COURS DE DENOMBREMENT

1/ Définition des objets : *introduction*

Guesmi.B

Dénombrer, c'est compter des objets.

Ces objets sont créés à partir d'un ensemble E, formé d'éléments.
A partir des éléments de cet ensemble, les objets que l'on peut former sont soit des listes d'éléments de E soit des sous-ensembles de E.

A la différence des sous-ensembles,
les listes peuvent utiliser plusieurs fois un même élément, et surtout, possèdent un ordre.
Dans les exercices, les objets obtenus sont le résultat d'une expérience aléatoire,
c'est à dire que le hasard intervient dans leur formation.

Le **dénombrement** de ces objets, lui, n'a rien d'aléatoire,
il est un décompte organisé de tous les résultats possibles d'une telle expérience.

Nous allons maintenant définir avec plus de précisions
les différents objets que l'on peut rencontrer et pour ce, nous allons prendre comme exemple l'ensemble suivant :

Soit E un ensemble à 4 éléments : $E = \{ a \, ; b \, ; c \, ; d \}$

Remarques :
1) le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et noté ***card E = 4***

2) les éléments de E sont 2 à 2 distincts, sinon ***card E ≠ 4.***

<u>Créons, maintenant les conditions d'une expérience aléatoire</u> :
** prenons 4 jetons indiscernables au toucher*
** inscrivons sur le premier : a, sur le deuxième : b, sur le troisième : c, sur le dernier : d et plaçons-les dans un sac*

1/ Définition des objets : p-uplets

Expérience n°1 :
Tirages successifs avec remise.

* On pioche un premier jeton, par exemple : b et on le remet dans le sac.
* On pioche un deuxième jeton, par exemple : a et on le remet dans le sac.
* On pioche un troisième jeton, par exemple : a et on le remet dans le sac.

L'expérience est terminée.

Le résultat est noté à l'aide de parenthèses : $(b \, ; a \, ; a)$

Les résultats possibles de cette expérience sont des listes de 3 éléments de E,
avec répétition d'éléments possible.

- Une liste de 3 éléments est appelée un triplet.
- Plus généralement, une liste de p éléments est appelée un **p-uplet** ou une **p-liste.**

Attention !
Une liste respecte un ordre : $(b \, ; a \, ; a) \neq (a \, ; a \, ; b)$
Dans une liste, il y a un premier élément, un deuxième élément, etc…

1/ Définition des objets : *arrangements*

Expérience n°2 :

Tirages successifs sans remise.

* On pioche un premier jeton, par exemple : b que l'on ne remet pas dans le sac.
* On pioche un deuxième jeton, par exemple : a que l'on ne remet pas dans le sac.
* On pioche un troisième jeton, par exemple : c que l'on ne remet pas dans le sac.

L'expérience est terminée.

Le résultat est noté à l'aide de parenthèses : ***(b ; a ; c)***
Les résultats possibles de cette expérience sont des listes de 3 éléments de E,
sans répétition d'éléments possible.

- Une liste de 3 éléments sans répétition possible est appelée un arrangement de 3 éléments.
- Plus généralement, une liste de p éléments sans répétition possible est appeléeun arrangement de p éléments de E.

Remarques :
1) Cette dénomination a pour avantage de bien marquer l'importance de l'ordre dans une telle liste.

2) Un arrangement de p éléments de E est un cas particulier de p-uplet d'éléments de E.

1/ Définition des objets : *permutations*

Expérience n°2 :

Tirages successifs sans remise.

<u>Cas particulier d'arrangement</u> :
Si l'on réalise autant de pioches sans remise qu'il y a de jetons dans le sac, on obtient alors une liste de tous les éléments de E rangés dans un certain ordre.

Une telle liste est appelée une permutation des éléments de E.

Par exemple : ***(d ; b ; c ; a)*** est une permutation des éléments de E.
Et : ***(c ; a ; d ; b)*** en est une autre.
Plus généralement : un arrangement de n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé une **permutation des éléments de E.**

1/ Définition des objets : *combinaisons*

Expérience n°3 :

Tirages simultanés.

* On pioche trois jetons en une seule fois, par exemple : a, d et c.
Le résultat est noté à l'aide d'accolades : ***a ; d ; c***
Les résultats possibles de cette expérience sont des sous-ensembles de E ou parties de E, possédant 3 éléments.

Un sous-ensemble de E comportant 3 éléments est appelé une combinaison de 3 éléments de E.

Plus généralement, une partie de E possédant p éléments est appelée une combinaison de p éléments de E.

- L'ensemble ***d ; a ; c*** possède les mêmes éléments que l'ensemble ***a ; d ; c***
Ils sont donc égaux.
Par conséquent, contrairement aux listes, l'ordre d'écriture des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Cette absence d'importance de l'ordre est marquée par l'utilisation de l'écriture avec accolades,écriture réservée aux ensembles.

