Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

5 novembre 2009

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensemble bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.

Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :

- Dix personnes assistent à un diner autour d'une table ronde. Combien y a-t-il de façons de disposer les dix convives autour de la table ? Si de plus on impose que deux de ces convives, qui ne s'apprécient guère, ne doivent pas être placée côte à côte, combien reste-t-il de dispositions possibles ?
- Il y a 42 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- Pour remplir une grille de loto, on coche six numéros parmi les nombres compris entre 1 et 49. De combien de façons peut-on remplir une telle grille ? Question subsidiaire : quelle est la probabilité de gagner au loto ?

1 Cardinaux d'ensembles finis

1.1 Quelques définitions

Définition 1. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 1. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, ..., n.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. □

Proposition 2. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1; \dots; n\}$. L'application $g \circ f : E \to \{1; \dots; n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

1.2 Cardinaux élémentaires

Proposition 3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1; \dots; n\}$ et g une bijection de B dans $\{1; \dots; p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1; \dots; n+p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x) + p$. Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \cap B$. On a donc $|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A \backslash B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A \backslash B| + |A \cap B|$, ou encore $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B \backslash A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 1. Formule du crible de Poincaré.

Soient A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 4. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap C \cap B \cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 pratiquent le football, 83 le rugby et 51 le tennis. De plus, 24 pratiquent à la fois foot et rugby, 14 font foot et tennis, et 8 rugby et tennis. Enfin, 3 élèves pratiquent les trois sports simultanément. Le nombre d'élèves sportifs est alors de $152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 237$.

Proposition 5. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 6. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \dots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 2. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 2. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 7. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : Dans une urne se trouvent 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire quatre **successivement avec remise**. Un tel tirage revient à choisir une 4-liste dans l'ensemble à 10 éléments constitué des entiers de 1 à 10. Il y a donc $10^4 = 10\ 000$ tirages possibles.

Remarque 3. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \dots ; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.

Définition 3. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 4. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 4. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Proposition 8. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Idée de démonstration : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, ..., $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2 \times 1}{n(n-1)\dots 2 \times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : Si on reprend notre urne avec ses 10 boules et qu'on en tire désormais quatre **successivement sans remise**, on construit des arrangements, et il y a $\dfrac{10!}{6!} = 5040$ tirages possibles.

Remarque 5. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1; \dots ; p\}$ dans E.

Définition 5. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre de façons d'asseoir 10 personnes autour d'une table (supposée contenir 10 places distingables) est $10! = 3\ 628\ 800$. Si l'on veut que deux personnes spécifiées à l'avance ne soient pas côte à côté (on suppose la table ronde par exemple, c'est-à-dire que chaque personne a 2 voisins), il reste $10 \times 7 \times 8 \times 7 \times \dots 1 = 2\ 822\ 400$ (on place d'abord les deux ennemis : on a dix possibilités pour le premier, mais 7 au lieu de 9 pour le deuxième puisqu'on doit éviter les deux places voisines du premier ; ensuite, tout se déroule comme précédemment).

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par 3! car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Remarque 6. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Proposition 9. Quelques propriétés des factorielles, plus ou moins utiles :
- Par convention, $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$, mais $n! = o(n^n)$. (Pour les plus curieux, je signale le joli résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

Définition 6. Une **combinaison** de k éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à k éléments de E.

Définition 7. Soient n et k deux entiers tels que $k \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et k le nombre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ce nombre est également noté C_n^k, et on le lit « k parmi n » (comme un raccourci signifiant que le nombre de façon de choisir k objets parmi n objets au total).

Remarque 7. On pose souvent $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Proposition 10. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\frac{A_{n,p}}{p!} = \binom{n}{p}$. □

Exemple : Toujours dans notre urne avec ses dix boules, on tire désormais quatre boules **simultanément**. Il y a maintenant $\binom{10}{4} = 210$ tirages possibles (l'ordre n'est plus important).

Remarque 8. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1; \dots; p\}$ dans E. En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1); f(2), \dots; f(p)\}$.

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes $\rightarrow$ puissances
Répétition interdites	Combinaisons $\rightarrow$ coefficients binômiaux	Arrangements $\rightarrow$ quotient de factorielles

3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 11. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :
- $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $= \frac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et $x \in E$. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. □

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 2. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 9. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a + b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \sum k = 1^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n + 1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k = 0$ et $k = n + 1$. □

Proposition 12. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sous-ensembles. Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1 + 1)^n = 2^n$.

Une façon plus combinatoire de voir les choses : à chaque sous-ensemble A de E, on peut associer une application de E dans $\{0; 1\}$ appelée application caractéristique de A, et habituellement notée χ_A, définie comme suit : si $x \in A$, $\chi_A(x) = 1$ et sinon $\chi_A(x) = 0$. Cette application caractérise effectivement le sous-ensemble, et toute application de E dans $\{0; 1\}$ est une application caractéristique d'un sous-ensemble de E. Comme il y a 2^n applications de E dans $\{0; 1\}$ (cf la remarque après la définition des p-listes), il y a aussi 2^n sous-ensembles de E. □

Proposition 13. Formule de Vandermonde.
Soient a, b et n trois entiers tels que $n \leqslant a + b$, alors $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$.

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un groupe constitué de a hommes et b femmes, parmi lesquels on veut choisir n personnes. On sait déjà qu'il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités de faire ce choix (ce qui correspond au membre de gauche de notre inégalité). Mais on peut également classer les groupes de n personnes en catégories selon le nombre d'hommes qu'ils contiennent : soit 0 homme et n femmes (il y a $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ tels groupes), soit 1 homme et $n-1$ femmes (il y a $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ tels groupes), etc, jusqu'à la possibilité d'avoir n hommes et 0 femme (il y a $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ tels groupes). Le nombre total de groupes possibles vaut donc aussi $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$. □