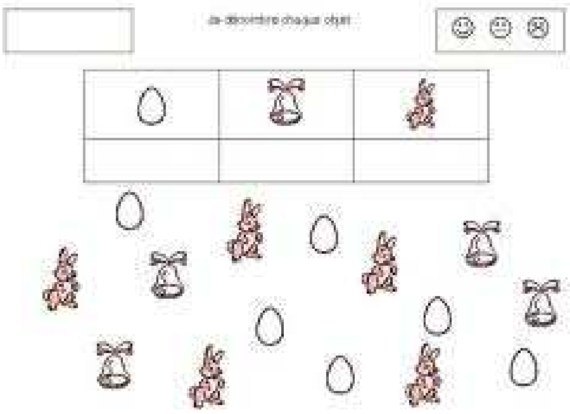
Le Dénombrement

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

21 juin 2018



L'objectif de ce chapitre est de présenter les concepts et résultats fondamentaux permettant de calculer le cardinal d'ensembles finis donnés.

1 Les ensembles finis

Les définitions et propriétés suivantes sont à la base de la théorie du dénombrement.

Définition 1 : **Ensemble fini**
On dira qu'un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'élément de E est appelé le *cardinal* de l'ensemble et est noté : $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.
Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Remarque 1. Si $\text{Card}(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors il est possible de numéroter les éléments de E de 1 à n.
On a alors $E = \{a_1,\ a_2,\ \dots, a_n\}$.

Proposition 1 : **Cardinal d'une partie d'un ensemble fini**
Un sous-ensemble d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à celui de l'ensemble.
Caractérisation de l'égalité de deux ensembles :
Si F et E sont des ensembles finis, alors : $\begin{cases} F \subset E \\ \text{Card}(F) = \text{Card}(E) \end{cases} \iff F = E$

Proposition 2 : Fonction bijective sur des ensembles de cardinal fini
Si $f \in \mathcal{F}(E,\ F)$ où E et F sont des ensembles finis alors :

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est injective} \\ \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est surjective} \\ \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) \end{cases}$$

Définition 2 : Dénombrer
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal. Nous allons donc voir un certain nombre de formules permettant d'exprimer $\mathrm{Card}(E)$.

Remarque 2. La méthode naturelle de dénombrement consistant à compter un à un tous les éléments d'un ensemble trouve vite ses limites lorsque le cardinal des ensembles est grand ou dépend d'un paramètre.

Méthode 1 de dénombrement :
Pour dénombrer un ensemble E, il sera parfois utile de prouver qu'il existe une bijection de E vers F.
En calculant le cardinal de F, on en déduit le cardinal de E.

`Exemple` 1. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et n points distincts du plan.
Combien peut-on construire de segments distincts avec ces n points ?

Exercice : 1

$(*)$ Soient $\begin{cases} E = \{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p) \in \mathbb{N} \mid \alpha_1 + \cdots + \ \alpha_p = n\} \\ F = \{\text{dispositions de } p-1 \text{ cases noires parmi } n+p-1 \text{ cases alignées}\} \end{cases}$.
Montrer que ces deux ensembles ont le même cardinal.

Définition 3 : Partition d'une ensemble
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1,\ \ldots,\ A_p$ des sous-ensembles d'un ensemble E fini ou non.
On dira que $\mathcal{P} = (A_1,\ \ldots,\ A_p)$ est une *partition* de E lorsque : $\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup\ \cdots \cup A_p = E \\ A_1,\ \ldots,\ A_p \quad \text{sont disjoints deux à deux} \end{cases}$

Remarque 3. Un sous ensemble A de E et son complémentaire $C_E A$ forment une partition de E.

Lemme 3 : Formules sur le cardinal

1. Si A et B sont deux ensembles finis, on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)}$$

2. Lemme des bergers :
Si $\mathcal{P} = (A_1,\ \ldots,\ A_p)$ est une *partition* d'un ensemble fini E, on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A_1) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p)}$$

3. Si A est une partie d'un ensemble fini E, on note $\bar{A} = E \backslash A$ appelé le *complémentaire* de A dans E.
On a alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(C_E A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)}$$

Lemme des bergers	Partition d'un ensemble	Complémentaire

<u>Méthode 2</u> de dénombrement :
La plupart des exercices de dénombrement utilisent (souvent sans le dire !) le lemme des bergers.
En effet, pour compter les éléments d'un ensemble complexe, on commence souvent par classer les éléments de l'ensemble en sous-ensembles disjoints avant de dénombrer les éléments de ces sous-ensembles.

`Exemple` 2. $(*)$ Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 1000 dont la somme des chiffres vaut 3.

