# Chapitre 6 : Dénombrement

Dans ce chapitre, les lettres *E*, *F*, *G*, *A*, *B*, *C*,… désignent des ensembles, et les lettres *n*, *m*, *p*, *a*, *b*, *c*,… des entiers.

Préliminaires :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \times n!, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Lorsque $E = \varnothing$, il y a une seule application de *E* vers *F*. Cette application est injective (et surjective si et seulement si $F = \varnothing$)

# I Ensembles finis et cardinaux : les bases

## A) Supposé connu

- La notion d'ensemble fini ou infini.
- Ce qu'est le cardinal d'un ensemble fini ($\text{card}(\varnothing) = 0$)
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, $\text{card}([\![ p, n ]\!]) = n - p + 1$

Admis :
Si *E* est fini, et si $F \subset E$, alors *F* est fini, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$
Si *E* et *F* sont disjoints et finis, alors $F \cup E$ est fini et :
$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$

## B) Conséquences

Si $E_1, E_2, \ldots E_n$ sont finis et disjoints deux à deux, alors $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ est un ensemble fini de cardinal $\sum_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$ (Cet ensemble est aussi noté $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$)

Si *E* et *F* sont finis, alors $E \cup F$ est fini et :
$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

Démonstration :
$E \cup F = E \cup (F \setminus E)$. Or, $F \setminus E \subset F$, donc $F \setminus E$ est fini.
Les ensembles *E* et $F \setminus E$ sont disjoints.
Donc $E \cup (F \setminus E)$ est fini et $\text{card}(E \cup (F \setminus E)) = \text{card}(E) + \text{card}(F \setminus E)$
Donc $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F \setminus E)$
Par ailleurs, $(F \setminus E) \cup (F \cap E) = F$, et $F \setminus E$ et $F \cap E$ sont disjoints et finis.
Donc $\text{card}(F \setminus E) + \text{card}(F \cap E) = \text{card}(F)$
Soit : $\text{card}(F \setminus E) = \text{card}(F) - \text{card}(F \cap E)$
Donc $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

## C) Résultats liant applications entre ensembles finis et comparaison de leurs cardinaux (admis)

(1) Si $E$ est fini, on a l'équivalence : Il existe une injection de $E$ dans $F$ $\Leftrightarrow$ $F$ est infini ou $\text{card}(F) \geq \text{card}(E)$

(2) Si $F$ est fini, on a l'équivalence : Il existe une surjection de $E$ dans $F$ $\Leftrightarrow$ $F$ est fini et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$

(3) Si $F$ est fini, on a l'équivalence : Il existe une bijection de $E$ dans $F$ $\Leftrightarrow$ $F$ est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$

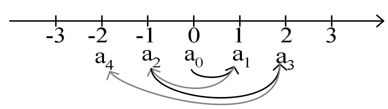
Autre résultat admis :
Soient $E$, $F$ de même cardinal et finis.
Soit $f : E \to F$.
On a les équivalences :
$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective
$f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective.

## D) Notion d'ensemble dénombrable

Définition :
Soit $E$ un ensemble. $E$ est dénombrable lorsque $E$ est fini ou lorsque $E$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ($E$ est alors infini dénombrable).

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- L'ensemble des nombres pairs $P$ est dénombrable. En effet :
  $\begin{array}{l}\mathbb{N} \to P \\ k \mapsto 2k\end{array}$ est bijective.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.




- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $^{0}(0,0)$ | $^{2}(0,1)$ | $^{5}(0,2)$ | (0,3) | (0,4) |
| 1 | $^{1}(1,0)$ | $^{4}(1,1)$ | $^{8}(1,2)$ | (1,3) | (1,4) |
| 2 | $^{3}(2,0)$ | $^{7}(2,1)$ | | | |
| 3 | $^{6}(3,0)$ | (3,1) | | | |
| 4 | (4,0) | (4,1) | | | |

- $P(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- L'ensemble $E$ des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable ($u_k = 100100011...$)

Démonstration :
Supposons qu'il le soit.
On peut alors écrire les éléments de $E$.

$f(0) = 0^{\text{ème}} : 10011001001...11$

$f(1) = 1^{\text{er}} : 100100011101...01$

$\vdots$

Pour chaque $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $a_{n,p}$ le terme d'indice *p* du *n*-ième élément de *E*.

