 =$ 61824 mains possibles.

5) Combien de mains contiennent 2 valets et 3 cartes de hauteurs différentes (on dit alors que l'on a une paire de valets) ?

Pour distribuer un main de ce type, on doit prendre deux valets parmi les quatre possibles, puis choisir les trois hauteurs parmi les sept possibles dont seront extraites chacune des trois cartes et enfin pour chacun e des hauteurs choisis, prendre une carte parmi les quatre possibles. Il y a donc :
$\binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} =$ 21504 mains possibles.

6) Combien de mains contiennent une paire et seulement une paire (2 cartes de même hauteur, et trois cartes de hauteurs différentes) ?

Dans cette situation on doit ajouter une étape à la procédure de la question précédente : choisir la hauteur de la paire. On a 8 possibilités.
On a donc $8\binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} =$ 172032 mains possibles.

7) Combien de mains contiennent deux paires ?

On commence par choisir les hauteurs des deux paires. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de le faire. Puis dans chacune des hauteurs choisies, on prend deux cartes parmi 4. Enfin il reste à prendre une carte parmi les 24 restantes.
On a donc $\binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1} =$ 24192 mains possibles.

8) On dit qu'une main contient un brelan si elle contient trois cartes de même hauteur et deux autres cartes ne formant pas une paire
   Combien de mains contiennent un brelan de rois ?

Il s'agit ici de choisir 3 rois parmi 4. On choisis ensuite deux hauteurs parmi les sept restantes puis pour chacune d'elles une carte parmi 4. On a donc
$\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 1344$ mains possibles.

9) Combien de mains contiennent un brelan ?

On doit ajouter une étape à la question précédente : choisir la couleur du brelan. Il y a 8 façons de la faire.
On a donc $8 \times 1344 = 10752$ mains possibles.

10) On dit qu'une main contient un full si elle contient un brelan et une paire. Combien de mains contiennent des fulls ?

On doit choisir la hauteur du brelan. Il y a 8 façons de le faire. Puis celle de la paire : il y a 7 façons de le faire.
On doit ensuite choisir 3 cartes parmi 4 dans la hauteur du brelan, et deux cartes parmi 4 dans celle de la paire.
On a donc $8 \times 6 \times \binom{4}{3}\binom{4}{2} = 1344$ mains possibles

Exercice 4

Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres.

1) Donner le nombre d'abonnés potentiels puis le nombre d'abonnés avec code composés de huit chiffres différents.

Toute liste ordonnée sans répétition (puisque les chiffres sont différents) de 8 chiffres parmi les 10 possibles peut être un code.
Un code correspond donc à un arrangement 8 éléments dans un ensemble de 10 éléments.
Il y a donc $A_{10}^{8} = \dfrac{10!}{(10-8)!} = 1814400$ codes possibles.

2) Calculer le nombre de codes à 2 chiffres différents, l'un étant utilisé 1 fois et l'autre 7 fois.

Pour construire un tel code on doit d'abord choisir le chiffre qui ne sera utilisé qu'une fois, puis celui qui sera utilisé 7 fois. On a 10 choix pour le premier, puis 9 choix pour le second. On doit ensuite choisir la place du chiffre qui n'apparaît qu'une fois. Il y a 8 positions possibles.
Il y a donc $10 \times 9 \times 8 = 720$ codes possibles.

3) Même question avec 3 chiffres différents, dont 2 sont utilisés une fois et le troisième 6 fois.

On choisit d'abord le chiffre qui apparaît 6 fois. Il y a 10 choix possibles.
Les chiffres qui n'apparaissent qu'une fois ont des rôles identiques : on ne les différencie pas. Donc on choisit deux nombres parmi les neuf restant. Il y a $\binom{9}{2}$ façons de le faire.
On place l'un des deux nombres. Il y a 8 choix possibles, puis l'autre : il y a 7 choix possibles. Les places restantes correspondent au nombre qui apparaît 6 fois.
On a donc $10 \times \binom{9}{2} \times 8 \times 7 = 25920$ codes possibles.

Exercice 5

Neuf personnes se présentent à la médecine du travail pour passer la visite annuelle. Deux médecins les reçoivent. Le premier verra 5 personnes, le second 4.

1. De combien de façons différentes les neuf personnes peuvent-elles être réparties entre chaque médecin ?

En fait il s'agit de choisir 5 personnes pour le premier médecin, les quatre autres personnes étant alors automatiquement affectées au deuxième médecin. On a $\binom{9}{5} = 126$ façons d'effectuer ce choix.