Méthode pour prouver que $S = a_1 + \cdots + a_p$

Si $S,\ a_1,\ \ldots,\ a_p \in \mathbb{N}$, on peut envisager de prouver que $S = a_1 + \cdots + a_p$ de la façon suivante :

1. On choisit judicieusement un ensemble E de cardinal S
2. On met en évidence $(A_1,\ \ldots,\ A_p)$ une partition de E telle que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\text{Card}(A_k) = a_k$.
3. On applique alors le lemme des bergers.

`Exemple` 3. En considérant l'ensemble des nombres binaires écrits sur n bits, prouver que : $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice : 2

$(*)$ Pour $n,\ p \in \mathbb{N}$, on note $u_{n,p}$ le nombre de n-listes $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

Montrer que pour tout $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u_{n-1,k}$.

Exercice : 3

$(**)$ Pour $n,\ p \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$.
On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble E contenant n élements (dont un élément noté a) dans un ensemble F contenant p éléments.
On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E\backslash\{a\}$ sur F, établir que :

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$

Théorème 4 : **Produit cartésien**
Soient deux ensembles finis E et F. Alors :

$$E \times F \text{ est fini} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)}$$

Lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, cette formule se généralise à :

1. $\text{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \cdots \times \text{Card}(E_k)$ où $E_1, \ldots, E_k$ sont des ensembles finis.
2. $\text{Card}(E^k) = \text{Card}(E)^k$ où E est un ensemble fini.

Preuve 4 : Il suffit de compter ...

Remarque 4. Les éléments d'un produit cartésien de p ensembles sont appelés des *p-listes* ou des *p-uplets*.
Les éléments de E^p sont appelés *p-listes* ou *p-uplets* d'éléments de E.

`Exemple` 4.

1. Déterminer le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$.
2. Combien de menus peut-on constituer avec 3 entrées, 2 plats de résistance et 4 desserts ?

Méthode pratique de dénombrement de p-uplets

Lorsque les éléments d'un ensemble peuvent s'exprimer sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et que :

1. il y a n_1 valeurs possibles pour x_1
2. si pour toute valeur de x_1 il y a n_2 valeurs possibles de x_2
3. plus généralement si pour chaque valeur de $(x_1, \ldots, x_{k-1})$, il y a n_k valeurs possibles pour x_k

Alors le nombre totale de p-uplet est :

$$N = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

`Exemple` 5. $(*)$

1. Combien de "mots" de p lettres peut-on former avec un alphabet de n lettres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers qui s'écrivent avec exactement k chiffres en base b ?
3. Combien y-a-t-il de façons de classer 10 livres sur une étagère ?
4. Trouver le nombre de diviseurs de 1800.
5. Combien y-a-t-il de possibilités de ranger n objets dans p tiroirs sachant qu'un tiroir peut contenir autant d'objets que l'on souhaite ?
6. Combien est-il possible d'éditer de plaques d'immatriculation avec le système actuel ? Et avec l'ancien système ?

`Exemple` 6. $(*)$ On considère des boules de 5 couleurs possibles. On en prend 3 que l'on range dans un certain ordre. Combien peut-on obtenir de dispositions différentes ? (2 boules de même couleur étant indiscernables)

Théorème 5 : **Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre**
Soit E et F deux ensembles finis. On a alors :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E,\ F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

On comprend ainsi l'origine de la notation alternative F^E pour désigner $\mathcal{F}(E,\ F)$.

Preuve 5 : Il s'agit en fait de déterminer un nombre de p-uplets.

Théorème 6 : **Nombre de parties d'un ensemble**
Si E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\boxed{\text{Card}(P(E)) = 2^n}$

Preuve 6 :

1. M1 : Simple récurrence en effectuant une partition judicieuse de $\mathcal{P}(E)$.
2. M2 : A l'aide de l'application qui à toute partie de E associe sa fonction indicatrice.

2 Les arrangements

Définition 4 :
On obtient un *arrangement de p éléments parmi n* lorsqu'on choisit p éléments différents parmi n éléments possibles en tenant compte de l'ordre dans lequel ils ont été choisis.

Remarque 5. Pour dire qu'un objet est un arrangement, on s'intéresse à l'objet lui-même mais $\boxed{\text{surtout}}$ à la façon dont il a été "construit".

Remarque 6. Les objets suivants sont des arrangements :
— Les tiercés dans l'ordre possibles lorsque n chevaux sont au départ d'une course.
— Les mots de p lettres distinctes que l'on peut construire à partir d'un alphabet de n lettres.