On a alors un tableau :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(0)$ | $\boxed{a_{00}}$ | $a_{01}$ | $a_{02}$ | $a_{03}$ | $a_{04}$ | $a_{05}$ | $\cdots$ |
| $f(1)$ | $a_{10}$ | $\boxed{a_{11}}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $\cdots$ |
| $f(2)$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ | $\boxed{a_{22}}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $\cdots$ |

Soit *u* la suite de *E* définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{kk} = 1 \\ 1 \text{ si } a_{kk} = 0 \end{cases}$$

Alors *u* n'est pas dans le tableau. $\text{non}(\exists n \in \mathbb{N}, u = f(n))$

En effet, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = f(n)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = a_{nk}$, et en particulier $u_n = a_{nn}$, ce qui est impossible.

Théorème (admis) :
Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable

# II Dénombrement classique

Dans ce paragraphe, tous les ensembles considérés sont finis.

## A) $\text{card}(E \times F)$

Proposition :
Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$, alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

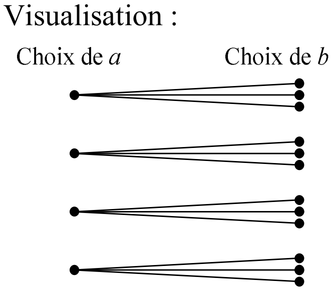
Démonstration :

- informelle :

$\text{card}(E \times F) =$ nombre d'éléments de $E \times F$.

Nombre d'éléments = nombre de façons de « faire » un élément. Pour faire un élément $(a,b)$ de $E \times F$, on doit choisir *a* dans *n* éléments, et *b* dans *p* éléments.

Visualisation :




- formelle :

$$E \times F = \bigcup_{a \in E} \{a\} \times F$$

Pour chaque $a \in E$, $\begin{array}{l} F \to \{a\}\times F \\ y \mapsto (a,y) \end{array}$ est bijective.

Donc $\text{card}(\{a\}\times F) = \text{card}(F)$. Les $\{a\}\times F$ pour $a \in E$ sont disjoints deux à deux.

Donc $\text{card}(E\times F) = \sum_{a\in E} \text{card}(\{a\}\times F) = \sum_{a\in E} \text{card}(F) = \text{card}(E)\times \text{card}(F)$

Conséquence :

$\text{card}(E_1\times E_2\times \ldots \times E_n) = \text{card}(E_1)\times \text{card}(E_2)\times \ldots \times \text{card}(E_n)$

$\text{card}(E^m) = (\text{card}(E))^m$

$\text{card}(E^m)$ est la nombre de $m$-uplets $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ d'éléments de $E$.

## B) $\text{card}(\mathfrak{F}(E,F))$.

Proposition :

$\text{card}(\mathfrak{F}(E,F)) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$

Démonstration :

$E = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ où les $a_i$ sont distincts deux à deux.

$F = \{b_1, b_2, \ldots b_p\}$ où les $b_j$ sont distinct deux à deux.

Pour fabriquer une application de $E$ dans $F$ :

1) image de $a_1$ : $p$ possibilités.

2) image de $a_2$ : $p$ possibilités.

$\ldots n$) image de $a_n$ : $p$ possibilités.

Donc $p^n$ possibilités en tout.

Remarque : en particulier, $\text{card}(\mathfrak{F}([\![1,m]\!], \text{E})) = (\text{card}(\text{E}))^m$

## C) $\text{card}(P(E))$

Proposition :

$\text{card}(P(E)) = 2^{\text{card}(E)}$

Démonstration :

On note $n = \text{card}(E)$, $E = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$

Se donner une partie $A$ de $E$, c'est se donner la liste $(r_1, r_2, \ldots r_n)$ de 0 et de 1 définie par : $\forall k \in [\![1,n]\!], r_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases}$

Or, il y a $2^n$ telles listes (voir B))

Plus formellement :

L'application $\begin{array}{l} P(E) \to \{0,1\}^n \\ A \mapsto (x_1, x_2, \ldots x_n) \end{array}$ définie par $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k = \begin{cases} 0 \text{ si } a_k \notin A \\ 1 \text{ si } a_k \in A \end{cases}$

Est bijective.

## D) Nombre d'injections de $E$ vers $F$.

On note $p = \text{card}(E)$, $n = \text{card}(F)$

Le nombre d'injections de $E$ vers $F$ est $A_n^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } 0 \le p \le n \end{cases}$

En effet : (le cas où $p > n$ étant évident)

Si $p \le n$.