2. Il y a 4 personnes portant des lunettes. De combien de façons différentes peut-on réaliser cette répartition, sachant que chaque médecin verra 2 personnes portant des lunettes ?

Cette fois-ci encore on ne s'intéresse qu'au premier médecin.
On choisit deux personnes parmi les quatre qui portent des lunettes, puis trois personnes parmi les cinq restantes.
On a donc $\binom{4}{2}\binom{5}{3} = 60$ choix possibles.

3. De plus, on veut que M. Durand qui porte des lunettes et M. Dupond qui n'en porte pas, soient examinés par le même médecin. Combien de répartitions sont possibles ?

On a affaire à la réunion de deux évènements disjoints : soit M Durand et M Dupond sont avec le premier médecin, soit ils sont avec le second.
S'ils sont avec le premier, on devra compléter le groupe par un porteur de lunettes sur les trois restants et par deux personnes sans lunettes sur les quatre restantes.
S'ils sont avec le deuxième médecin, le premier groupe est constitué par deux porteurs de lunettes sur les 3 restants et par trois personnes sur les 4 restantes.
On a donc au total $\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{3} = 18 + 12 = 30$ répartitions possibles.

Exercice 6

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

Il faut imaginer que les boules portent des numéros permettant de les différencier. Si nous supposons par exemple que les boules rouges portent les numéros de 1 à 5, il n'est pas pareil de tirer 1-1-3 que 2-2-2 alors qu'au résultat on a trois boules rouges.
Puisqu'il y a remise, il y a ordre. Un tirage est donc une application de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans un ensemble à 12 éléments. Il y a donc $12^3 = 1728$ tirages possibles

2. Calculer la probabilité :
   a) d'obtenir trois boules rouges ;

Chaque tirage a la même probabilité d'être obtenu. La probabilité d'un tirage est donc égale au nombre de cas favorables à ce tirage sur le nombre de cas possibles.
Un tirage de 3 boules rouges correspond à une application de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans un ensemble à 5 éléments. Il y a $5^3 = 125$ tirages de ce type.
Donc la probabilité cherchée est égale à :

$$p_1 = \frac{125}{1728}$$

b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;

Pour construire un tirage comprenant deux boules rouges exactement, on commence par choisir la place des deux boules rouges. Il y a $\binom{3}{2}$ façons de la faire.
Ensuite, on associe aux deux places choisies une des 5 boules rouges, ce qui revient à construire une application d'un ensemble de deux éléments dans un ensemble à 5 éléments. Il y a 5^2 applications de ce type.
Enfin on associe à la place libre une boule qui n'est pas rouge parmi les 7 boules restantes. Il y a bien sûr 7 façons de le faire.
On a donc $\binom{3}{2} \times 5^2 \times 7 = 525$ tirages avec exactement deux boules rouges.
On a donc

$$p_2 = \frac{525}{1728} = \frac{175}{576}$$

c) d'obtenir au moins une boule rouge ;

Plutôt que de chercher la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge, il vaut mieux chercher celle de l'évènement contraire : obtenir aucune boule rouge.
Il s'agit donc aux trois tirages de n'avoir que des boules noires ou vertes. Chaque tirage correspond alors à une application de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans un ensemble à 7 éléments. Il y a $7^3 = 343$ applications de ce type.
Donc la probabilité de n'obtenir aucune boule rouge est égale à $\frac{343}{1728}$.
Et donc la probabilité cherchée est égale à :

$$p_3 = 1 - \frac{343}{1728} = \frac{1385}{1728}$$

d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;

On a en raisonnant comme dans les questions précédentes : $\binom{3}{2}$ façons de placer les deux vertes, 3^2 choix pour associer à chaque place choisie une boule verte et 4 choix pour mettre une boule noire dans la place prévue. On a donc $\binom{3}{2} \times 3^2 \times 4 = 108$ tirages possibles.
On a donc

$$p_4 = \frac{108}{1728} = \frac{1}{16}$$

e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;

En reprenant ce que l'on a vu au a), on a 5^3 tirages de trois boules rouges, 3^3 tirages de trois boules vertes et 4^3 tirages de 3 boules noires.
Donc $5^3 + 3^3 + 4^3 = 216$ tirages de trois boules de même couleur.
On a donc

$$p_5 = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$$

f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

On a 3 ! façons de déterminer les places respectives des trois boules. Ensuite on a 5 façons de placer une boule rouge à sa place, 3 façons de placer une boule verte et 4 façons de placer une boule noire.
On a donc : $3! \times 5 \times 3 \times 4 = 360$ tirages possibles.
On a donc

$$p_6 = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}$$

Exercice 7

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1. On tire successivement sans remise trois boules dans l'urne.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Nous sommes dans une situation ressemblante à celle de l'exercice précédent si ce n'est que dans ce cas les tirages sont faits sans remises. Il ne s'agit donc plus d'applications, mais d'injections.