2/ Dénombrement : *arrangements*

Nous savons ce qu'est, par exemple, un arrangement de 3 éléments de E,
mais le problème est maintenant de trouver combien on peut former de listes de ce type.

Deux grandes techniques de **dénombrement** existent.

Voici la première de ces techniques,
appliquée au **dénombrement** des arrangements de 3 éléments
de l'ensemble E, défini plus haut :

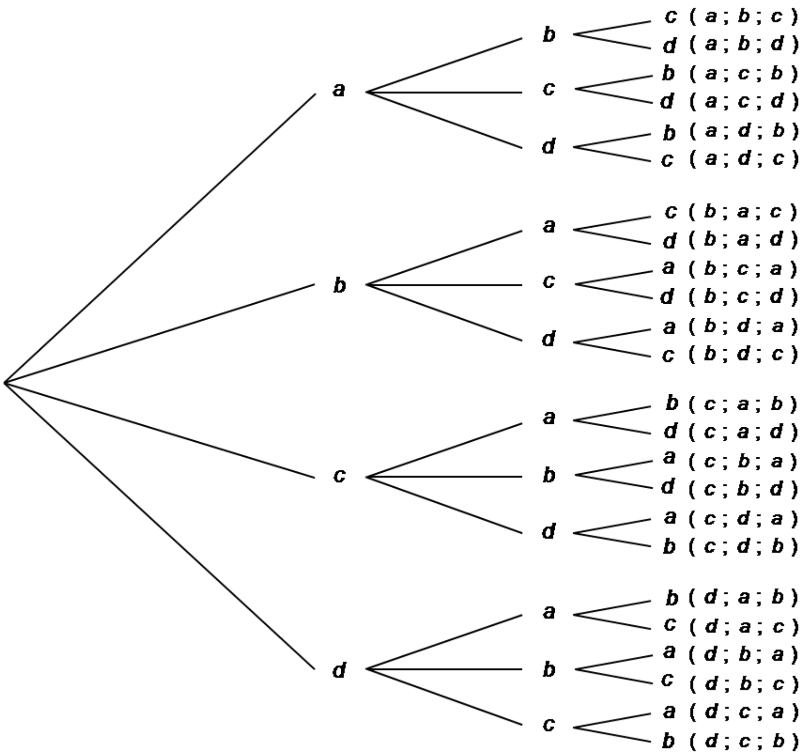
Technique de l'arbre :

Il y a 4 choix pour le premier élément de la liste.

Puis, à chaque choix fait pour le premier élément correspond pour le deuxième élément un même nombre de choix : 3.

(= nombre de choix possibles parmi les (4-1) éléments restants, car la liste est sans répétition)

Puis, à chaque choix fait pour le deuxième élément correspond pour le troisième élément un même nombre de choix : 2.



(= nombre de choix possibles parmi les (4-2) éléments
restants, car la liste est sans répétition)

En bout de branches,
nous récupérons les différents arrangements possibles.

A chaque stade de choix, chaque branche « éclatant »
en un même nombre de choix, les arrangements possibles
sont au nombre de : 4x3x2 = 24.

Soit : (4-0)x(4-1)x(4-2).

Ou encore : 4x(4-1)(4-(3-1)).

Technique des cases :

« Fabriquer » un arrangement de 3 éléments de E,
équivaut à remplir les 3 cases suivantes avec des éléments 2 à 2 distincts :

Case n°1		Case n°2		Case n°3
b	x	*a*	x	*c*
1er élément de la liste		2ème élément de la liste		3ème élément de la liste

Il y a 4 choix possibles pour le premier élément.

Puis le choix du premier élément étant fait, il reste 3 choix possibles pour le deuxième.

Et enfin, le choix des deux premiers éléments étant fait,
il reste 2 choix possibles pour le dernier.

	Case n°1		Case n°2		Case n°3	
Nombre de listes =	4 choix	x	3 choix	x	2 choix	= 24
	1er élément de la liste		2ème élément de la liste		3ème élément de la liste	

Remarque :
cette technique équivalente à celle de l'arbre, est parfois plus pratique quand par exemple un élément de la liste est connu ainsi que sa position.

Cas général : soit un entier naturel n $\geq$ 1, et soit p entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté : A^p_n

Et en généralisant le raisonnement tenu sur le cas particulier, on a :

$$\boxed{A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))}$$

Nombre de choix pour le premier élément

Nombre de choix pour le deuxième élément

Nombre de choix pour le pième élément

2/ Dénombrement : *permutations*

* Si p = n, on **dénombre** alors les permutations d'éléments de E.
Sur notre cas particulier, en utilisant par exemple la technique des cases, on trouve qu'il existe : 4x3x2x1 permutations des éléments de E.