DÉFINITION 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note : $n! = 1.2.3 \ldots n$ et on convient que $0! = 1$

THÉORÈME 7 :
Si $0 \leq p \leq n$, le nombre d'arrangements possibles obtenus en choisissant p éléments parmi n est :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

Preuve 7 : Notons E_n un ensemble à n éléments. et $\mathcal{A}_p^n$ l'ensemble des arrangements à p éléments possibles de E_n. On a alors $\mathcal{A}_p^n = E_n \times E_{n-1} \times \cdots \times E_1$ ...

`Exemple` 7. $(*)$ Déterminer le cardinal des ensembles d'arrangements vus précédemment.

PROPOSITION 8 : **Injections et permutations**

1. Il y a A_p^n injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
2. Il y a $n!$ bijections de E dans F où $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$.
3. Il y a $n!$ permutations d'un ensemble E à n éléments (bijections de E dans lui-même).

Preuve 8 : Pas de difficulté.

Exercice : 4

$(**)$ Un groupe de $2n$ personnes, comprend n hommes et n femmes.

1. Combien y-a-t-il de façons de les disposer autour d'une table ?
   On ne tiendra compte que de la position des uns par rapport aux autres.
2. Idem, mais en respectant l'alternance "homme - femme".
3. Idem, mais en respectant l'alternance "homme - femme" et en imposant que Mme X soit à côté de M. Y.

3 Les combinaisons

DÉFINITION 6 : **Combinaison**
On appelle *p-combinaison* d'un ensemble E de cardinal n tout sous-ensemble de E de cardinal p.

Remarque 7. On obtient donc une *p-combinaison* lorsqu'on choisit p éléments différents parmi n éléments possibles sans tenir compte de l'ordre dans lequel ils ont été choisis.

`Exemple` 8. Les éléments suivants sont des combinaisons :

1. Un ensemble $\{x_1, \ldots, x_p\}$ construit avec p éléments distincts choisis dans un ensemble de n éléments.
2. Une main de 8 cartes choisies parmi 32.
3. Un tiercé dans le désordre dans une course de chevaux.
4. Un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ construit avec p éléments distincts choisis dans un ensemble de n éléments et vérifiant la contrainte $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.

THÉORÈME 9 :
Si $0 \leq p \leq n$, le nombre de p-combinaisons possibles dans un ensemble à n éléments est :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1}$$

Je vous conseille de revoir le cours de début d'année sur les propriétés des coefficients binomiaux...

Preuve 9 : Si on décide de tenir compte de l'ordre, chaque combinaison génère $p!$ arrangements.

Remarque 8. Il s'agit donc aussi du nombre d'objets que l'on peut construire en choisissant p éléments distincts parmi n sans tenir compte de l'ordre du choix.

Exercice : 5

($*$) Justifier les formules suivantes à l'aide d'arguments de dénombrement :

1. la formule d'addition des coefficients binômiaux.

2. la formule du binôme de Newton.

3. Le nombre de parties d'un ensemble : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

4. La formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ (et si $m = k = n$?)

Exercice : 6

($*$) **Formule de Pascal Généralisée**

En remarquant que $\binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$, montrer que pour tout entiers $0 \leq n \leq p$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.

Cette formule est très souvent utilisée en dénombrement... Il peut être utile de la retenir.

`Exemple` 9. ($*$)

1. Quel est le nombre de façons de placer k boules identiques dans n urnes pouvant contenir au plus 1 boule ?
2. Quel est le nombre de façons de placer k boules numérotées dans n urnes pouvant contenir au plus 1 boule ?

`Exemple` 10. ($*$) Trouver le nombre d'applications strictement croissantes de l'intervalle $[\![1, p]\!]$ vers l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

`Exemple` 11. ($*$) On tire 8 cartes dans un jeu de 32.

1. Combien y-a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant 2 carrés ?

Exercice : 7

($*$) Au poker, on tire 5 cartes dans un jeu de 32.

1. Combien y-a-t-il de mains contenant 4 cartes identiques ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant un full (un brelan et une paire) ?
3. Combien y-a-t-il de mains contenant un brelan (3 cartes de la même valeur + 2 cartes distinctes) ?
   On proposera deux méthodes distinctes et on comparera les résultats obtenus.

Dans certains cas de dénombrement, il peut arriver que les objets soit dénombrés plusieurs fois (k fois exactement). Il faut alors penser à diviser par k le total obtenu.

Exercice : 8

($*$) On trace dans un plan n droites en position générale (i.e. deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

4 Méthode(s) de dénombrement

Pour résoudre un problème de dénombrement :

1. On commence par se demander si l'on ne peut pas décomposer l'ensemble à dénombrer en une partition d'ensembles plus simples à dénombrer.