Il y a donc $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$ tirages possibles.

   b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?

On a $A_3^3 = 3! = 6$ façons de tirer les trois boules rouges sans remise.

On a donc

$$p_1 = \frac{6}{336} = \frac{1}{56}$$

   c) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

On choisit la place pour les deux rouges. Il y a $\binom{3}{2}$ façons de le faire. Chaque placement des boules rouges sur les places choisies est une injection d'un ensemble de 2 éléments dans un ensemble de 3 éléments. Il y a A_3^2 choix possibles. Il reste alors 5 possibilités de choisir une boule blanche que l'on placera à la place prévue.

On a donc $\binom{3}{2} \times A_3^2 \times 5 = 90$ tirages possibles.

On a donc

$$p_2 = \frac{90}{336} = \frac{15}{56}$$

2. Reprendre la première question, en supposant que les trois boules sont tirées simultanément. Comparer les résultats obtenus dans les deux questions.

Dans ce cas l'ordre ne compte pas. On tire trois boules parmi 8 boules. Il y a donc $\binom{8}{3} = 56$ tirages possibles.

Il y a $\binom{3}{3} = 1$ façons d'obtenir les trois rouges. Donc

$$p'_1 = \frac{1}{56}$$

Il y a $\binom{3}{2} \times 5 = 15$ façons d'obtenir une blanche et deux rouges.

On a donc

$$p'_2 = \frac{15}{56}$$

On remarque que l'on obtient les mêmes probabilités qu'à la première question.

Exercice 8

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la Communauté économique européenne (CEE).

Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit : " Paris, Madrid, Rome, Athènes " diffère du circuit : " Athènes, Rome, Paris, Madrid ".

1. Combien y a-t-il de circuits différents ?

Un circuit correspond à une 4-liste ordonnée sans répétition, c'est-à-dire à un arrangement de 4 villes parmi 12. Il y a donc $A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = 11880$ circuits différents possibles.

Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

2. Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit commence à Paris. (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

Un tel circuit correspond à un arrangement de trois villes parmi les 11 restantes. Il y a $A_{11}^3 =$ 990 circuits de ce type.
On a donc

$$p_1 = \frac{990}{11880} = \frac{1}{12}$$

3. Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

Il s'agit là d'une probabilité conditionnelle.
Combien y a-t-il de circuits commençant à Paris et comprenant Madrid et Rome ?
De tels circuits nécessitent de choisir une quatrième ville parmi les 9 restantes. Il y a bien sûr 9 façons de le faire. Puis de ranger les trois villes : Madrid, Rome et cette ville dans un ordre. Il y a 3 ! façons de le faire.
Il y a donc $9 \times 3! = 54$ circuits commençant à Paris et comprenant également Madrid et Rome.
Il y a 990 circuits commençant à Paris.
La probabilité pour qu'un circuit passe par Madrid et Rome sachant qu'il commence à Paris est égale

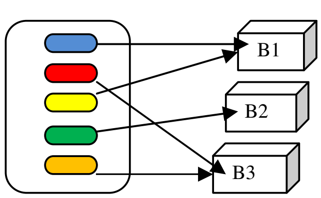
$$p_2 = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}$$

Exercice 9

On dispose de trois boîtes et de cinq craies de couleur bleue, rouge, jaune, verte et orange.

1) De combien de façons distinctes peut-on ranger les cinq craies dans les trois boîtes ?

IL s'agit de choisir pour chaque craie une boîte sachant que la même boîte peut contenir aucune craie ou plusieurs craies.
Chaque rangement est donc une application de l'ensemble des craies dans l'ensemble des boîtes.



Il y a $3^5 = 243$ rangements possibles.

2) Même question en laissant l'une des boîtes vides.