Soit $p = 0$, et alors $A_n^p = 1$, ok (une seule injection d'un ensemble à 0 éléments vers un autre ensemble)

Si $1 \le p \le n$, notons alors $E = \{a_1, a_2, \dots a_p\}$.

Pour construire une injection de $E$ vers $F$ :

1) On choisit $f(a_1)$ ; $n$ possibilités.

2) On choisit $f(a_2)$ ; $n-1$ possibilités.

…$p$) On choisit $f(a_p)$ ; $n-p+1$ possibilités.

On a donc $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités.

Remarque : $A_n^p$ est aussi le nombre de $p$-listes d'éléments distincts d'un ensemble à $n$ éléments.

## E) Nombre de permutations d'un ensemble fini

Définition :

Une permutation sur $E$ est une bijection de $E$ dans $E$.

L'ensemble des permutations sur $E$ est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition :

Soit $E$ de cardinal $n$. Alors le nombre de permutations sur $E$ est $n!$.

En effet : comme $E$ est fini, une application de $E$ dans $E$ est bijective si et seulement si elle est injective. Donc le nombre de permutations est $A_n^n$.

## F) Nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments

Proposition :

Soit $E$ de cardinal $n$, soit $p \in \mathbb{N}$.

Alors le nombre de parties de cardinal $p$ de l'ensemble $E$ est :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \le p \le n \end{cases}$$

Démonstration : (cas $p = 0$, $p > n$ évidents)

Cas où $1 \le p \le n$ : comptons de deux manières différentes le nombre de $p$-listes d'éléments distincts de $E$.

1) Ce nombre est $A_n^p$

2) Pour construire une telle $p$-liste $(x_1, x_2, ... x_p)$, on choisit d'abord l'ensemble des $p$ termes de la liste : $\binom{n}{p}$ possibilités. On doit ensuite les ranger : $p!$ possibilités. Ainsi, le nombre cherché est $\binom{n}{p} \times p!$

Donc $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

## III Propriétés des $\binom{n}{p}$

(1) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

En effet, choisir $p$ éléments parmi $n$ revient à choisir les $n-p$ qu'on ne prend pas.

(2) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

Démonstration :

Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p-1} = 0$

Si $p = n$, $\binom{n}{p} = 1$, $\binom{n-1}{p} = 0$, $\binom{n-1}{p-1} = 1$

Sinon : Soit $E$ de cardinal $n$. Comme $n > p$, $E \neq \varnothing$

Soit alors $a \in E$. On a :

$\binom{n}{p} = N_1 + N_1$, où $N_1$ est le nombre de parties à $p$ éléments de $E$ sans $a$, et $N_2$ le nombre de parties à $p$ éléments de $E$ avec $a$. Alors :

$N_1 = \binom{n-1}{p}$ (on choisit $p$ éléments parmi $E \setminus \{a\}$)

$N_2 = \binom{n-1}{p-1}$ (on choisit $a$, il reste à choisir les $p-1$ autres éléments dans $E \setminus \{a\}$)

D'où le résultat.

Application :

Permet de remplir le tableau donnant les $\binom{n}{p}$ :

| $n \setminus p$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | $\boxed{1}$ | $\boxed{0}$ | 0 |
| 2 | 1 | $1+1$ | $\boxed{1+0}$ | 0 |
| 3 | 1 | $1+2$ | $2+1$ | $1+0$ |

$$\boxed{(3)\ \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n}$$

En effet, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ correspond au cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à $n$ éléments (nombre de parties à 0 éléments + nombre de parties à 1 élément +…)

Ou : $P(E)=\displaystyle\bigcup_{p=0}^{n}P_p(E)$, et les $P_p(E)$ sont disjoints deux à deux.

($P_k(E)$ : ensemble des parties à $k$ éléments de $E$)

Donc $\mathrm{card}(P(E))=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\mathrm{card}(P_p(E))$, soit $2^n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$

$$\boxed{(4)\ \binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}=\frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}}$$

Démonstration (cas $p=0$, $p>n$ triviaux) :

Si $1\leq p\leq n$ :

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

$$=\frac{n-p+1}{p}\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}\binom{n}{p-1}$$

Si $p=n+1$ :

$$\binom{n}{n+1}=0,\ \binom{n-1}{n}=0,\ \frac{n-p+1}{p}=0$$

Autre démonstration, combinatoire, pour $1\leq p\leq n$ :

Soit $E$ de cardinal $n$. Comptons le nombre de couples $(A,a)$ constitués :

- d'une partie $A$ de $E$ de cardinal $p$.
- d'un élément $a$ de $A$.