2. Pour chacun de ces ensembles :
   (a) On regarde si par hasard, les éléments sont des p-listes, des arrangements ou des combinaisons : ce qui correspond au cas le plus simple rencontré.
   (b) Si ce n'est pas le cas, on décompose la façon dont on construit un élément de l'ensemble que l'on dénombre. Le nombre d'éléments est alors égale au produit des possibilités correspondant aux différentes étapes de la construction.
   (c) Enfin, on vérifie si les éléments n'ont pas été comptés plusieurs fois. Si la méthode choisie fait que chaque élément a été compté p fois, il faut alors diviser le résultat total par p.

3. Il ne reste plus qu'à additionner les cardinaux des différents ensembles constituant la partition.

Remarque 9.

1. Parfois pour rendre le raisonnement plus compréhensible, il peut être utile d'introduire une bijection afin de justifier l'égalité des cardinaux de deux ensembles.
2. On constate qu'il existe souvent plusieurs méthodes possibles pour effectuer un dénombrement. Selon le temps disponible, on pourra mettre en oeuvre les différentes méthodes et ainsi comparer les résultats obtenus.

Exercice : 9

$(**)$ Lors du premier jour de compétition de volley faisant intervenir $2n$ équipes, on souhaite que chaque équipe fasse un unique match. Combien les organisateurs ont-ils de possibilités pour organiser ce premier jour ? On pourra noter u_n la valeur cherchée.

1. Méthode 1 : on prend une équipe et on cherche le nbr d'adversaires possibles, puis on en prend une deuxième ...
2. Méthode 2 : on recherchera le nombre de possibilités pour chacun des n matchs en veillant a corriger le résultat obtenu puisque les matchs ne sont pas ordonnés.
3. Méthode 3 : on commencera par prouver que $u_n = (2n-1)u_{n-1}$.

Il s'agit de déterminer le nombres de partitions de $[\![1, 2n]\!]$ en sous-ensembles ne contenant que des paires de nombres.

Exercice : 10

$(**)$ **Les anagrammes**.
Dans le cas général, un mot M est constitué de n lettres.
Parmi ces lettres, k sont différentes : notons $a_1, \ \dots, \ a_k$ ces différentes lettres.
Notons alors n_i le nombre de lettres a_i présentent dans le mot M.
On appelle *anagramme du mot M* tout mot constitué avec les mêmes lettres que M.

1. Montrer que la formule donnant le nombre d'anagrammes du mot M est :

$$N(M) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

2. Applications :
   (a) Que donne la formule lorsque toutes les lettres de M sont distinctes ?
   (b) Quel est le nombre d'anagrammes du mot "orange" ?
   (c) Quel est le nombre d'anagrammes du mot "ananas" ?

5 Exercices de TD

Rappel Méthodologique :

Pour déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, on procèdera de la façon suivante :

1. On commencera par vérifier s'il n'existe pas une partition de cet ensemble telle que le dénombrement des parties de cette partition soit plus simple que le dénombrement de l'ensemble lui-même.

2. Lorsqu'il n'est plus possible de décomposer l'ensemble à dénombrer en partition, on s'interroge sur la nature des éléments à dénombrer. S'agit-il :

   (a) De p-listes ? (b) D'arrangements ? (c) De combinaisons ?

   Dans chacun de ces différents cas, il existe une méthode spécifique de dénombrement.

3. Lorsque les objets à dénombrer sont plus complexes, on décompose la construction d'un tel objet en différentes étapes. Le nombre d'objets est alors égal au produit des nombres de possibilités obtenus à chaque étape.

4. Il faut enfin s'assurer que tous les objets dénombrés n'ont bien été comptés qu'une seule fois.

Exercice de TD : 11

($\heartsuit$) **Cas simple de la formule du crible**
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble finie E, montrer que :

$$\text{Card}(A\cup B\cup C)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)+\text{Card}(C)-\text{Card}(A\cap B)-\text{Card}(A\cap C)-\text{Card}(B\cap C)+\text{Card}(A\cap B\cap C)$$

Exercice de TD : 12

($*$) Soit A et B deux parties de E et F.
Etant donnée une application $f\ :\ E\mapsto F$, est-il vrai que :

1. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice de TD : 13

($\heartsuit$) Déterminez le nombre d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres est 3.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit\heartsuit$) Déterminez le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments dans $\{0,1,2\}$.
Aide : on pourra s'intéresser au complémentaire de cet ensemble.