Il faut d'abord choisir la boîte que l'on laisse vide. Il y a 3 façons de le faire. Le rangement des craies dans les deux boîtes restantes est alors une application d'un ensemble de 5 éléments dans un ensemble à deux éléments. Il y a 2^5 façons de procéder à un tel rangement.
On a donc $3 \times 2^5 = 75$ rangements possibles.

3) Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles.

On choisit la boîte où la craie bleue et la craie rouge seront rangées. Il y a 3 façons de faire ce choix. Il s'agit ensuite de placer les trois autres craies dans les trois boîtes. Il y a 3^3 façons de le faire.
On a donc $3 \times 3^3 = 81$ rangements possibles.

4) Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles, mais seules.

On choisit encore une fois la boîte où seront rangées les craies bleue et rouge. Puis l'on place les trois autres craies dans les deux boîtes restantes. Il y a 2^3 façons de le faire.
Il y a donc $3 \times 2^3 = 24$ rangements possibles.

Exercice 10

On lance trois fois de suite un dé numéroté de 1 à 6 et on note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de tels triplets ? (En tenant compte de l'ordre)

Les triplets correspondent à des applications de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans l'ensemble $[\![1,6]\!]$. Il y a $6^3 = 216$ applications de ce type et donc 216 triplets.

Exercice 11

Pour constituer une équipe de football, on a le choix entre 20 postulants. En supposant que chaque joueur est polyvalent, combien peut-on constituer d'équipes différentes ?

Si tous les joueurs sont polyvalents, la question revient à choisir 11 joueurs parmi 20. Il y a alors deux façons d'envisager le problème.
Soit on ne tient pas compte des places sur le terrain qui sont elles distinguables. Dans ce cas il y a $\binom{20}{11} = 167960$ équipes possibles.
Soit on différencie ces places. Dès lors, il ne s'agit plus de choisir 11 joueurs parmi 20 mais en même temps d'attribuer à chacun des joueurs choisis une place. On a ici une injection de l'ensemble des places dans l'ensemble des joueurs (pour chaque place, on choisit un joueur).
On a ainsi $A_{20}^{11} = 6704425728000$ équipes possibles.

Parmi les 20 postulants, 17 sont joueurs de champ et 3 sont gardiens. Combien d'équipes distinctes peut-on alors constituer ?

Le problème est plus compliqué. Si l'on considère simplement le choix des joueurs sans attribution de places sur le terrain, il se ramène simplement à une opération à deux étapes : choisir 10 joueurs parmi les 17 joueurs de champ et 1 gardien parmi les 3 possibles. Il y a donc $\binom{17}{10}\binom{3}{1} = 58344$ équipes possibles.
Si par contre on attribue les également les places, on aura A_{17}^{10} choix pour les joueurs de champ, et toujours trois façons de choisir le gardien.
On a donc dans ce cas $A_{17}^{10} \times 3 = 211718707200$ équipes possibles.

Exercice 12

En hiver une compagnie aérienne dessert 6 villes. Quel est le nombre de lignes en service ?

La desserte de six villes consiste à créer des trajets aller-retour entre deux quelconques des six villes. On appelle ligne le fait que l'on puisse aller d'une ville à une autre dans un sens ou dans l'autre sans distinguer les cas.
Il y a $\binom{6}{2}$ façons de choisir deux villes et donc $\binom{6}{2} = 15$ lignes.

En été, la compagnie a 45 lignes en service. Quel est le nombre de villes desservies ?

On ne connaît pas le nombre de villes. Appelons n ce nombre inconnue. On a alors l'équation :

$$\binom{n}{2} = 45$$

Ce qui donne

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

Ou encore

$$n^2 - n - 90 = 0$$

On a

$$\Delta = 1 + 360 = 361 = 19^2$$

On en déduit que

$$n_1 = \frac{1-19}{2} = -9 \text{ et } n_2 = \frac{1+19}{2} = 10$$

Comme le nombre de lignes est un entier positif, seule la solution n_2 peut être retenue.
La compagnie dessert donc 10 villes en été.

Exercice 13

Dans une classe, on souhaite élire un comité. (Un comité est un petit groupe d'élèves auquel on confiera une mission particulière). On suppose que chaque élève de la classe peut-être élu.

1. Combien de comités de 3 personnes peut-on élire dans une classe de 31 élèves ?

Il n'y a pas de distinction de rôle entre les membres du comité. Le problème revient donc à choisir trois éléments parmi 31. Il y a $\binom{31}{3} = 4495$ comités possibles.