Notons $n$ ce nombre. On a :

$N=\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A}\times\underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } A}}$, et $N=\underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } E}}\times\underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } A \text{ à } p\\ \text{éléments contenant}\\ a}}$, d'où la première égalité.

Mais aussi :

$N=\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A}\times\underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } A}}$, et $N=\underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\text{choix de } B \text{ à } p-1}\times\underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } E\setminus B}}$, d'où la deuxième égalité.

Exemple :

$E=\{1,2,3\}$, $p=2$

$$N=\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de } A}\times\underbrace{p}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } A}}:\left\{\begin{array}{ll} A=\{1,2\} & \substack{a=1\\ a=2} \\ \hline A=\{2,3\} & \substack{a=2\\ a=3} \\ \hline A=\{1,3\} & \substack{a=3\\ a=1} \end{array}\right.\qquad N=\underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } E}}\times\underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\substack{\text{choix de } A \text{ à } p\\ \text{éléments contenant}\\ a}}:\left\{\begin{array}{ll} a=1 & \substack{A=\{1,2\}\\ A=\{1,3\}} \\ \hline a=2 & \substack{A=\{2,3\}\\ A=\{2,1\}} \\ \hline a=3 & \substack{A=\{3,2\}\\ A=\{3,1\}} \end{array}\right.$$

$$N=\underbrace{\binom{n}{p-1}}_{\text{choix de } B \text{ à } p-1}\times\underbrace{n}_{\substack{\text{choix de } a\\ \text{dans } E\setminus B}}\quad:\begin{cases}\{1\} & \substack{a=3\\ a=2}\\ \{2\} & \substack{a=1\\ a=3}\\ \{3\} & \substack{a=1\\ a=2}\end{cases}$$

(5) La formule du binôme de Newton.

Théorème : Soient $a,b\in\mathbb{C}$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left(\binom{n}{p}a^p b^{n-p}\right)$$

Démonstration : par récurrence sur $n$, avec $a$, $b$ fixés.

Montrons que $\forall n\in\mathbb{N},\underbrace{(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left(\binom{n}{p}a^p b^{n-p}\right)}_{P(n)}$

* $P(0)$, $P(1)$ ok

* soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. On a :

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\underbrace{a^{p+1}b^{n-p}}_{p+1+n-p=n+1}+\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\underbrace{a^p b^{n-p+1}}_{p+n-p+1=n+1}=\sum_{q=1}^{n+1}\binom{n}{q-1}a^q b^{n-q+1}+\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p+1}$$

$$=\underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}}a^{n+1}b^0+\sum_{p=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}\right)}_{\binom{n+1}{p}}a^p b^{n-p+1}+\underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}}a^0 b^{n+1}=\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^p b^{n+1-p}$$

Ce qui achève la récurrence.

(6) Soit $E$ de cardinal $n\geq 1$. Alors, il y a dans $E$ autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Démonstrations :

* On doit ainsi montrer : $\underbrace{\sum_{\substack{p\in[\![0,n]\!]\\ \text{et } p \text{ pair}}}\binom{n}{p}}_{A}=\underbrace{\sum_{\substack{p\in[\![0,n]\!]\\ \text{et } p \text{ impair}}}\binom{n}{p}}_{B}$.

On a :

$$(1+(-1))^n=\begin{cases}0\\ \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p=A-B\end{cases}$$

Donc $A-B=0$, soit $A=B$, d'où le résultat.

* On note $A$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal pair, $B$ de ceux de cardinal impair. Soit alors $a\in E$. Soit $f$ l'application définie par :

$$f:P(E)\to P(E)$$
$$X\mapsto\begin{cases}X\cup\{a\}\text{si } a\notin X\\ \mathrm{X}\setminus\{a\}\text{si } a\in X\end{cases}$$

Alors $f\circ f=\mathrm{Id}_E$ (on dit que $f$ est involutive / une involution)

Donc $f$ est bijective (car inversible, d'inverse elle-même). Donc $f$, par restriction, réalise une bijection de $A$ sur son image, qui est évidemment $B$.