Mathématique en Terminale S
Probabilités conditionnelles

Table des matières

Section 1

Introduction

Lorsque 7 élèves d'une classe de 32 élèves pratiquent le tennis, on sait alors que la fréquence de l'événement :« l'élève fait du tennis » est de $f = \dfrac{7}{32}$ soit à peu près $21,9\%$. Cette fréquence devient une probabilité lorsqu'on réalise l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un élève de la classe.
Ainsi, bien souvent considérons-nous une probabilité d'un événement A comme la proportion de A dans un ensemble de référence, appelé Univers, noté bien souvent Ω.
Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un individu au hasard dans une ville quelconque. On s'intéresse à la probabilité de l'événement « P :La personne fait des paris sportifs sur Internet ».
Vous comprendrez sans doute que la probabilité de cet événement est très affectée selon la ville choisie, la population choisie ou le lieu choisie.Si le sondage est effectué à la sortie d'un stade ,la probabilité de P devrait être plus importante qu'à la sortie d'une église. L'ensemble de référence est donc *a priori* important.
C'est le principe des probabilités conditionnelles : la probabilité d'un événement peut être affecté par le choix d'un ensemble de référence différent.

Section 2

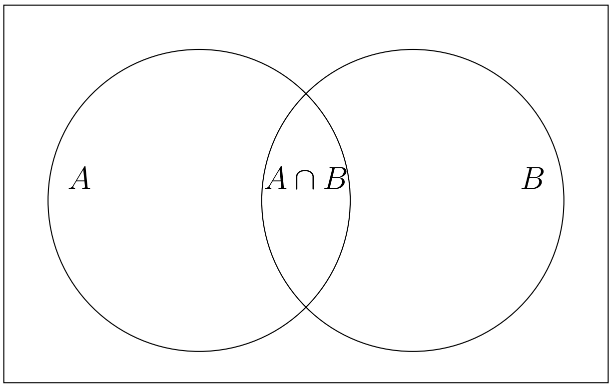
Définitions

Définition

Soit A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$. Alors la probabilité de B sachant que A est réalisé est égale à :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Il faut comprendre qu'au travers de cette formule, on cherche la part de B dans A comme l'illustre le diagramme suivant :



Or la part de B dans A n'existe qu'au travers de la part de $A \cap B$ dans A, d'où $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Exemples :

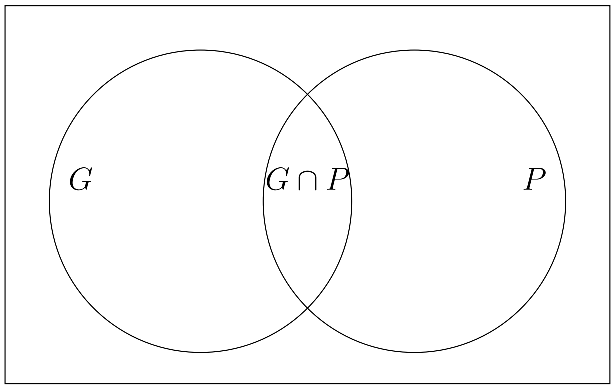
- Dans une classe, la probabilité d'obtenir un garçon est de $0,7$ et celle d'obtenir un garçon qui pêche est de $0,035$. Parmi les garçons quelle est la probabilité d'obtenir un pêcheur ?
- Dans un troupeau de vache, 5% sont malades. Parmi ces malades, 98% réagissent positivement à un test de dépistage de la maladie. Parmi le troupeau, quelle est la probabilité d'obtenir une vache malade et qui réagit positivement au test ?

Correction :

On considère deux événements de l'ensemble de référence selon deux critères : (Garçon,Pêcheur) pour le premier et (Malade,Positif) pour le second. On peut donc représenter la situation soit par un diagramme de Ven, soit par un arbre de probabilité.

Exemple n°1 : Avec un diagramme

On connaît la proportion de G dans Ω et de celle de $G \cap P$ dans Ω ; il faut en déduire la proportion de P (ou $P \cap G$) dans G :

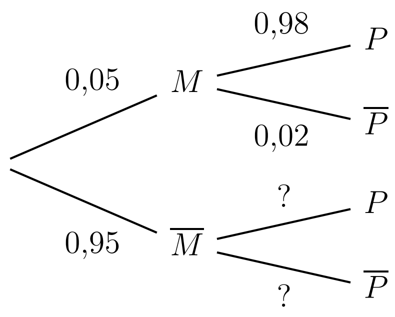


avec $p(G) = 0,7$ et $p(G \cap P) = 0,035$. Et on cherche $p_G(P)$.

Donc d'après la formule précédente, $p_G(P) = \dfrac{p(G \cap P)}{p(G)} = \dfrac{0,035}{0,7} = 0,05$. Ainsi, 5% des garçons sont des pêcheurs ou en termes de probabilité, la probabilité d'obtenir un pêcheur parmi les garçons est de $0,05$.