Soit : 24 permutations des 4 éléments de E.

Plus généralement, une permutation étant un arrangement de n éléments de E, il en existe : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(n-1))$

Soit : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Cas général : pour tout entier n $\geq$ 1
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté : ***n* !** *(se lit "factoriel n")*

Avec : $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

Remarques :
1) D'un point de vue calculatoire (qui perd le sens du **dénombrement**) : $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ Il s'agit tout simplement du produit des n premiers entiers.

2) Par convention : **0 ! = 1**

2/ Dénombrement : *p-uplets*

Toujours avec notre exemple, en dénombrant à l'aide de la technique des cases et en tenant compte du fait que la répétition d'un même élément est possible :

on trouve qu'il existe : 4x4x4 triplets possibles, soit 64 triplets formés avec les éléments de E.

Cas général : soit un entier naturel n $\geq$ 1, et soit p entier naturel tel que : p $\geq$ 1
Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est : n^p

Remarque :
Comme il peut y avoir répétition des éléments de E, p peut être strictement plus grand que n.

2/ Dénombrement : *combinaisons*

Considérons la combinaison de 3 éléments de E : ***a ; b ; c***
En permutant ses éléments, il est possible de former des arrangements de 3 éléments de E.

Et le nombre de permutations d'un ensemble de 3 éléments étant : 3 !, il est donc possible à partir de cette combinaison de former 6 arrangements de 3 éléments de E.

On peut évidemment faire de même avec les autres combinaisons de 3 éléments de E, obtenant ainsi tous les arrangements de 3 éléments de E.

De plus, deux combinaisons différentes ne peuvent générer deux arrangements identiques.

Donc, si nous notons C_4^3 le nombre de combinaisons de 3 éléments de E, par analogie avec la notation A_4^3 des arrangements de 3 éléments de E, on a alors :

$A_4^3 = 6 \times C_4^3$ Or : $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ donc $C_4^3 = 4$.

En effet, les combinaisons possibles sont : $\{a\,;\,b\,;\,c\}$ $\{a\,;\,b\,;\,d\}$ $\{a\,;\,c\,;\,d\}$ et $\{b\,;\,c\,;\,d\}$

Généralisons ce raisonnement au cas d'une combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments.

Chaque combinaison de p éléments, par permutations, génère p ! arrangements de p éléments de E.

Donc, avec les notations utilisées précédemment : $A_n^p = p! \times C_n^p$

Or, $A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))$

Donc : $$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))}{p!}$$

Ce nombre est plus souvent noté : $\binom{n}{p}$ même si cette écriture est moins parlante.

En multipliant numérateur et dénominateur par : **(n - p) !** , on obtient également :

$$C_n^p = \frac{[n.(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-(p-1))][(n-p)\ldots\ldots x1]}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Cas général : soit un entier naturel n $\geq$ 1 , et soit p entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté :

D'un point de vue pratique :
cette valeur correspond
au nombre de façons
de choisir p éléments parmi n,
l'ordre de choix ne comptant pas.1

$\binom{n}{p}$ ou C_n^p

et se lit : « p parmi n ».

Attention !
p et n sont positionnés
différemment selon la
notation choisie.

avec pour $p \neq 0$

Remarques sur cette formule :

1° Cas particuliers

Cas p = 0 :

Nous avons démontré cette égalité pour p $\geq$ 1 mais non pour p = 0 car alors
la notion de liste n'a plus de sens.

Par contre, un sous-ensemble de E possédant 0 éléments existe, il est unique et il s'agit de l'ensemble vide.

On a donc : $C_n^0 = 1$

Pour p = 0 : $\dfrac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(p-1))}{p!}$ n'a aucun sens, par contre : $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$

Et donc, la deuxième moitié de la formule reste vraie pour p = 0

Cas p = 1 :

Il existe autant de sous-ensembles de E à 1 élément que d'éléments de E donc : $C_n^1 = n$
On peut retrouver ce résultat par le calcul :

Cas p = n :

Il n'existe qu'un sous-ensemble de E à n éléments c'est E donc : $C_n^n = 1$
On peut retrouver ce résultat par le calcul :

2° Utilisation pratique de cette formule : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Pour savoir calculer avec cette formule, le mieux est de toujours garder en tête comment elle a été démontrée.

On utilisera donc pour un calcul direct de « p parmi n », le résultat du milieu.

Exemple : calculons le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble de cardinal 8.

nb de listes de 3 éléments, sans répétitions.
$C_8^3 = \frac{8x7x6}{3x2x1}$=56D'un point de vue purement pratique :

On part de 8 et on enlève 1,
jusqu'à obtention de 3 facteurs,
représentant les 3 choix successifs.
factorielle 3, nb de permutations de 3 éléments.

