

Dénombrement

I — Ensemble fini et cardinal

Définition 1.1 — Ensemble fini, cardinal

On dit qu'un ensemble E est un **ensemble fini** si et seulement si E est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de E dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Dans ce dernier cas l'entier n est unique : c'est le **cardinal** de E , noté $\text{card } E$.

Par convention $\text{card } \emptyset = 0$.

Une telle bijection s'appelle une énumération de E . C'est une façon de compter les éléments de E .

L'entier $\text{card } E$ représente le nombre d'éléments de E .

Théorème 1.2 — Sous-ensemble d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E . Alors A est un ensemble fini.

Théorème 1.3 — Union disjointe (1)

Soit E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card } E + \text{card } F$$

Théorème 1.4 — Union disjointe (2)

Soit A_1, A_2, \dots, A_r r ensembles finis deux à deux disjoints. Alors

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) = \sum_{k=1}^r \text{card } A_k$$

Corollaire 1.5 — Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E .

$$\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$$

Corollaire 1.6 — Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E .

- $\text{card } A \leq \text{card } E$;
- $\text{card } A = \text{card } E$ si et seulement si $A = E$.

Propriété 1.7 — Soit A, B et C trois ensembles finis.

- 1) $\text{card}(A \setminus B) = \text{card } A - \text{card}(A \cap B)$;
- 2) $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$;
- 3) $\text{card}(A \cap B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cup B)$;

Corollaire 1.8 — Soit E un ensemble à n éléments et A_1, A_2, \dots, A_r une partition de E . Alors

$$\text{card } E = \sum_{k=1}^r \text{card } A_k$$

Corollaire 1.9 — Principe de symétrie ou « des bergers »

Soit E un ensemble à n éléments et A_1, A_2, \dots, A_r une partition de E . Si $\text{card } A_1 = \text{card } A_2 = \dots = \text{card } A_r = p$ alors $\text{card } E = r \times p$.

II — Dénombrement

Théorème 2.1 — Cardinal du produit cartésien (1)

Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$$

Théorème 2.2 — Cardinal du produit cartésien (2)

Soit E_1, E_2, \dots, E_p p ensembles finis de cardinaux respectifs n_1, n_2, \dots, n_p .

L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini, de cardinal $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$.

Corollaire 2.3 — En particulier $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$.

On parle de p -listes d'éléments de E ou encore de p -uplets d'éléments de E . Ces théorèmes formalisent les raisonnements « avec choix successifs » : E_1 est l'ensemble des choix possibles pour la première lettre, E_2 pour la seconde, etc. Un arrangement d'éléments de E est un p -uplet sans répétition.

Définition 2.4 — Arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **arrangement de p élément de E** un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; p \rrbracket^2, \quad i \neq j \iff x_i \neq x_j$$

Théorème 2.5 — Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p .

1) Si $p \leq n$, il y a

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de cette sorte;

2) si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.

Définition 2.6 — Permutations

On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments les arrangements de n éléments de E . Il y en a $n!$.

Définition 2.7 — Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **combinaison de p éléments de E** un sous-ensemble de E contenant p éléments.

Théorème 2.8 — Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