Exercice de TD : 15

($\heartsuit\heartsuit$) Combien y-a-t'il de façons de ranger n objets indiscernables dans n tiroirs différents ?
Aide : on pourra remarquer à l'aide d'une bijection que cela revient à déterminer le nombre de p-uplets $(x_1,\ \dots,\ x_n)\in\mathbb{N}^n$ *vérifiant* $x_1+\cdots+x_n=n$

Exercice de TD : 16

($\heartsuit\heartsuit$) On répartit n boules indiscernables dans 3 tiroirs.
Combien y-a-t-il de répartitions telles que 2 tiroirs exactement contiennent des boules ?

Exercice de TD : 17

($\heartsuit$) Soit E un ensemble à n éléments.
Déterminer le nombre de couples $(A,\ B)$ de $\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$ tels que :

1. $A \subset B$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cup B = E$

Exercice de TD : 18

($**$) Déterminer le nombre de parties de $[\![1, 2n]\!]$ contenant autant de nombres pairs que de nombres impairs.
Aide : on pourra utiliser la formule de Vandermonde vue en cours.

Exercice de TD : 19

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un ensemble à n éléments. Calculer : $\displaystyle\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$.

Exercice de TD : 20

($***$) Soit E un ensemble à n éléments. On propose ici deux méthodes de calcul de $S = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \mathrm{Card}(X \cap Y)$.

1. Méthode 1 :
   (a) Pour toute partie $Z \in \mathcal{P}(E)$ à k éléments, rechercher le nombre de couples $(X,\ Y)$ tels que $X \cap Y = Z$
   (b) En déduire, la valeur de S.

2. Méthode 2 :
   (a) Soient X et Y des parties de E.
   Montrer que $\{(X,\ Y),\ (X,\ \overline{Y}),\ (\overline{X},\ Y),\ (\overline{X},\ \overline{Y})\}$ forme une partition de $(\mathcal{P}(E))^2$.
   (b) Retrouver la valeur de S en utilisant la bijection $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(E))^2 & \longrightarrow & (\mathcal{P}(E))^2 \\ (X,\ Y) & \mapsto & (X,\ \overline{Y}) \end{array}$.

Exercice de TD : 21

($*$) Soit $n,\ p \in \mathbb{N}^*$. On note H_n^p le nombre de p-uplets $(x_1,\ \dots,\ x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.

1. Montrer que $H_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} H_{n-k}^{p-1}$.
2. En déduire que $H_n^p = \binom{n+p-1}{p-1}$.

Exercice de TD : 22

($\heartsuit\heartsuit\heartsuit$) Soit E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

1. Calculer S_n^1 S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
2. Pour $n \geq 3$, on suppose $p < n$ et on considère a un élément de E.
   On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \backslash \{a\}$ sur F, établir
   $$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$
3. En déduire que $S_n^p = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.
4. Quelle formule obtenez-vous en prenant $p = n$?

Exercice de TD : 23

($\heartsuit\heartsuit$) Soit n un entier non nul. Soit G_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas 2 entiers consécutifs.
Montrer que pour $n > 1$: $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.
En déduire l'expression de G_n.

Exercice de TD : 24

($\heartsuit\heartsuit$) On note d_n le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ne laissant aucun point fixe (une telle permutation s'appelle un *dérangement*).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   On utilisera pour cela la formule d'inversion de Pascal : $\quad a_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p \Rightarrow b_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p$.

3. En déduire que le nombre de permutations de E de cardinal n laissant exactement p points invariants est :

$$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Exercice de TD : 25

($**$) On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble de n éléments vers un ensemble de p éléments.

1. Donner la valeur de $S_{n,p}$ lorsque $p > n$.
   On suppose désormais que $p \leq n$.

2. Montrer que l'on a la relation : $\quad p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$

3. Un élève propose la formule $S_{n,p} = p! \binom{n}{p} p^{n-p}$.
   Expliquez le raisonnement de l'élève et montrer que cette formule est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

Exercice de TD : 26

($**$) On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{S}_n(k)$ le sous ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0, n]\!]$ points fixes. On pose : $s_n(k) = \text{Card}(\mathcal{S}_n(k))$.

1. Calculer : $\sum_{k=0}^{n} s_n(k)$.
2. Soit $n,\ k \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le nombre de couples $(s,\ x)$ constitués de $s \in \mathcal{S}_n(k)$ et x point fixe de s, établir que : $ks_n(k) = ns_{n-1}(k-1)$
3. En déduire que : $\quad s_n(k) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)$.
4. Retrouver directement le résultat précédent.