2. Dans une classe de n élèves, il y a 351 façons d'élire un comité de 2 personnes. Quel est le nombre n d'élèves de cette classe ?

Le problème est ici l'inverse du précédent. Sur une classe de n personnes, il y a $\binom{n}{2}$ comités possibles de 2 personnes. On veut que $\binom{n}{2} = 351$.
Cela revient à résoudre l'équation

$$\frac{n(n-1)}{2} = 351$$

On trouve, calculs faits,

$$n = 27$$

Il y a donc 27 élèves dans cette classe.

Exercice 14

M Dupond emprunte un escalier à n marches pour aller à sa cave. Il descend cet escalier par une ou par deux marches.

Par exemple si son escalier comprend 10 marches, il lui arrivera de faire une marche, puis deux, puis encore deux, puis une, puis deux, puis une et enfin une, ce que l'on code sous la forme 1221211.

Soit a_n le nombre de façons différentes de descendre de cette façon escalier de n marches.

1) Déterminer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (on décrira tous les cas possibles dans chacun des cas proposés)

Si l'escalier n'a qu'une marche, il n'y a bien entendu qu'une seule façon de le descendre. Donc

$$a_1 = 1$$

Si l'escalier a deux marches, soit on les descend une par une soit on les descend toutes des deux d'un coup (ce que l'on code par 11 ou 2). On a donc

$$a_2 = 2$$

Si l'escalier a trois marches, les codes possibles sont 111,12,21. Il y en a trois. Donc

$$a_3 = 3$$

Si l'escalier a quatre marches, les codes possibles sont 1111,112,121,211,22. On trouve

$$a_4 = 5$$

Si l'escalier a cinq marches, les codes possibles sont 11111,1121,1211,2111,221,1112,122,212.
On a donc

$$a_5 = 8$$

2) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1} (on justifiera la réponse).

La demande de l'énoncé permet de guider la recherche.
On peut voir assez simplement que

$$a_5 = a_4 + a_3$$

Mais aussi que

$$a_4 = a_3 + a_2$$

Et enfin que

$$a_3 = a_2 + a_1$$

La relation cherchée semble donc être

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Rappelons les codes donnés pour a_3, a_4 et a_5.
Pour 3 escaliers : 111,12,21
Pour 4 escaliers : 1111,112,121,211,22
Pour 5 escaliers : 11111,1121,1211,2111,221,1112,122,212
Généralisons le constat coloré que l'on peut faire ci-dessus. Pour descendre $n + 1$ escaliers, il faut en avoir descendu n et en descendre encore 1 ou en avoir descendu $n - 1$ et en descendre 2.
Ce que l'on peut dire autrement : si on descend le dernier escalier avec un saut d'une marche, cela signifie que l'on avait descendu auparavant n escaliers, et si on le descend avec un saut de 2 marches, cela signifie que l'on en avait descendu $n - 1$ auparavant.
Le nombre de façons de descendre les $n + 1$ escaliers est donc égal au nombre de façons de descendre les n premiers plus le nombre de façons de descendre les $n - 1$ premiers.
On a bien

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

3) L'escalier de M Dupond comprend 12 marches. De combien de façons peut-il le descendre ?
S'il change de façon chaque jour, combien de semaines mettra t'il pour toutes les essayer ?

Nous devons calculer ici a_{12}.
La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Elle a pour solutions

$$r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On sait alors qu'il existe deux nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \geq 1, a_n = A\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + B\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

On trouve A et B en résolvant le système :

$$\begin{cases} a_1 = A + B \\ a_2 = A\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs de a_1 et de a_2 trouvées plus haut, on obtient :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ et } B = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

On aura donc :

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Et donc

$$a_{12} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{11} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{11}$$

On peut développer cette formule à l'aide du binôme de Newton. Mais c'est assez laborieux.
Un ordinateur donne :

$$a_{12} = 233$$

On peut faire plus simple ici en calculant pas à pas les valeurs jusqu'à a_{12}.

$$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$$
$$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$$
$$a_8 = a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34$$
$$a_9 = a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55$$
$$a_{10} = a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89$$
$$a_{11} = a_{10} + a_9 = 89 + 55 = 144$$
$$a_{12} = a_{11} + a_{10} = 144 + 89 = 233$$

On effectue la division de 233 par 7 : on trouve qu'il mettra 33 semaines et 2 jours pour essayer toutes les façons.