Bien entendu, le calcul que l'on vient de faire peut vite devenir compliqué pour des grands nombres et on utilisera alors la calculatrice.

Mais il est à privilégier chaque fois que cela est possible.

La deuxième partie de la formule sert surtout dans le cas de démonstrations de formules et d'égalités concernant « p parmi n ».

3/ Combinaisons : *formules*

Proprieté

pour tous n et p entiers naturels tels que *0 ≤ p ≤ n* : $C_n^p = C_n^{n-p}$ (choisir p parmi n c'est la même chose qu'écarter (n-p))

Conséquence : $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

* Démonstration par le calcul : c'st evident

* Démonstration en raisonnant sur les ensembles :

C_n^p est le nombre de sous-ensembles de E contenant p éléments.

Or, choisir p éléments pour former un ensemble, c'est écarter les (n-p) éléments restants de E.

A chaque sous-ensemble de p éléments de E correspond donc un sous-ensemble de (n-p) éléments de E.

Il y a donc autant de sous-ensembles de p éléments que de sous-ensembles de (n-p) éléments.

Par conséquent : « p parmi n » = « (n-p) parmi n »

Propriete

pour tous n et p entiers naturels tels que *n ≤ p ≤ n - 1* : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ (a)

La démonstration par le calcul fera l'objet d'un R.O.C dans la partie exercices de votre espace membre.

* Démonstration en raisonnant sur les ensembles :
1 ≤ n - 1 donc, considérons un ensemble E constitué d'au moins deux éléments.

Appelons a, un élément quelconque de E.

Soit une combinaison de p éléments de E contient a, soit elle ne le contient pas.

Notons k le nombre de combinaisons à p éléments, contenant a et notons k' le nombre de combinaisons à p éléments ne contenant pas a.

k + k' = C_n^p
Or, pour former une combinaison de p éléments de E contenant a, il faut choisir a puis choisir les (p-1) éléments restants parmi les (n-1) éléments de E différents de a.
k est donc égal au nombre de combinaisons de (p-1) éléments d'un ensemble à (n-1) éléments.
D'où : $k = C_{n-1}^{p-1}$

Pour former une combinaison de p éléments de E ne contenant pas a, il faut choisir les p éléments parmi les (n-1) éléments de E différents de a.
k' est donc égal au nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à (n-1) éléments.

D'où : $k' = C_{n-1}^{p}$
Or : $k + k' = C_{n}^{p}$
Donc : le resultat demande

3/ Combinaisons : *triangle de Pascal*

formule (a): sert entre autres à calculer les C_n^p grâce à une astucieuse disposition en tableau :
La formule n'est valable qu'à partir de n = 2

donc les 2 premières lignes sont à remplir directement.

Et sur le même principe, on obtient les lignes suivantes.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3				
4	1	4				
5						

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3			
4	1	4	6			
5						

Au delà, du calcul isolé d'un C_n^p cette technique permet de calculer tous les C_n^p pour un n donné,

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

ce qui peut être utile pour la formule qui suit :

3/ Combinaisons : *formule du binôme de Newton*

Formule n° 3 : formule du binôme de Newton.

Pour tout réel a et b et pour $n \geq 1$ on a :
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots \ldots \ldots . + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

La présence de « k parmi n » dans la formule s'explique de la sorte :
par exemple : $\mathbf{a^{n-1}b^1}$ a pour représentants dans le développement de $\mathbf{(a + b)^n}$:

ba...a aba...a aaba...a etc...

Il possède donc autant de représentants que de façons de placer b sur n cases, les autres étant remplies par des a.

Plus généralement : $\mathbf{a^{n-k}b^k}$ possède autant de représentants que de façons de placer k lettres b sur n cases.
C'est à dire :C_n^k

Remarques :
1) Cette formule est également valable, de façon plus générale, pour a et b nombres complexes.

2) La somme des exposants de chaque monôme vaut toujours n.

3) En raison de leur rôle dans cette formule, les C_n^p sont aussi appelés coefficients binomiaux.

4) Cette formule se démontre rigoureusement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemple d'utilisation :

Développer $(1 + x)^5$ à l'aide de la formule du binôme.

Trois des coefficients
sont évidents, d'après la définition des combinaisons :

Un coefficient est à calculer :

Et les deux derniers se déduisent des précédents :

D'où : $(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

Formule que l'on peut « vérifier » par exemple pour x =
2 : $\begin{cases} (1+1)^5 = 32 \\ 1+5+10+10+5+1 = 32 \end{cases}$ √

Remarque :
Les coefficients binomiaux pouvait également être trouvés en remplissant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5, comme vu précédemment.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On remarque si on utilise le triangle de pascal on retrouve le resultat tres simplement