Exemple n°2 : Avec un arbre

La situation se résume ainsi :



Les « ? »sont des données inconnues. On connaît donc $p(M)$ (qui permet de calculer rapidement $p(\overline{M})$) et $p_M(P)$(qui permet de calculer rapidement $p_M(\overline{P})$) . Donc la formule donne :

$$p(M \cap P) = p(M) \times p_M(P) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$$

Donc dans le troupeau, la probabilité qu'une bête soit malade et positive est de $0,049$

Section 3

Formule des probabilités totales

Considérons le problème suivant :
Trois machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement $20\%, 35\%$ et 45% de la production d'une entreprise. On estime à $1,5\%, 2\%$ et 1%, les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3.On choisit une pièce au hasard dans la production et on s'intéresse à la probabilité de l'événement D :*La pièce est défectueuse.*
On peut remarquer que :

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3) \text{ avec } (D \cap M_i) \cap (D \cap M_j) = \emptyset (i \neq j)$$

C'est-à-dire que l'événement D est la réunion de trois événements deux à deux disjoints.
Rappelons enfin que quelque soit les événements A et B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{ et dans le cas où } A \cap B = \emptyset \text{ ,} p(A \cap B) = 0.$$

En appliquant cette formule à D on obtient :

$$p(D) = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3)$$

soit enfin avec les formules précédentes :

$$p(D) = p(M_1) \times p_{M_1}(D) + p(M_2) \times p_{M_2}(D) + p(M_3) \times p_{M_3}(D)$$

Soit $p(D) = 0,2 \times 0,015 + 0,35 \times 0,02 + 0,45 \times 0,01 = 0,0145$.
C'est la formule des probabilités totales.

Théorème des probabilités totales

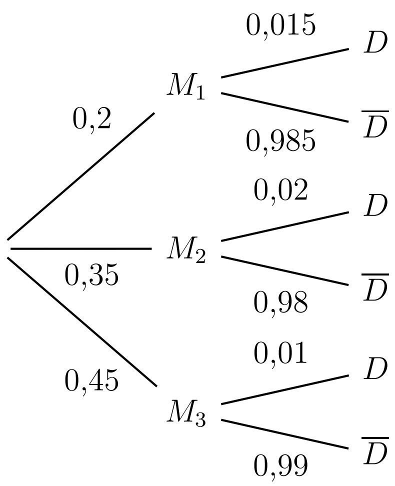
Si l'univers Ω d'une expérience aléatoire est la réunion d'événements $A_1, A_2, ...A_n$, deux à deux incompatibles, alors pour tout événement B, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$

Dans ce cas,on dit que la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ réalise une partition de Ω.Un cas particulier est la famille $(A, \overline{A})$ qui réalise une partition de Ω, quelque soit l'événement A.
La formule s'écrit encore, à l'aide des probabilités conditionnelles :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

La situation peut s'illustrer par un arbre de probabilité :



ou un tableau à double entrée :

	M_1	M_2	M_3	total
D	0,003	0,007	0,0045	0,0145
$\overline{D}$	0,197	0,343	0,4455	0,9855
Total	0,2	0,35	0,45	1

Section 4

Indépendance et principe du produit

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- $p_A(B) = p(B)$
- $p_B(A) = p(A)$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarques :
- Ne pas confondre indépendance et incompatibilité.
- Quand on répète un tirage avec remise dans une urne, on crée des expériences indépendantes. Ce n'est pas le cas si le tirage est fait sans remise (sauf si le nombre d'objet est infiniment grand !).

Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants alors les événements :

1. $\overline{A}$ et B
2. A et $\overline{B}$
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$

le sont aussi

Démonstration : Les deux événements A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
De plus A et $\overline{A}$ réalise une partition de l'univers Ω donc, d'après la formule des probabilités totales : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$.
D'où : $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B) = (1 - p(A)) \times p(B) = p(\overline{A}) \times p(B)$.
On étend la règle précédente à n événements deux à deux indépendants pour énoncer le principe du produit :

> La probabilité d'une liste de résultats, deux à deux indépendants, est égale au produit des probabilités de chacun des résultats.

C'est ce résultat important que l'on retrouve dans le schéma de Bernoulli pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus.On rappelle ici ce résultat :
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. On appelle p la probabilité du succès.

Définition

La loi de la variable X s'appelle la **loi binomiale** de paramètres n et p.

On rappelle que dans ce cas les valeurs possibles de X sont :$0, 1, 2, 3, ..., n-1, n$.La propriété suivante permet de définir la loi de probabilité de X.

Soit $X \sim B(n,p)$. Alors pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Souvent le calcul de ces probabilités s'effectue avec la calculatrice. On retiendra de plus les propriétés suivantes :

Soit $X \sim B(n,p)$. Alors l'espérance de X est $E(X) = n \times p$ et sa variance est $V(X) = n \times p \times (1-p)$

L'espérance désigne la valeur moyenne prise par X si l'on répète plusieurs fois l'expérience.